

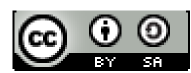
Der Briefwechsel Hasse – Scholz – Taussky

Herausgegeben von
Franz Lemmermeyer und
Peter Roquette

Universitätsverlag Göttingen

Franz Lemmermeyer und Peter Roquette (Hg.)

Der Briefwechsel Hasse – Scholz – Taussky



erschienen im Universitätsverlag Göttingen 2016

Der Briefwechsel
Hasse – Scholz – Taussky

Herausgegeben von

Franz Lemmermeyer und
Peter Roquette



Universitätsverlag Göttingen
2016

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Anschrift der Herausgeber

Prof. Dr. Franz Lemmermeyer
E-Mail: hb3@ix.urz.uni-heidelberg.de

Prof. Dr. Peter Roquette
E-Mail: roquette@uni-hd.de

Umschlaggestaltung: Jutta Pabst
Titelabbildung: Arnold Scholz, Privatbesitz

http://univerlag.uni-goettingen.de
ISBN: 978-3-86395-253-2

Dem Gedenken an

Arnold Scholz

gewidmet, aus Anlass der

111ten Wiederkehr

seines Geburtstags

am 24.12.2015

Vorwort

Nach der Veröffentlichung des Briefwechsels von Hasse mit Emmy Noether [171] und mit Artin [75, 76], soweit diese erhalten sind, legen wir hiermit einen weiteren Teil aus der umfangreichen Korrespondenz von Helmut Hasse vor, nämlich seinen Briefwechsel mit Arnold Scholz. Wegen der Verwandschaft der behandelten Themen, der Zusammenarbeit zwischen Scholz und Olga Taussky und der gemeinsamen Verbindung zu Philip Furtwängler haben wir auch den Briefwechsel zwischen Scholz und Taussky mit aufgenommen. Den Briefwechsel zwischen Taussky und Hasse haben wir nur bis zum Jahre 1944 berücksichtigt, um den Umfang des Bandes nicht zu sprengen. Da der wissenschaftliche Inhalt der restlichen Korrespondenz zwischen Hasse und Taussky auch nicht an das Niveau des hier vorgestellten Teils heranreicht, wiegt der Verzicht auf die Nachkriegskorrespondenz allerdings nicht sehr schwer.

Ursprünglich war auch geplant gewesen, den Briefwechsel von Scholz mit ausführlichen Kommentaren zu versehen, die kaum noch Fragen offen lassen sollten. Leider hat sich dieses Unterfangen, vor allem aus zeitlichen Gründen, nicht realisieren lassen. Daher sind manche wichtigen Fragen und Entwicklungen sehr sparsam oder gar nicht kommentiert, und uns bleibt wenig mehr als der Hoffnung Ausdruck zu geben, dass die Publikation des Briefwechsels andere dazu anregen möge, die Schätze, die in den Scholzschen Arbeiten enthalten sind, zu heben.

In jedem Fall liefert der vorliegende Briefwechsel einen Einstieg in die Scholzsche Gedankenwelt, anhand dessen sich die Entstehung und Entwicklung seiner Ideen weitgehend nachvollziehen lässt. Leider haben wir auch hier im wesentlichen nur die Briefe von Scholz aus dem Nachlass von Hasse zur Verfügung.

Wir beginnen mit der Skizze einer Biographie von Arnold Scholz und einer Beschreibung seiner wichtigsten Ergebnisse; dabei gehen wir auch auf seine Schwierigkeiten, in den Zeiten des Nationalsozialismus eine angemessene Stelle zu finden, ein. Die Bewertung der Rolle, welche Mathematiker wie Hasse oder Süss im vorliegenden Fall oder allgemein im wissenschaftlichen Betrieb der späten 1930er Jahre gespielt haben, ist eine schwierige Aufgabe. Wie groß die Vorsicht war, die man damals beim Schreiben walten lassen musste, wird aus dem Brief vom 29.10.1934 von F.K. Schmidt an Hasse deutlich; dort schreibt er:

> *Ich habe Bedenken, ob es gegenüber E. Hopf nicht doch als ein Vertrauensbruch erscheinen könnte, wenn Sie seinen Privatbrief an das Minist. weitergeben. Die Stelle über „die gegenwärtige Lage der Mathematik in Deutschland“ könnte ihm schädlich sein, da sie – was auch Sie nach Ihrer mündlichen Mitteilung in Berlin empfanden – mit einem abwertenden Klang gelesen werden kann. Da E. Hopf andererseits die Rückkehr in die Heimat erwünscht ist, scheint mir Vorsicht am Platze.*

Dieselbe Vorsicht, die man damals beim Schreiben von Briefen walten lassen musste, erscheint heute angebracht, wenn es um die Auswertung von schriftlichen Dokumenten geht.

Nach einem entsprechenden Aufsatz über das klassenkörpertheoretische Schaffen von Olga Taussky stellen wir den kommentierten Briefwechsel zwischen Hasse und Scholz, sowie zwischen Scholz und Taussky (einschließlich einiger Briefe zwischen Taussky und Elisabeth Korrodi, der Schwester von Arnold Scholz, und schließlich zwischen Hasse und Taussky vor. Am Ende dieses Buchs finden sich darüberhinaus noch einige Gutachten über Scholz. Ebenfalls aufgenommen haben wir den Entwurf des Manuskripts über Spezielle Zahlkörper, den Scholz für die Enzyklopädie beisteuern sollte.

Die in diesem Buch vorgestellten Briefe und Postkarten stammen aus dem Nachlass von Helmut Hasse in der Handschriftenabteilung der Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, und dem Nachlass von Olga Taussky-Todd in dem Archiv des California Institute of Technology. Die Transkriptionen wurden zum großen Teil von Thomas Olschewski angefertigt und in LaTeX gesetzt. Bei der Herstellung des Buches wurden wir teilweise von der Deutschen Forschungsgemeinschaft und der Möllgaard-Stiftung im Stifterverband der deutschen Wissenschaft unterstützt. Die Fotos von Scholz auf den Seiten 11 und 27 stammen ursprünglich wohl von dessen Schwester Elisabeth Korrodi und kamen über Olga Taussky in den Besitz von René Schoof, der uns diese dankenswerterweise überlassen hat.

Jagstzell und Heidelberg, November 2015 F. Lemmermeyer, P. Roquette

Inhaltsverzeichnis

Teil IV. Briefwechsel Hasse–Taussky

Teil I

Arnold Scholz und Olga Taussky

1. Arnold Scholz: Zwischen Mathematik und Politik

Franz Lemmermeyer

In diesem Kapitel wollen wir neben einer kurzen Biographie[1] eine Einführung in das zahlentheoretische Schaffen von Arnold Scholz geben und dabei auch einen Eindruck von den Schwierigkeiten geben, denen er ab der Machtergreifung der Nationalsozialisten bis zu seinem Tod ausgesetzt war.

Arnold Scholz wird am 24. Dezember 1904 im Stadtteil Charlottenburg von Berlin geboren. Sein Vater Reinhold Scholz (1857–1933) war als Physiker und Mathematiker am Militär-Versuchsamt in Berlin angestellt; seine Mutter war Johanna Scholz, geb. Diesfeld (1874–1957). 1923 erhält Scholz das Abitur am Kaiserin-Augusta-Gymnasium in Charlottenburg und besucht danach an der Universität Berlin Vorlesungen in Philosophie, Mathematik und Musikwissenschaften. Nach einem Auslandssemester im Sommer 1927 in Wien bei Ph. Furtwängler promoviert er 1928 magna cum laude unter Issai Schur und zieht im April 1929 nach Freiburg. Dort erhält er 1930 eine Assistentenstelle; nach der Emeritierung von Heffter 1931 wird dessen Nachfolger Doetsch sein Vorgesetzter, der sich nach der Machtergreifung in einen linientreuen Nationalsozialisten verwandelt, was Scholz zur Aufgabe seiner Assistentenstelle zwingt; danach schlägt er sich mit einem Stipendium der Notgemeinschaft durch. Die Abschaffung der Algebra in Freiburg durch Doetsch vertreibt Scholz 1935 nach Kiel; nach Kriegsausbruch wird er 1940 eingezogen und zuerst als Funker in den Osten geschickt und dann 1941 als Lehrer für Mathematik an die Marineschule Flensburg-Mürwik beordert, wo er am 1. Februar 1942 an einer Lungenentzündung[2] stirbt und am 4.2.1942 auf dem Marine-Friedhof am Friedenshügel begraben wird.

Arnold Scholz war einer der besten Kenner von Takagis Klassenkörpertheorie; was andere beweisen mussten, hat er „gesehen". Dies ist mit ein Grund, weswegen seine Veröffentlichungen teilweise sehr schwer zu lesen sind. Gemäß

[1] Es war leider nicht möglich, eine Erlaubnis zur Wiedergabe des von Olga Taussky verfassten Nachrufs zu erhalten. Alle hier angeführten Informationen stammen aus dem Briefwechsel; darüberhinaus hat mir N. Korrodi geholfen, einige Lücken zu schließen.

[2] In Tausskys Nachruf wird als Todesursache Diabetes angegeben; womöglich liegt dies daran, dass Taussky den Artikel auf Englisch schrieb und ihn später von Eva Erdélyi ins Deutsche übertragen ließ.

Tausskys Nachruf auf Scholz soll Schur zu einer frühen Arbeit von Scholz die Bemerkung „Mehr Landau, weniger Goethe!“ gemacht haben.

Eine ganz andere Schwierigkeit beschreibt Scholz am 19.12.35:

> *Das endgültige Formulieren fällt mir bei einer neuen Sache deswegen so schwer, weil ich meist nicht in Worten, sondern in räumlichen Vorstellungen denke, mit Farben und allerlei anderen Assoziationen versehen.*

Hasse hat Scholz in einem Gutachten (sh. S. 531) den Vorwurf gemacht, dass dieser die moderne Algebra zu sparsam eingesetzt habe:

> *Auf der andern Seite ist dieser stark ausgeprägte Sinn für Zahlen auch eine gewisse Schwäche, denn er hindert ihn oft, die inzwischen ausgebildeten mehr formalen Schlussweisen der modernen Algebra, die doch in den letzten Jahren die Zahlentheorie so entscheidend beeinflusst haben, voll einzusetzen.*

An manchen Stellen mag dies durchaus zutreffend sein, auch wenn die Lesbarkeit der Scholzschen Artikel vor allen Dingen wohl eher daran krankt, dass dieser wiederkehrende Schlussweisen nicht als Lemmata und Propositionen kondensiert, sondern beim ersten Auftreten im Text versteckt und beim zweiten Mal einfach unkommentiert einsetzt: zu viel Goethe, zu wenig Landau. Was die moderne Algebra angeht, scheint mir die folgende Bemerkung Jehnes aus [147, S. 221] eher angebracht:

> *Without any cohomology theory at hand Scholz recognized that the number knot $\nu_{K|k}$ is an epimorphic image of the fundamental group $\pi\mathfrak{g}$ of the Galois group in a natural way.*

Es ist wohl schlichtweg so, dass die in Fragen von Einbettungsproblemen und Normenresten so hilfreiche Sprache der exakten Sequenzen und der Kohomologietheorie noch nicht entwickelt war und Scholz seine Ergebnisse mit der damals zur Verfügung stehenden Sprache nicht in der wünschenswerten Klarheit ausdrücken konnte.

Dies erklärt auch, warum man die meisten seiner Ergebnisse erst wiederentdecken musste, bevor man sie in den Scholzschen Arbeiten auffinden konnte. Einer der wenigen, der Scholzsche Arbeiten genau studiert hat, war Schafarewitsch: durch den Ausbau der Scholzschen Methoden zur Konstruktion von Zahlkörpern mit vorgegebener Galoisgruppe konnte er zeigen, dass jede auflösbare endliche Gruppe eine Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$ ist (Scholz hat dies für p-Gruppen und für gewisse zweistufige Gruppen getan, also solche, deren Kommutatorgruppe abelsch sind).

Andere Ergebnisse von Scholz wurden erst viel später wiederentdeckt:

- Die von Tschebotareff initiierte und von Scholz ausgebaute Theorie der Geschlechter- und Zentralklassenkörper wurde von Fröhlich [79] ein zweites Mal entwickelt.

- Das bereits von Schönemann bewiesene "Scholzsche Reziprozitätsgesetz" wurde erst von Emma Lehmer (sh. [163]) wiederentdeckt und dann bei Scholz gefunden, und hat eine Flut von Untersuchungen über Potenzrestcharaktere von Einheiten ausgelöst. Die Scholzsche Verallgemeinerung dieses Gesetzes auf Primzahlen $\ell > 2$ hat dagegen in der Literatur bisher keine Rolle gespielt.
- Die Scholzsche Theorie der Knoten wurde von Jehne [147] modern aufbereitet (nachdem Tate den Kernsatz in kohomologischer Form wiederentdeckt hatte) und danach von vielen Autoren weiterentwickelt.
- Teile der Arbeit von Scholz & Taussky [S17] wurden von Heider & Schmithals [129] in moderner Form dargestellt.
- Die von Scholz im Zusammenhang mit seinen Knoten entwickelte Theorie der abelschen Durchkreuzung wurde von Heider [127] (vgl. auch Steinke [306, § 2]) mit modernen Hilfsmitteln entwickelt.

Für andere Arbeiten von Scholz stehen ähnliche Untersuchungen noch aus; selbst was die Knotentheorie anbelangt ist Jehnes Arbeit nur ein erster Schritt in Richtung auf eine anständige „Übersetzung" der Scholzschen Arbeit: seit Jehne wissen wir zwar, was Scholz bewiesen hat, aber dessen Beweise sind bis heute unverstanden geblieben.

Im Folgenden wollen wir die wichtigsten Stationen im Leben und Werk von Arnold Scholz chronologisch durchgehen.

1927

Scholz hat zusammen mit seinem ehemaligen Lehrer Friedrich Neiß und seinem Kommilitonen Klaus Müller Hasses Klassenkörperbericht studiert und macht Hasse in seinem ersten Brief vom 22.04.1927 Vorschläge zur Vereinfachung einzelner Beweise, die schließlich zu seiner zusammen mit Hasse verfassten Arbeit [S1] führen. Die wesentlichen Beiträge von Scholz sind die folgenden: er hat gesehen, dass man, ausgehend von der Takagischen Definition des Klassenkörpers, direkt und schnell zeigen kann,

- dass Klassenkörper notwendig galoissch sind und eine Galoisgruppe besitzen, deren sämtliche Untergruppen Normalteiler sind;
- dass Klassenkörper einfache, wie man heute sagen würde, funktorielle Eigenschaften besitzen: ist $L/K/k$ ein Turm von Körpererweiterungen und ist L/k ein Klassenkörper, dann auch L/K und K/k.

Die Beweise sind analytischer Natur und nutzen ganz wesentlich den Pol der Dedekindschen Zetafunktion bei $s = 1$ aus. Mit etwas Gruppentheorie erhält man aus diesen Aussagen leicht einen Beweis dafür, dass Klassenkörper

abelsche Erweiterungen sind. Einige der Scholzschen Ideen aus dem Jahre 1927 werden erst später in der Arbeit [S10] veröffentlicht.

Am 23. April fährt Scholz nach Wien und bleibt dort bis September, um sich bei Furtwängler in das Thema seiner Dissertation einzuarbeiten, der Konstruktion von Körpererweiterungen mit vorgegebener auflösbarer Galoisgruppe mit Hilfe der Klassenkörpertheorie. Später beginnen sich auch andere für dieses Thema zu interessieren, insbesondere Richter [269, 270], Reichardt [261], und Tannaka [314]. Definitive Ergebnisse hat erst viel später Shafarevich [295] erhalten, der auf den Scholzschen Ideen aufbaute.

Um die Grundidee von Scholz zu erklären, wollen wir seine Konstruktion an einigen sehr einfachen Beispielen durchführen.

Diedererweiterungen vom Grad 8

Sei

$$G = D_4 = \langle S, T : S^4 = T^2 = 1, TST = S^{-1} \rangle$$

die Diedergruppe der Ordnung 8. Die Konstruktion von Erweiterungen $K/\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq D_4$ ist natürlich kein Problem, zu dessen Lösung man Klassenkörpertheorie verwenden müsste; uns geht es darum zu erklären, wie die Scholzsche Konstruktion in einem solchen einfachen Beispiel aussieht.

Scholz konstruiert derartige zweistufige Erweiterungen in zwei abelschen Schritten; im vorliegenden Fall gibt es dazu drei Möglichkeiten:

a) man setzt auf die biquadratische Erweiterung $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n}\,)$ eine geeignete quadratische Erweiterung K/k;

b) man konstruiert K als geeignete biquadratische Erweiterung eines quadratischen Teilkörpers;

c) man konstruiert K als zyklische Erweiterung K/k vierten Grades über einem quadratischen Teilkörper $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m}\,)$.

Wir wollen hier zuerst die dritte Variante wählen; um die Galoisgruppe der Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ genau beschreiben zu können, wollen wir in jedem Schritt die erzeugenden Substitutionen als Trägheitssubstitutionen geeigneter Primideale realisieren, und dazu ist es hilfreich, wenn in jedem Schritt genau ein Primideal verzweigt. Im vorliegenden Fall wählen wir eine quadratische Erweiterung $k/\mathbb{Q}$, in welcher genau eine Primzahl p verzweigt. Nach dem Satz von Kronecker-Weber sind diese Körper die quadratischen Teilkörper des Körpers der p-ten Einheitswurzeln; damit der quadratische Teilkörper an den unendlichen Stellen nicht verzweigt (was für die Fortführung der Konstruktion eine zusätzliche Schwierigkeit bedeuten würde), müssen wir $p \equiv 1 \bmod 4$ wählen (alternativ: die Einheit -1 im Grundkörper soll quadratischer Rest modulo p sein; auf derartige Bedingungen werden wir noch des öfteren stoßen). Damit ist $k = \mathbb{Q}(\sqrt{p}\,)$ ein reellquadratischer Teilkörper, dessen Galoisgruppe vom Frobeniusautomorphismus T des Primideals $(\sqrt{p}\,)$ erzeugt wird.

Jetzt geht es an die Konstruktion der zyklischen Erweiterung K/k. Damit T auch in $K/\mathbb{Q}$ die Ordnung 2 behält, werden wir K so wählen, dass die Primzahl p in K/k nicht weiter verzweigt; dann wird die Trägheitsgruppe von p in $K/\mathbb{Q}$ weiterhin Ordnung 2 besitzen und von einem Element $\widetilde{T}$ der Ordnung 2 erzeugt werden, dessen Einschränkung auf k gleich T ist. Wir werden im Folgenden wie Scholz zwischen $\widetilde{T}$ und T keinen notationellen Unterschied machen.

Die Konstruktion einer zyklischen Erweiterung K/k mit Hilfe der Klassenkörpertheorie ließe sich durchaus auch direkt durchführen; in jedem Fall genügt es nicht, zyklische Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ nach k hochzuheben, da die Galoisgruppe einer solchen Erweiterung notwendig abelsch wäre. Um sicherzustellen, dass die zyklische Erweiterung K/k nicht von einer zyklischen Erweiterung $F/\mathbb{Q}$ kommt, geht Scholz den Weg über die Konstruktion einer Erweiterung $L/\mathbb{Q}$, deren Galoisgruppe das Kranzprodukt (bei Scholz heißt diese Konstruktion, wie wir weiter unten sehen werden, eine Dispositionsgruppe)

$$\begin{aligned} \Gamma = C_4 \wr C_2 = \langle S_1, S_2, T : S_1^4 = S_2^4 = T^2 = 1, \\ S_1 S_2 = S_2 S_1, T S_1 T = S_2, T S_2 T = S_1 \rangle \end{aligned} \tag{1}$$

ist; hier wie im Folgenden bezeichnen wir mit C_m die zyklische Gruppe der Ordnung m. Auch in diesem Fall wird die Konstruktion so ausgeführt, dass in den zyklischen Basiserweiterungen genau ein Primideal verzweigt. Führt man in Γ die zusätzliche Relation $S_1 = S_2$ (bzw. $S_1 = S_2^{-1}$) ein, bildet also die Faktorgruppe $\Gamma/\langle S_1 S_2^{-1}\rangle$ (bzw. $\Gamma/\langle S_1 S_2\rangle$), dann ist der Fixkörper K des Normalteilers $\langle S_1 S_2^{-1}\rangle$ (bzw. $\langle S_1 S_2\rangle$) eine zyklische Erweiterung von k, in der zwei Primideale verzweigen, und zwar ist im ersten Fall $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq C_2 \times C_4$, im zweiten $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq D_4$ (das Hasse-Diagramm in Abb. 1.1 enthält bei weitem nicht alle Teilkörper bzw. Untergruppen).

Scholz will also eine zyklische Erweiterung K_1/k konstruieren, die über k zu einer zyklischen Erweiterung K_2/k konjugiert ist mit $K_1 \cap K_2 = k$. Diese Situation liegt automatisch vor, wenn K_1/k eine zyklische Erweiterung ist, deren Führer $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{q}$ ein Primideal vom Grad 1 ist; nach der Klassenkörpertheorie wird dann der entsprechende Klassenkörper K_2 zum Führer $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{q}^T$ ebenfalls zyklisch der Ordnung 4 und über k zu K_1 disjunkt sein.

Um den Klassenkörper K_1/k zu konstruieren, wählen wir also eine Primzahl q, die in $k/\mathbb{Q}$ zerlegt ist: $q\mathcal{O}_k = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$. Die Strahlkassenzahl einer Erweiterung mit dem Führer $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{q}_1$ ist

$$h_k(\mathfrak{q}_1) = h_k \cdot \frac{\Phi(\mathfrak{q}_1)}{(E : E^{(1)})},$$

wobei h_k die Klassenzahl von k, $\Phi(\mathfrak{q}_1) = q - 1$ die Anzahl der zu $\mathfrak{q}_1$ primen Restklassen in k, $E = \langle -1, \varepsilon_p \rangle$ die Einheitengruppe von k und $E^{(1)}$ die Untergruppe aller Einheiten $\varepsilon \equiv 1 \bmod \mathfrak{q}_1$ bezeichnen.

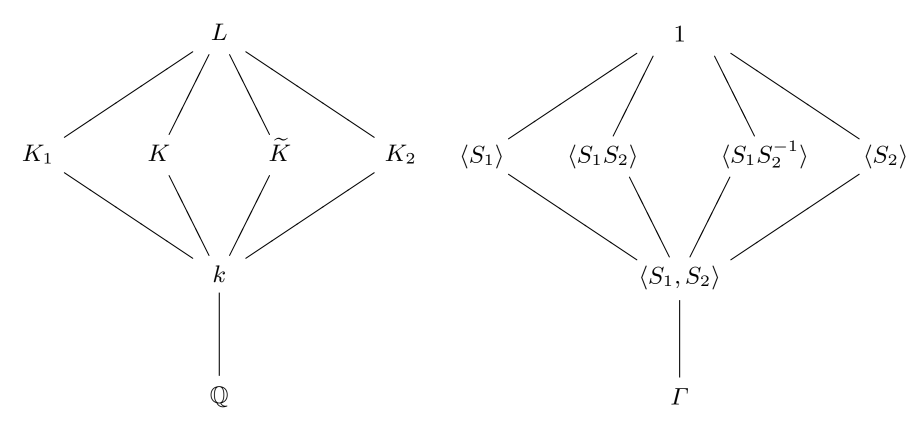


Abb. 1.1. Erweiterung mit Kranzprodukt $C_4 \wr C_2$

Die Mindestanforderung an q ist daher, dass diese Strahlklassenzahl durch 4 teilbar ist. Dazu muss erstens $q-1$ ein Vielfaches von 4 sein, und damit $E^{(1)}$ einen durch 4 teilbaren Index in E hat, müssen -1 und die Fundamentaleinheit ε_p quadratische Reste modulo $\mathfrak{q}_1$ sein. Wenn wir $q \equiv 1 \bmod 4$ wählen, ist $q-1$ Vielfaches von 4 und -1 quadratischer Rest modulo $\mathfrak{q}_1$; die Frage, wann ε_p quadratischer Rest modulo $\mathfrak{q}_1$ ist, hat Scholz später in [S15] ausgiebig studiert. Die Existenz solcher Primzahlen q lässt sich leicht nachweisen: wir müssen q nur so wählen, dass diese Primzahl in der Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{-1}, \sqrt{\varepsilon_p}\,)$ voll zerlegt ist, was nach klassischen Dichtigkeitssätzen (Kronecker, Frobenius, später Tschebotareff) immer möglich ist.

Wir haben nun durch diese Wahl von q eine zyklische Erweiterung K_1/k vom Grad 4 gewonnen, in der höchstens das Primideal über $\mathfrak{q}_1$ verzweigt. Im vorliegenden Fall *muss* dieses Primideal sogar verzweigen, weil k keine quadratischen unverzweigten Erweiterungen besitzt. Sei also K_1 die zyklische Teilerweiterung 4. Grades im Strahlklassenkörper von k modulo $\mathfrak{q}_1$, und S_1 die Trägheitssubstitution von $\mathfrak{q}_1$; dann ist $S_1^4 = 1$, und nach Artin ist auch die über k zu K_1/k konjugierte Erweiterung K_2/k zyklisch, ihre Galoisgruppe wird von der Trägheitssubstitution S_2 von $\mathfrak{q}_2$ erzeugt, und das Kompositum $L = K_1K_2$ besitzt Galoisgruppe in (1).

Die gesuchte Diedererweiterung erhält man, wenn man in (1) $S_1 = S_2^{-1}$ setzt, also die Faktorgruppe von Γ nach $\langle S_1S_2\rangle$ betrachtet: dieser Normalteiler wird dann eine Diedererweiterung $K/\mathbb{Q}$ festlassen, die über dem quadratischen Teilkörper $k = \mathbb{Q}(\sqrt{p}\,)$ zyklisch ist; in K/k werden dann genau die beiden Primideale über q verzweigen.

Wir sehen jetzt auch, dass die Konstruktion einer Diedererweiterung nach der zweiten Methode viel einfacher gewesen wäre, da ja die Diedergruppe D_4 isomorph zum Kranzprodukt $C_2 \wr C_2$ ist und wir daher nur eine Erweiterung eines quadratischen Zahlkörpers als Teilkörper des Strahlklassenkörpers modulo einem primären Primideal konstruieren müssen.

Das Problem der Verzweigung

Bei unserer obigen Konstruktion einer Diedererweiterung haben wir an einer Stelle insofern etwas Glück gehabt, als der Grundkörper $k = \mathbb{Q}(\sqrt{p}\,)$ ungerade Klassenzahl besitzt. Im allgemeinen können wir nicht davon ausgehen, dass unser Grundkörper derartigen arithmetischen Voraussetzungen genügt. Diese Tatsache führt auf Probleme, die wir wieder an einem sehr einfachen Beispiel illustrieren wollen.

Sei k ein von $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}\,)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$ verschiedener imaginärquadratischer Zahlkörper und $p > 2$ eine Primzahl, die in k zerlegt ist: $p\mathcal{O}_k = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. Die Strahlklassenzahl von k modulo $\mathfrak{p}$ ist dann

$$h_k\{\mathfrak{p}\} = h_k \cdot \frac{p-1}{2}.$$

Die Klassenzahl h_k ist genau dann gerade, wenn es unverzweigte quadratische Erweiterungen von k gibt. Für die Existenz einer quadratischen genau bei $\mathfrak{p}$ verzweigten Erweiterung ist es dagegen notwendig, dass $p \equiv 1 \bmod 4$ ist. Diese Bedingung ist aber in der Regel hinreichend: für das Primideal $\mathfrak{p} = (3 + 2\sqrt{-5}\,)$ mit Norm 29 im quadratischen Zahlkörper $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-5}\,)$ der Klassenzahl $h_k = 2$ ist zwar $h_k\{\mathfrak{p}\} = 28 \equiv 0 \bmod 4$, aber der Teilkörper 4. Grades des Strahlklassenkörpers modulo $\mathfrak{p}$ besteht aus der unverzweigten Erweiterung $K = k(i)$, dem Hilbertklassenkörper, und einer diesem aufgesetzten quadratischen Erweiterung $L = K\big(\sqrt{(1+2i)(3+2\sqrt{-5}\,)}\big)$, in welcher $\mathfrak{p}$ verzweigt. Es gibt allerdings keine quadratische, nur über $\mathfrak{p}$ verzweigte Erweiterung von k; die „üblichen Verdächtigen" wie $k(\sqrt{\pm 3 + 2\sqrt{5}}\,)$ sind nämlich auch über dem Primideal über der 2 verzweigt.

Hat man daher in einem gegebenen Grundkörper k also ein Primideal $\mathfrak{p}$ gefunden, für welches die Strahlklassenzahl $h_k(\mathfrak{p})$ durch ℓ teilbar ist, so gibt es eine zyklische Erweiterung K/k vom Grad ℓ, in welchem höchstens $\mathfrak{p}$ verzweigt; allerdings kann diese Erweiterung auch unverzweigt sein, was bei der Fortführung der Konstruktion zu unüberwindlichen Problemen führt, weil man über die dazugehörigen Automorphismen wenig sagen kann, hängen sie doch mit dem Verhalten der entsprechenden Idealklassen in Erweiterungen zusammen. Wenn man $\mathfrak{p}$ so wählt, dass $h_k(\mathfrak{p})/h(k)$ durch ℓ teilbar ist, dann gibt es zwar eine genau über $\mathfrak{p}$ verzweigte Erweiterung F/H des Hilbertklassenkörpers H von k, aber in der Regel kann diese Erweiterung nicht nach unten gezogen werden, außer wenn die Strahlklassengruppe das *direkte Produkt* der Idealklassengruppe und einer Gruppe mit durch ℓ teilbarer Ordnung ist. Zusammen mit Furtwängler findet Scholz heraus, wie man diese Zerfällung der Strahlklassengruppe durch geschickte Wahl des Primideals $\mathfrak{p}$ bewerkstelligen kann.

Sei dazu K ein Zahlkörper, der eine primitive ℓ-te Einheitswurzel ζ enthält (das Folgende gilt auch allgemeiner für Einheitswurzeln von Primzahlpotenzgrad); ein Primideal $\mathfrak{p}$ heißt ℓ-primär, wenn es zu ℓ teilerfremd ist, und wenn

$(\omega/\mathfrak{p})_\ell = 1$ ist für alle singulären $\omega \in F \setminus (1-\zeta)$, also alle Elemente ω teilerfremd zu ℓ, die ℓ-te Idealpotenzen sind: $(\omega) = \mathfrak{a}^\ell$. In Körpern mit zu ℓ teilerfremder Klassenzahl ist $\mathfrak{p}$ genau dann ℓ-primär, wenn jede Einheit ℓ-ter Potenzrest modulo $\mathfrak{p}$ ist. Der Frobeniussche Dichtigkeitssatz garantiert die Existenz solcher Primideale.

Scholz stellt fest, dass er den Begriff des primären Primideals auch in Zahlkörpern verwenden kann, welche die entsprechenden Einheitswurzeln nicht enthalten: er nennt ein Primideal $\mathfrak{p}$ in K *primär* modulo ℓ^h, wenn $N\mathfrak{p} \equiv 1 \bmod \ell^h$ gilt und alle Zahlen aus K, die ℓ^h-te Idealpotenzen sind, auch ℓ^h-te Potenzreste modulo $\mathfrak{p}$ sind.

Im Falle $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-5}\,)$ ist das Primideal $\mathfrak{p}$ über der 29 nicht 2-primär, weil die singuläre Zahl $\omega = (2 + \sqrt{-5}\,)$ quadratischer Nichtrest modulo $\mathfrak{p}$ ist. Das Primideal $\mathfrak{q} = (-3 + 4\sqrt{-5}\,)$ der Norm 89 dagegen ist 2-primär; wegen $N\mathfrak{q} \equiv 1 \bmod 4$ ist $(\frac{-1}{\mathfrak{q}}) = +1$, während wegen $4\sqrt{-5} \equiv 3 \bmod \mathfrak{q}$ auch $2 + \sqrt{-5} \equiv \frac{1}{4}(8 + 4\sqrt{-5}\,) \equiv \frac{11}{4} \equiv 25 \bmod \mathfrak{q}$ und damit sicherlich $(\frac{2+\sqrt{-5}}{\mathfrak{q}}) = +1$ ist. In der Tat ist $k(\sqrt{-3 + 4\sqrt{-5}}\,)$ eine quadratische Erweiterung, in welcher genau das Primideal $\mathfrak{q}$ verzweigt.

Für ein modulo ℓ^h primäres Primideal $\mathfrak{p}$ betrachte man nun die Idealgruppe $\mathcal{H}$ aller zu $\mathfrak{p}$ primen Ideale $\mathfrak{a}$ in k, für die eine m-te Potenz mit $\ell \nmid m$ gleich einem von einem ℓ^h-ten Potenzrest α erzeugten Hauptideal ist: $\mathfrak{a}^m = (\alpha)$ mit $(\alpha/\mathfrak{p})_{\ell^h} = 1$. Diese letzte Bedingung hängt nicht von der Wahl von α ab, weil jede Einheit ℓ^h-ten Potenzrest modulo $\mathfrak{p}$ ist. Bezeichnet man mit D_k die Gruppe aller zu $\mathfrak{p}$ teilerfremden Ideale, so ist $\mathrm{Cl}_\ell\{\mathfrak{p}\} = D_k/\mathcal{H}$ eine endliche ℓ-Gruppe, welche die ℓ-Klassengruppe als Faktorgruppe besitzt. Genauer zeigt Scholz, dass bei der Wahl von $\mathfrak{p}$ als primärem Primideal immer $\mathrm{Cl}_\ell\{\mathfrak{p}\} \simeq \mathrm{Cl}_\ell(k) \times A$ ist; der zu der Faktorgruppe $D_k/\mathrm{Cl}_\ell(k)$ gehörige Klassenkörper ist das, was Scholz einen *Restkörper* nennt, also eine rein verzweigte zyklische Erweiterung vom Grad ℓ^h, in welcher das Primideal $\mathfrak{p}$ und nur dieses rein verzweigt.

Dispositionsgruppen

Ist G eine auflösbare Gruppe, so kann man Erweiterungen mit Galoisgruppe G schrittweise in abelschen Schritten erreichen. Scholz hat erkannt, dass es zur Konstruktion dieser abelschenn Erweiterungen genügt, zwei Arten von Gruppen zu betrachten: abelsche p-Gruppen und „Dispositionsgruppen". In [S2] behandelt Scholz „zweistufige Dispositionsgruppen" G; das sind Gruppen, welche die beiden folgenden Eigenschaften besitzen:

1. G enthält eine abelsche Untergruppe A derart, dass G/A abelsch ist;

2. A enthält ein Element a derart, dass die Elemente a^σ eine Basis von A bilden, wenn σ durch ein Repräsentatensystem von G/A läuft.

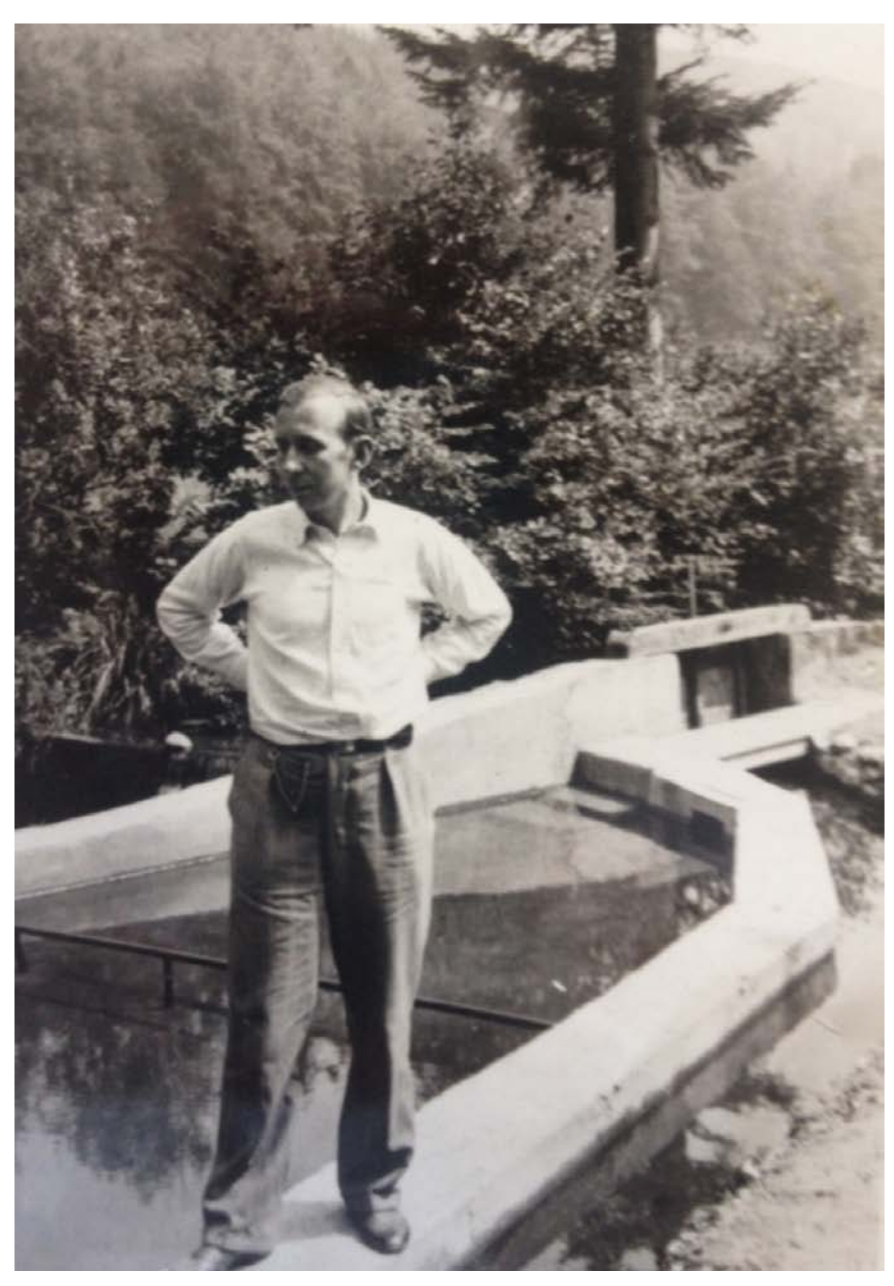


Abb. 1.2. Arnold Scholz

Im heutigen Sprachgebrauch ist die zweistufige Dispositionsgruppe also einfach das Kranzprodukt $C_m \wr N$, wo $C_m \simeq \langle a \rangle$ und $N = G/A$ ist. Die einfachsten Beispiele für Kranzprodukte sind die Diedergruppe $D_4 \simeq C_2 \wr C_2$ und die alternierende Gruppe $A_4 = C_2 \wr C_3$. Für zweistufige Dispositionsgruppen kann Scholz die schrittweise Konstruktion mit jeweils einem verzweigten Primideal realisieren.

Nichtabelsche Erweiterungen vom Grad *pq*

Seien p und $q \equiv 1 \bmod p$ zwei Primzahlen. Dann gibt es eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq, nämlich

$$\Gamma = \langle S, T : S^p = T^q = 1, S^{-1}TS = A^r \rangle,$$

wobei $r^p \equiv 1 \bmod q$ und $r \not\equiv 1 \bmod q$ ist. Nach unseren Vorüberlegungen im Falle der Diedergruppe sollte das Vorgehen nun klar sein: man konstruiert eine zyklische Erweiterung $k/\mathbb{Q}$ von Primzahlgrad p als Teilerweiterung des Körpers der ℓ-ten Einheitswurzeln, wo $\ell \equiv 1 \bmod p$ prim ist. Dann wählt man ein q-primäres Primideal $\mathfrak{q}$ in k und konstruiert eine zyklische Erweiterung von Primzahlgrad q mit Führer $\mathfrak{q}$; der normale Abschluss dieser Erweiterung hat dann Galoisgruppe $C_q \wr C_p$. Die gesuchte Erweiterung mit Galoisgruppe Γ erhält man dann durch geschickte Faktorgruppenbildung.

Scholz zeigt in [S2], wie man die Erweiterung mit Galoisgruppe Γ auch ohne den Umweg über das Kranzprodukt konstruieren kann. Dazu führt er auf [S2, S. 353 unten] erstmals den Begriff der $S-1$-ten Potenzreste ein, der in einer Vielzahl seiner Arbeiten eine ganz zentrale Rolle spielt, aber bis heute kaum beachtet wurde. Scholz betrachtet dazu einen Zahlkörper K, der eine primitive ℓ-te Einheitswurzel ζ enthält, und nennt $\alpha \in \mathcal{O}_K$ einen $(\ell, S-a)$-ten Potenzrest modulo einem Primideal $\mathfrak{p}$ (hierbei nehmen wir stillschweigend an, dass $\mathfrak{p}$ kein Teiler von ℓ, und dass α teilerfremd zu $\mathfrak{p}\ell$ ist), wenn

$$\alpha \equiv \beta^{S-a}\gamma^\ell \bmod \mathfrak{p}$$

ist. Allgemeiner kann man für jedes Element $\Lambda \in \mathbb{Z}[G]$, wo $\mathbb{Z}[G]$ den Gruppenring der Galoisgruppe von $K/\mathbb{Q}$ bezeichnet, ein $\alpha \in \mathcal{O}_K$ einen (ℓ, Λ)-ten Potenzrest modulo $\mathfrak{p}$ nennen, wenn

$$\alpha \equiv \beta^{\Lambda}\gamma^\ell \bmod \mathfrak{p}$$

gilt. Scholz wendet diesen Begriff in seinen Arbeiten vor allem auf $\Lambda = (S-1)^2$ an.

Im vorliegenden Fall geht es darum, eine Erweiterung L/K mit Galoisgruppe Γ auf eine zyklische Erweiterung vom Grad p aufzusetzen. Dazu beachtet Scholz, dass die symbolische Ordnung $\mathfrak{M} = \mathrm{Ann}(A)$, also der Annihilator von A im Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$, im vorliegenden Fall gleich $\mathfrak{M} = (q, S-r)$ ist und dieses Ideal wiederum ein Teiler von $(q, S^p - 1)$. Wie oben wählt

Scholz ein q-primäres Primideal $\mathfrak{q}$, konstruiert aber nicht eine Erweiterung mit der ganzen Dispositionsgruppe $C_q \wr C_p$ als Restkörper nach einer Idealgruppe, deren Zahlideale aus den q-ten Potenzresten modulo $\mathfrak{q}$ bestehen, sondern nimmt zur Idealgruppe alle $(q, S-a)$-ten Potenzen hinzu.

Im Laufe der Jahre hat sich eine gruppentheoretische Sprache herauskristallisiert, die uns erlaubt, das Scholzsche Hauptresultat der Arbeit [S2] kurz und prägnant wie folgt auszudrücken: ist eine Körpererweiterung K/k mit Galoisgruppe G gegeben, und wird das Einbettungsproblem betrachtet, in welchem eine Erweiterung L/K gesucht wird mit $\mathrm{Gal}(L/k) = \Gamma$ und $\mathrm{Gal}(L/K) = N$, dann ist dieses Einbettungsproblem immer lösbar, wenn die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

zerfällt.

Von den vielen kleineren Sätzchen, die im Text von [S2] verstreut sind, erwähnen wir nur eines: ist K/k normal mit Galoisgruppe G und ist L/K Klassenkörper zur Idealgruppe H, dann ist K/k normal genau dann, wenn H bei der Anwendung aller $\sigma \in G$ fest bleibt.

Nach seiner Rückkehr nach Berlin befasst sich Scholz mit kubischen Zahlkörpern vorgegebener Diskriminante und der damit verwandten Suche nach quadratischen Zahlkörpern, deren 3-Klassengruppe einen Rang ≥ 2 besitzen. Diese Untersuchungen werden später in die gemeinsame Arbeit mit Taussky über das Kapitulationsproblem einfließen.

1928

Im Februar vollendet Scholz seine Dissertation über die Konstruktion von Erweiterungen K/K_0 eines gegebenen Zahlkörpers K_0, deren Galoisgruppe eine „Dispositionsgruppe“ ist. Jetzt befasst er sich mit der gruppentheoretischen Frage, für welche anderen Gruppen man das inverse Galoisproblem lösen muss, damit man alle auflösbaren endlichen Gruppen in den Griff bekommt.

Am 1. April tritt Scholz in Berlin seine Assistentenstelle bei Erhard Schmidt an. Im August beginnt Scholz, die Einheiten- und Idealklassengruppe von Zahlkörpern $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}\,)$ für Primzahlen $p \equiv q \equiv 1 \bmod 4$ zu untersuchen, was ihn letztendlich zu Fragen der Lösbarkeit der Nicht-Pellschen Gleichung $t^2 - pqu^2 = -4$, zum „Scholzschen Reziprozitätsgesetz“, und auch zu seinem Gegenbeispiel für die Vermutung führen wird, dass das Lokal-Global-Prinzip für Normen auch in nichtzyklischen Erweiterungen von Zahlkörpern gilt.

Die entsprechenden Untersuchungen von Komposita zyklischer Körper von Primzahlgrad ℓ führt ihn auf die Entdeckung, dass es beliebig hohe Klassenkörpertürme gibt.

1929

Im Jahre 1929 promoviert Scholz in Berlin bei Schur über das von ihm selbst gewählte Thema der Konstruktion von Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ mit vorgegebener Galoisgruppe ([S2]). Das „inverse Galoisproblem“ bleibt für Scholz ein zentrales Thema, auf dem er sich zwischen Klassenkörpertheorie auf der einen und Gruppentheorie auf der andern Seite hin und her bewegt ([S3, S4]). In [S3] zeigt Scholz, dass sich die Konstruktion von Zahlkörpern mit beliebiger zweistufiger Galoisgruppe zurückführen lässt auf diejenige von Erweiterungen, deren Galoisgruppe eine Dispositionsgruppe oder eine Zweiggruppe ist. Zweiggruppen sind dabei eine Familie von in gewissem Sinne maximalen p-Gruppen, die alle p-Gruppen als Faktorgruppe enthalten.

Zweiggruppen

Eine zweistufige Zweiggruppe vom Typ $(\ell^{h_1}, \dots, \ell^{h_m}; \ell^k)$ definiert Scholz als eine metabelsche ℓ-Gruppe G mit Kommutatorgruppe A und folgenden Eigenschaften:

1. G/A hat eine Basis $S_1A, \dots, S_mA$.
2. $\operatorname{ord}(S_\mu) = \operatorname{ord}(S_\mu A) = \ell^{h_\mu}$ für $\mu = 1, \dots, m$. Insbesondere haben die von den S_μ erzeugten zyklischen Gruppen nur das Einselement mit A gemein.
3. Zwischen den Kommutatoren $a_{\mu\nu} = [S_\nu, S_\mu]$ mit $\mu < \nu$ existieren nur die Relationen, die aus ihrer Definition folgen:
$$a_{\lambda\mu}^{S_\kappa - 1} a_{\mu\kappa}^{S_\lambda - 1} a_{\kappa\lambda}^{S_\mu - 1} = 1$$
und
$$a_{\kappa\lambda}^{f_\kappa} = a_{\kappa\lambda}^{f_\lambda} = 1,$$
wo $f_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\ell^{h_\nu}-1} S_\nu^\lambda$ ist. Insbesondere hat $a_{\mu\nu}$ die symbolische Ordnung
$$\mathfrak{N}_{\mu\nu}^{(k)} = \Big(\ell^k, \frac{S_\mu^{\ell^{h_\mu}} - 1}{S_\mu - 1}, \frac{S_\nu^{\ell^{h_\nu}} - 1}{S_\nu - 1}, \dots, S_\rho^{\ell^{h_\rho}} - 1, \dots (\rho \neq \mu, \nu)\Big).$$

In [S3] hat Scholz bewiesen, dass jede zweistufige metabelsche ℓ-Gruppe mit m Erzeugenden und Kommutatoren $a_{\mu\nu}$, deren Ordnung ℓ^k teilen, eine Faktorgruppe einer solchen Zweiggruppe ist.

Die einfachste Zweiggruppe hat den Typ $(2, 2; 2^k)$. Hier wird G von zwei Elementen S_1 und S_2 der Ordnung 2 erzeugt und ist daher eine Diedergruppe; der Kommutator $a = [S_1, S_2]$ hat Ordnung 2^k und erzeugt die zyklische Gruppe $A = G'$, und es gilt $G/A \simeq (2, 2)$.

Scholz in Freiburg

Nach der Promotion geht Scholz im April 1929 (und nicht erst 1930, wie Taussky in ihrem Nachruf schreibt) nach Freiburg (vgl. Remmert [268]); dort folgt er Baer (dieser war zu Hasse nach Halle gegangen) als Assistent Loewys nach und trifft auf Zermelo, der sich für die Grundlagen der Mathematik und die Mengenlehre interessierte.

Alfred Loewy wurde am 20. Juni 1873 in Rawitsch bei Posen geboren und stammt aus einer streng orthodoxen jüdischen Familie. Er studiert in Breslau, München, Berlin und Göttingen und promoviert 1894 bei Lindemann in München. 1897 wird er in Freiburg habilitiert, 1902 außerordentlicher und 1919 ordentlicher Professor, als Nachfolger von Stickelberger. 1916 erblindet Loewy auf einem Auge, eine misslungene Operation 1928 kostet ihn auch das zweite. Sein Doktorand Krull (Promotion 1921) führt in Freiburg die moderne Algebra im Sinne Emmy Noethers ein. Ein weiterer Doktorand Loewys, nämlich F.K. Schmidt, erhält nach der Promotion eine auf Antrag von Heffter und Loewy geschaffene Assistentenstelle; als dessen Nachfolger holt Loewy 1926 Reinhold Baer nach Freiburg, und nach dessen Habilitation geht die Stelle an Arnold Scholz.

1933 wird Loewy von den Nationalsozialisten zwangspensioniert; weil der Erlass vom April 1933 zeitweilig ausgesetzt wird, kann Loewy im Sommersemester 1933 noch eine Vorlesung halten. Bemühungen von seiten Heffters, für Loewy eine Ausnahmegenehmigung zu erhalten, scheitern ebenso wie anderswo ähnliche Aktionen für unter anderen Emmy Noether, Issai Schur, und Edmund Landau. Loewys Nachfolge wird von Doetsch geregelt; da Algebra und Zahlentheorie „eine völlig abstrakte Richtung eingeschlagen“ hätten, und zwar „unter starker Beeinflussung von jüdischer Seite“, soll ein Geometer berufen werden. Die Wahl fällt auf Wilhelm Süss, der mit seinem diplomatischem Geschick das nationalsozialistische Moment für seine eigenen Zwecke zu nutzen versteht wie wenige andere. Mit dem Weggang von Scholz aus Freiburg ist die Algebra dort gestorben; Loewy schreibt sein Buch „Blinde große Männer“, für das er im nationalsozialistischen Deutschland keinen Verleger findet: das Buch erscheint posthum in Zürich. Loewy stirbt am 25. Januar 1935 nach einer Operation in Freiburg; an seiner Beisetzung nehmen, wie Heffter schreibt, neben einigen seiner mathematischen Kollegen nur er und Hans Spemann[3] teil. Seine Frau folgte ihm wenige Jahre später durch Selbstmord.

Ernst Zermelo wurde am 27. Juli 1871 in Berlin geboren. Nach Studien in Berlin, Halle und Freiburg promovierte er 1894 in Berlin mit einem Thema aus der Variationsrechnung. 1897 wird er in Göttingen habilitiert und erlangt 1904 mit der Klärung des Auswahlaxioms Berühmtheit, was ihm 1905 eine Professur in Göttingen einbringt. 1910 nimmt er eine Professur in Zürich an,

[3] Hans Spemann (1869–1941) war Biologe, von 1919 bis zu seiner Emeritierung 1937 in Freiburg, von 1923 bis 1924 Rektor. Er erhielt 1935 den Nobelpreis für Medizin.

die er 1916 aus gesundheitlichen Gründen aufgibt und in den Schwarzwald zieht. 1926 erhält er auf Antrag von Heffter und Loewy eine Ehrenprofessur in Freiburg, die er bis zu seiner Denunziation 1935 durch Doetschs Assistenten Eugen Schlotter (den vollständigen Wortlaut dieser Denunziation sollte man in [72, SS. 296–297] nachlesen.) innehat. Während ihrer gemeinsamen Zeit in Freiburg wird Arnold Scholz der engste Freund Zermelos bis zum Tod von Scholz im Jahre 1942, der Zermelo tief trifft. Zermelo stirbt am 21. Mai 1953 in Freiburg. Für Zermelos Leben und Werk werfe man einen Blick in [72].

Scholz beweist in [S5], dass es Klassenkörpertürme mit beliebig großer Länge gibt. Hilbert hatte Ende des 19. Jahrunderts (in [134, 135, 136]) noch vermutet, dass die Klassenzahl des Hilbertschen Klassenkörpers von Zahlkörpern mit Klassenzahl 4 immer ungerade ist. Dies konnte Furtwängler 1916 in [86] durch Gegenbeispiele widerlegen; seither hatte sich in dieser Frage dann aber nichts mehr getan. Scholz gelang nun der Nachweis, dass ein zyklischer Zahlkörper von Primzahlgrad ℓ einen ℓ-Klassenturm von vorgegebener Mindestlänge besitzt, wenn seine ℓ-Klassengruppe hinreichend großen Rang hat. Die endgültige Antwort auf die Frage nach unendlich großen Klassenkörpertürmen wurde erst von Golod und Schafarewitsch gegeben; Verfeinerungen der Frage sind auch heute noch Gegenstand zahlreicher Untersuchungen (Benjamin, Lemmermeyer, & Snyder [20, 21, 22, 23] Azizi et al. (sh. z.B. [14], [215]), Bartholdi [16], Bush [47, 48, 49], Hajir [107, 108], Kuhnt [160], Maire [181, 182], D. Mayer [188, 189, 190, 191]), McLeman [193], Nover [231], Steurer [307]. Auch die gruppentheoretische Seite dieses Themenkomplexes wurde ausgiebig untersucht (Magnus [180], Serre [293], Nebelung, [222]).

In [S5] kommt Scholz wieder auf die $S-1$-ten Potenzreste von Einheiten zu sprechen. Sei dazu S eine Erzeugende der Galoisgruppe der zyklischen Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ von Primzahlgrad ℓ, und sei $X = S - 1$. Wir erinnern daran, dass ein zu ℓ teilerfremdes $\alpha \in K^\times$ ein (ℓ, X^λ)-ter Potenzrest (mit $1 \le \lambda \le \ell$) modulo einem Primideal $\mathfrak{p}$ ist, wenn

$$\alpha \equiv \xi^{X^\lambda} \eta^\ell \bmod \mathfrak{p}$$

für Elemente $\xi, \eta \in K^\times$; wir wollen vereinbaren, dass wir in diesem Fall $[\alpha, p]_\lambda = 1$ schreiben, und $[\alpha, p]_\lambda \neq 1$ sonst.

Für $\lambda = \ell$ ist das Elemente $X^\lambda = (S-1)^\ell = \ell F_1(S)$ des Gruppenrings $\mathbb{Z}[G]$ ein Vielfaches von ℓ, also sind X^ℓ-te Potenzreste auch immer ℓ-te Potenzreste und umgekehrt. Daher liefert der Scholzsche Begriff der X^λ-ten Potenzreste eine Verfeinerung der Unterteilung in ℓ-te Potenzreste und Nichtreste. Im Falle $\ell = 3$ gibt es folgende Möglichkeiten:

1. $[\alpha, p]_1 \neq 1$;
2. $[\alpha, p]_1 = 1$, $[\alpha, p]_2 \neq 1$;
3. $[\alpha, p]_2 = 1$, $[\alpha, p]_3 \neq 1$;

4. $[\alpha/p]_3 = 1$.

Einheiten mit Norm +1 sind nach Hilberts Satz 90 X-te Potenzen, folglich ist $[\varepsilon, \mathfrak{p}]_1 = 1$ für alle Einheiten ε mit Norm 1. Weiter gilt das Scholzsche Lokal-Global-Prinzip:

Proposition 1. *Ist $[\varepsilon, \mathfrak{p}]_2 = 1$ für eine Einheit ε und alle Primideale $\mathfrak{p}$, dann ist $\pm\varepsilon = \eta^{X-1}$ für eine Einheit η.*

In der Tat: ist $[\varepsilon, \mathfrak{p}]_2 = 1$, dann ist ε^{S-1} eine dritte Potenz modulo jedem Primideal, also eine dritte Potenz einer Einheit: $\varepsilon^{S-1} = \eta_1^3$. Wegen $3 \sim (S-1)^2$ ist $\varepsilon^{S-1} = \eta_1^{(S-1)^2}$, also $\varepsilon = \eta^{S-1}\beta$ für ein β mit $\beta^{S-1} = 1$. Daraus folgt $\beta \in \mathbb{Q}$, und da ε und η Einheiten sind, muss $\beta = \pm 1$ sein.

Die Entscheidung, ob $[\varepsilon, p]_2 = 1$ ist oder nicht, kann durch Berechnung der kubischen Restsymbole modulo den drei Primidealen $\mathfrak{p}$ über p getroffen werden:

- Ist $[\varepsilon, p]_3 = 1$, dann ist $(\varepsilon, \mathfrak{p})_3 = 1$;
- Ist $[\varepsilon, p]_3 \neq 1$ aber $[\varepsilon, p]_2 = 1$, dann hat $(\varepsilon/\mathfrak{p})_3 = (\varepsilon/\mathfrak{p}')_3 = (\varepsilon/\mathfrak{p}'')_3$ denselben kubischen Restcharakter in bezug auf alle drei Primideale über p, und diese sind genau dann paarweise verschieden, wenn $[\varepsilon, p]_2 \neq 1$ ist.

Weiter beweist Scholz das folgende Reziprozitätsgesetz:

Satz 1. *Seien ℓ und $p \equiv q \equiv 1 \bmod \ell$ ungerade Primzahlen und ε_p bzw. ε_q Fundamentaleinheiten der Teilkörpern $K_p^\ell \subset \mathbb{Q}(\zeta_p)$ und $K_q^\ell \subset \mathbb{Q}(\zeta_q)$ vom Grad ℓ. Dann gilt $[\varepsilon_p, q]_2 = 1$ genau dann, wenn auch $[\varepsilon_q, p]_2 = 1$ ist.*

Im Falle $\ell = 2$ gilt ebenfalls $[\varepsilon_p, q]_2 = [\varepsilon_q, p]_2$, wenn man $p \equiv q \equiv 1 \bmod 4$ voraussetzt; in diesem Falle sind die quadratischen Teilkörper der Kreisteilungskörper reell und besitzen eine Fundamentaleinheit.

Der Teil des Reziprozitätsgesetzes, der sich auf den Fall $\ell = 2$ bezieht, wurde bereits von Schönemann [281] entdeckt.

Die Potenzrestcharaktere $[\varepsilon, p]_\ell$ stehen im engen Zusammenhang mit der Teilbarkeit der Klassenzahlen von $K_p^\ell K_q^\ell$ durch Potenzen von ℓ. In diesen Fragen ist das letzte Wort noch nicht gesprochen.

1930

In [S6] korrigiert Scholz ein Versehen in Furtwänglers Arbeit [88] über die Approximation reeller Zahlen durch rationale. Dieser ging von einem klassischen Resultat Dirichlets aus, wonach es zu jeder reellen Zahl α unendlich viele ganze Zahlen x, y gibt mit

$$\left|\frac{x}{y} - \alpha\right| < \frac{1}{y^2}.$$

Hurwitz zeigte, dass die Schranke auf der rechten Seite auf $\frac{1}{\sqrt{5}\,y^2}$ verbessert werden kann, und dass diese Schranke bestmöglich ist. Bereits hier kann man den Einfluss von Minimaldiskriminanten erkennen: die Konstante $\frac{1}{\sqrt{5}}$ im Satz von Hurwitz hängt damit zusammen, dass $D = 5$ die minimale Diskriminante eines reellquadratischen Zahlkörpers ist. Betrachtet man nur $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}(\sqrt{5}\,)$, lässt sich diese Schranke sogar auf $\frac{1}{\sqrt{8}}$ verbessern, und auch hier ist $D = 8$ die kleinste Diskriminante eines reellquadratischen Zahlkörpers mit Ausnahme von $\mathbb{Q}(\sqrt{5}\,)$.

Kronecker [157] verallgemeinerte den Dirichletschen Satz auf höhere Dimensionen: zu gegebenen reellen Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gibt es danach rationale Zahlen mit Nenner q derart, dass

$$\left|\alpha_\nu - \frac{p_\nu}{q}\right| < \frac{\delta}{q\sqrt[n]{q}}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ und $\delta = 1$ gilt. Minkowski [202, p. 112] gelang es, diese Schranke auf $\delta = \frac{n}{n+1}$ herabzudrücken.

In die andere Richtung konnte Borel [31] mit einem mengentheoretischen Existenzsatz zeigen, dass Kroneckers Approximationssatz nicht auf

$$\left|\alpha_\nu - \frac{p_\nu}{q}\right| < \frac{C}{q^{1+s}}$$

mit $s > \frac{1}{n}$ und irgendeiner Schranke $C > 0$ verbessert werden kann.

Perron [248] wiederum konnte Borels Resultat verallgemeinern: seien α_1, $\ldots$, α_n ganze algebraische Zahlen in einem reellen Zahlkörper K vom Grad $n+1$; wir nehmen an, dass es keine Beziehung der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \alpha_\nu - l = 0$$

mit rationalen $k_1, \ldots, k_n, l$ gibt außer der trivialen Gleichung mit $k_\nu = l = 0$. Weiter mögen $\alpha_\nu^{(\mu)}$ $(m = 1, \ldots, n+1)$ die Konjugierten von α_ν bezeichnen; wir setzen

$$\rho_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu^{(\mu)} - \alpha_\nu| \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

sowie

$$\sigma = \prod_{\mu=1}^{n} \rho_\mu.$$

Dann kann das System der n Ungleichungen

$$\left|\alpha_\nu - \frac{p_\nu}{q}\right| < \frac{\delta}{q\sqrt[n]{q}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo p_ν und $q > 0$ rationale Zahlen bezeichnen, nicht für unendlich viele Werte von q gelten sobald $\delta < \frac{1}{n\sigma}$ ist.

Perron gab das Thema der analogen Fragestellung über komplexen quadratischen Zahlkörpern seinem Studenten Hasan Aral, der darüber seine Doktorarbeit [3] schrieb; das Beispiel der durch die Gleichung $x^3 + 17x + 2\sqrt{-182} = 0$ definierten unverzweigten kubischen Erweiterung des quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-182})$ in dieser Dissertation hat übrigens Scholz beigesteuert (auch Neiß [225, S. 47] hat das Beispiel des quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-19\,677})$ mit 3-Klassengruppe vom Rang 2 von Scholz erhalten). Hasan Aral wurde am 25. März 1913 in Konya in der Türkei geboren; nach seinem Abitur erhielt er ein Stipendium der türkischen Regierung, welches ihm erlaubte, von 1932 bis 1933 am Gymnasium Lüben (ehemals Schlesien, heute Lubin; über dieses Gymnasium wurde eine Webseite *Türkische Gastschüler am Lübener Gymnasium* eingerichtet, von der diese Informationen stammen) in der Nähe von Liegnitz in Schlesien die deutsche Sprache zu lernen. Im Wintersemester 1934/35 schrieb er sich in Göttingen ein, um Mathematik zu studieren, und wechselte nach zwei Semestern nach München, wo er am 17.7.1939 bei Perron promovierte. Arals Dissertation wurde von Hofreiter und Koksma zitiert, aber dann mit Minkowskischen Methoden verbessert.

In [88] konnte Furtwängler die Perronsche Schranke verbessern:

Satz 2. *Sei $k < |D|^{-1/2(n-1)}$ eine positive reelle Zahl, wo D die minimale Diskriminante eines reellen Zahlkörpers vom Grad n bezeichnet. Denn existieren $n-1$ reelle irrationale Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, die über den rationalen Zahlen unabhängig sind, und für welche die $n-1$ Ungleichungen*

$$\left|\frac{x_i}{x_n} - \alpha_i\right| < k|x_n|^{-1-\frac{1}{n-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

höchstens endlich viele Lösungen in teilerfremden ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hat.

Furtwängler bemerkt, dass die minimale Diskriminante kubischer Körper gleich -23 ist (dies hat er in seiner Dissertation [82] gezeigt), und dass sein Student J. Mayer [192] den Fall von Zahlkörpern 4. Grades studiert und nachgewiesen habe, dass die minimale Diskriminante hier -275 ist. Um asymptotische Aussagen zu gewinnen, benutzten Perron und Furtwängler die Familie von Zahlkörpern $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ mit Diskriminante $\le 2^{n-1}n^n$. Tatsächlich ist die Diskriminante dieser Körper fast immer gleich $D = 2^{n-1}n^n$; für Primzahlen $n = p$ ist die Diskriminante genau dann echt kleiner, wenn $2^{p-1} \equiv 1 \bmod p^2$ ist, also erstmals für $p = 1093$, wo $\Delta = 2^{p-1}p^{p-2}$ ist.

Scholz ist später noch einmal in [S21] auf Minimaldiskriminanten zurück gekommen. Die in der Furtwänglerschen Arbeit ausgesprochenen Vermutungen haben sich nicht alle in der dort formulierten Version bestätigen lassen; vgl. Langmayr [161, 162]. Weitere Verallgemeinerungen dieser Fragestellungen findet man in zahlreichen Arbeiten von Cassels und Davenport zur simultanen diophantischen Approximation aus den 50er Jahren.

Die Arbeit [S7] behandelt die Struktur von Idealklassen- und Einheitengruppen abelscher Körper, vor allem solcher, die Komposita zweier zyklischer Erweiterungen von Primzahlgrad ℓ sind. Dazu sei K_p^ℓ der Teilkörper vom Grad ℓ des Körpers der p-ten Einheitswurzeln, wo $p \equiv 1 \bmod \ell$ prim (oder $p = \ell^2$) ist. Als einfachstes Beispiel untersucht Scholz die Komposita $L = K_p^\ell K_q^\ell$.

Für $\ell = 2$ ist die Sache sehr übersichtlich: bezeichnet ε_m die Grundeinheit des quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{m}\,)$, so ist die Einheitengruppe E_L von L gegeben durch

$$E_L = \begin{cases} \langle -1, \varepsilon_p, \varepsilon_q, \sqrt{\varepsilon_{pq}} \rangle & \text{falls } N\varepsilon_{pq} = +1, \\ \langle -1, \varepsilon_p, \varepsilon_q, \sqrt{\varepsilon_p \varepsilon_q \varepsilon_{pq}} \rangle & \text{falls } N\varepsilon_{pq} = -1. \end{cases}$$

Scholz nennt einen Teilkörper K von L einen *Normkörper*, wenn die Normabbildung von L nach K surjektiv auf der Einheitengruppe ist: $E_K = NE_L$. Hier ist also entweder genau ein Teilkörper Normkörper (nämlich $\mathbb{Q}(\sqrt{pq}\,)$, wenn $N\varepsilon_{pq} = +1$ ist), oder alle drei sind Normkörper (nämlich wenn $N\varepsilon_{pq} = -1$ ist). Scholz wird diesen Fall in [S15] noch genauer untersuchen.

Im Falle, wo ℓ eine ungerade Primzahl ist, sei F der Hilbertsche ℓ-Klassenkörper von L, also die maximale unverzweigte abelsche ℓ-Erweiterung von L. Die Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(F/L)$ ist isomorph zur ℓ-Klassengruppe von L, und wird nach Chebotarev erzeugt von Erzeugenden der Trägheitsgruppen, also von Elementen S_1 und S_2 mit $S_1^\ell = S_2^\ell = 1$. Die Kommutatorgruppe G' wird vom Kommutator $A = S_2^{-1} S_1^{-1} S_2 S_1$ symbolisch erzeugt, d.h. es ist $G' = \langle A^{F(S_1,S_2)} \rangle$.

Sei $\mathfrak{M} = \mathrm{Ann}(A)$ der Annihilator von A im Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$, also die additive Gruppe aller Elemente F des Gruppenrings, für die $A^F = 1$ ist. Man überzeugt sich leicht davon, dass eine Potenz von $X = S_1 - 1$ und eine Potenz von $Y = S_2 - 1$ in $\mathfrak{M}$ liegen.

Die Teilkörper K_p^ℓ und K_q^ℓ von L heißen Stammkörper, die andern $\ell - 1$ Teilkörper K_λ ℓ-ten Grades nennt Scholz Zwischenkörper, was er später in [S14] allerdings durch den besseren Begriff *Mittelkörper* ersetzt. Wenn die Norm in L/K_λ auf den Einheitengruppen surjektiv ist, also jede Einheit in K_λ Norm einer Einheit aus L ist, dann nennt er K_λ einen *Normkörper*. Scholz zeigt, dass es nur drei Möglichkeiten gibt:

1. Alle $\ell + 1$ Unterkörper sind Normkörper;
2. Genau ℓ Unterkörper sind Normkörper;
3. Kein Unterkörper ist Normkörper.

Im Falle, dass die ℓ-Klassengruppe von K elementar-abelsch ist, kann Scholz weitere Zusammenhänge mit $S-1$-ten Potenzresten von Einheiten aufstellen.

1931

1931 wird Lothar Heffter emeritiert. Heffter wurde 1862 in Köslin geboren, studierte in Heidelberg und Berlin und promovierte dort bei Lazarus Fuchs. Es folgen Aufenthalte in Gießen (Habilitation), Bonn, Aachen und Kiel, bevor er 1911 als ordentlicher Professor nach Freiburg berufen wurde. Die Assistentenstelle, die Scholz innehat, wird ab nun Doetsch zugeordnet.

Scholz veröffentlicht eine kleine Arbeit [S8] über „Zermelos neue Theorie der Mengenbereiche“ und vereinfacht in [S9] seine älteren Überlegungen zu Dispositionsgruppen. In [S10] studiert Scholz „Abgrenzungssätze“, die im wesentlichen besagen, dass die einer Erweiterung K/k zugeordneten „Idealgruppen“ im Sinne der Klassenkörpertheorie bereits durch die maximale in K/k enthaltene abelsche Erweiterung festgelegt ist. Genauer: für eine Erweiterung F/k bezeichne $\mathrm{Tak}_{\mathfrak{m}}(F/k)$ die Gruppe aller zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden Ideale in k, die Normen von Idealen aus F sind. Ist dann L/k eine Erweiterung mit maximaler abelscher Teilerweiterung K/k, und ist $\mathfrak{m}$ ein Vielfaches des Führers von K/k, dann ist $\mathrm{Tak}_{\mathfrak{m}}(L/k) = \mathrm{Tak}_{\mathfrak{m}}(K/k)$. Für eine moderne Darstellung dieses Sachverhalts vgl. [101].

Im März schickt Scholz Hasse ein Gegenbeispiel zu der von Hasse geäußerten Vermutung, der Normensatz (ist K/k abelsch, dann ist ein Element von k, das an jeder Stelle lokale Norm ist, schon globale Norm) falsch ist. Er erkennt, dass aus der Gültigkeit dieses Normensatzes folgen würde, dass p-Klassenkörpertürme nach dem ersten Schritt abbrechen; Hasse konstruiert daraufhin sein Gegenbeispiel $\mathbb{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{-3}\,)$, das er in [119] veröffentlicht. Witt hat 1934 auch ein Gegenbeispiel im Falle von Funktionenkörpern gefunden.

1932

Im Frühjahr 1932 nimmt Scholz, zusammen mit Zermelo, an der „Hellas Tour“ für Lehrer und Schüler deutscher Gymnasien teil; mit dem Dampfschiff *Oceana* sind sie vom 19. April bis zum 4. Mai vor allem in Griechenland, aber auch in Italien und Nordafrika unterwegs.

1932 erscheint [S11], eine kleinere Arbeit, die aber heute zu den bekanntesten Publikationen von Scholz gehört. Dort zeigt Scholz mit einfachsten (klassenkörpertheoretischen) Mitteln, dass die Teilbarkeit durch 3 der Klassenzahlen der quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{m}\,)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-3m}\,)$ dadurch gekoppelt sind, dass die 3-Ränge ihrer Klassengruppen sich um höchstens 1 unterscheiden. Der tiefere Grund für dieses auf den ersten Blick überraschende Phänomen ist der, dass die kubischen Kummererweiterungen von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{-3}\,)$, die über $F = \mathbb{Q}(\sqrt{m}\,)$ abelsch und unverzweigt sind, von der Form $K(\sqrt[3]{\alpha})$ für ein $\alpha \in k = \mathbb{Q}(\sqrt{-3m}\,)$ sind, wobei (α) ein Idealkubus in k ist. Unverzweigte zyklische kubische Erweiterungen von F hängen also mit Idealkuben in k zusammen, wobei die Abweichung im 3-Rang der beiden

Klassengruppen mit der Existenz von Einheiten zusammenhängt, da nämlich α unter gewissen Bedingungen auch eine Einheit sein kann.

Dieser „Scholzsche Spiegelungssatz“ wurde später von Leopoldt [175] wesentlich verallgemeinert und war auch später Gegenstand vieler weiterer Untersuchungen, beispielsweise von Oriat [239, 240] und Satgé [275, 241], sowie Brinkhuis [41].

In [S12] untersucht Scholz Idealklassen und Einheiten in nichtzyklischen kubischen Zahlkörpern K_3 und in deren normalem Abschluss K_6, also dem Kompositum $K_6 = K_2K_3$ aus K_3 und dem quadratischen Teilkörper $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$, wo $d = \operatorname{disc} K_3$ die Diskriminante des kubischen Körpers ist. Ausgehend von der analytischen Klassenzahlformel zeigt Scholz, dass die Beziehung $h_6R_6 = h_2h_3^2R_2R_3^2$ für die Klassenzahlen h_j und die Regulatoren R_j der Teilkörper K_j gilt. Durch eine genaue Betrachtung des Verhaltens der Einheiten findet Scholz, dass $h_6 = \frac{1}{3^m}h_2h_3^2$ gilt für $m \in \{1, 2, 3\}$. Scholz findet starke Einschränkungen für die Struktur der Galoisgruppe des 3-Klassenkörpers von K_6. Teile der Scholzschen Resultate wurden von F. Gerth [95, 96] wiederentdeckt.

1933

Mitte März schickt Scholz seinen Artikel [S14] an die Mathematischen Annalen, vermutlich über Emmy Noether. Darin setzt Scholz seine Untersuchungen über die Konstruktion von Zahlkörpererweiterungen mit vorgegebener Galoisgruppe fort, und zwar wendet er sich nach den bereits behandelten Dispositionsgruppen nun dem viel schwierigeren Problem der Konstruktion von Erweiterungen zu, deren Galoisgruppen *Zweiggruppen* sind. Er findet eine notwendige Bedingung (die Hauptirrealitätsbedingung) dafür, dass sich ein Kompositum zyklischer Erweiterungen mit paarweise teilerfremden Diskriminanten zu einem Zweigkörper erweitern lässt. Am Ende seiner Arbeit kündigt er an, dass er nun die Existenz von Körpern mit beliebiger zweistufiger Gruppe aus zwei Erzeugenden beweisen kann. Es kristallisiert sich immer mehr ein ganz enger Zusammenhang zwischen Einbettungsproblemen und Normenresten heraus, die Scholz im Laufe der nächsten Jahre zu seiner Theorie der Knoten ausbaut.

Bei den Reichstagswahlen am 5. März erhalten die Nationalsozialisten eine Mehrheit; am 24. März wird mit dem Ermächtigungsgesetz die Entmachtung des Parlaments beschlossen, am 7. April folgt das „Gesetz zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums“, das die Versetzung aller nicht-arischen Beamten in den sofortigen Ruhestand zum Ziel hat. Im April wird Loewy als Jude entlassen; dadurch wird Doetsch zum einzigen ordentlichen Professor in Freiburg. Er organisiert die Nachfolge in seinem Sinne und erklärt, dass Algebra und Zahlentheorie wie alle Gebiete unter jüdischem Einfluss vollkommen abstrakt geworden seien.

Kaum drei Monate nach der Machtergreifung der Nationalsozialisten versucht Scholz, aus Freiburg wegzukommen. In Berlin war sein Doktorvater Issai Schur entlassen worden; Erhard Schmidt gelang es durchzusetzen, dass Schur an einigen Lehrveranstaltungen im Wintersemester 1933/34 teilnehmen durfte. Bei seinem Besuch in Berlin an Pfingsten 1933 spricht Scholz mit Schmidt bereits über eine Umhabilitation nach Berlin.

Im Oktober 1933 gibt Hermann Weyl seine Professur in Göttingen auf, weil er wegen der jüdischen Abstammung seiner Frau „fehl am Platze" sei ([194, S. 43]), und schreibt in seinem Rücktrittsgesuch

> *Ich kann nicht anders als wünschen, dass die neuen Wege, welche die gegenwärtige Regierung beschritten hat, das deutsche Volk zu Gesundung und Aufstieg führen mögen. Infolge der (meiner Überzeugung nach) unglückseligen Verquickung mit dem Antisemitismus ist es mir persönlich versagt, direkt und in Deutschland selbst mit Hand anzulegen.*

Weyls Nachfolger in Göttingen wird dann Hasse.

Scholz bewirbt sich um ein Stipendium der Notgemeinschaft.

1934

Scholz gibt seine Assistentenstelle bei Doetsch ab; sein Nachfolger wird Eugen Schlotter. Scholz beginnt, sich nach Möglichkeiten außerhalb von Freiburg umzusehen. An Olga Taussky schreibt er am 24. März 1934

> *Sollte ich mal in Verlegenheit geraten, so würde mich Frl. Noether auch mal nach Amerika einladen, was mir allerdings sehr wenig liegt; aber sie hatte es mir ja schon 1932 angeboten. Schweden dagegen sehr.*

Im Zusammenhang mit seinem Antrag auf ein Forschungsstipendium der Notgemeinschaft wird Doetsch als Vorgesetzter von Scholz nach seiner Meinung gefragt; seinen Bericht über ihn kann man weiter unten auf S. 528 nachlesen. Den entsprechenden Bericht Heffters findet man auf S. 529.

Olga Taussky selbst entschließt sich, für ein Jahr zu Emmy Noether in die USA nach Bryn Mawr zu gehen; am 4. Juni 1934 schreibt ihr Scholz:

> *Schön, dass Ihre Amerikareise jetzt festliegt, und dass Sie in Bryn Mawr erwartet werden. Ich freue mich mit Ihnen aufrichtig und bin auch in Gedanken umsomehr dabei, als ich jetzt doch auch vorhabe, Emmy Noether wegen Stipendium anzufragen. Vielleicht tu' ich's heut' schon.*

Den Grund für seine pessimistischen Aussichten in Freiburg erklärt Scholz im selben Brief:

> *Die Sache ist dadurch ins Rollen gekommen, dass hier plötzlich der Nachfolger für Loewy aufgetaucht ist, Herr Süss aus Greifswald, ein sehr netter Mensch, den ich auch durch Feigl kenne, aber: Kein Algebraiker. Nun scheint der Doetsch'sche Vorlesungsplan, der höhere algebraische Vorlesungen praktisch ausschaltet, platzgegriffen zu haben, sodass ich mich hier jetzt überflüssig fühle.*

Seine erste Idee war es, Hasse zu fragen, ob er zu ihm nach Göttingen kommen könne (vgl. den Brief vom 22.05.1934 auf S. 219):

> *Habe daraufhin sofort an Hasse geschrieben wegen Umhabilitierung nach Göttingen, was jetzt doch das Gegebenste für mich wäre und ich schon länger in Erwägung gezogen habe. Glatte Absage: hält 'meine Person' für diesen 'hochgespannten Boden' jetzt nicht für geeignet. Mag ja recht haben; vielleicht will er mich vor der Gesellschaft des Herrn W. u. ä. bewahren.*

In diesem Fall war Scholz wohl ziemlich naiv; selbst mit der Unterstützung Hasses hätte er dort keine Stelle bekommen, und die rechte Studentenschaft in Göttingen hätte ihn in der Luft zerrissen. „Herr W." dürfte wohl Werner Weber sein, dem selbst der deutschnationale Hasse nur als Übergangslösung bis zur Übergabe der Führung des Göttinger Mathematischen Instituts an einen richtigen Nationalsozialisten galt. Weber hatte sich sogar geweigert, Hasse am 29.5.1934 die Schlüssel des Instituts zu übergeben. Hasses Kampf gegen die Hardliner Weber und Tornier nimmt in den Jahren Formen an, die ihn am 2.4.1936 dazu bringen, Vahlen um seine Beurlaubung und Versetzung zu bitten. Vahlen beruft stattdessen aber Tornier von Göttingen weg nach Berlin. Nach dem Weggang von Tornier und Weber fühlt sich auch Teichmüller dort nicht mehr wohl und verlässt Göttingen ebenfalls in Richtung Berlin.

Ein Jahr später, als Scholz in Kiel versucht, dem frisch entlassenen Zermelo dort einen Vortragstermin zu verschaffen, muss er diesem wenige Tage vorher absagen, weil er fürchtet, dass Zermelo in Kiel schlecht behandelt werden würde.

Die Idee, Scholz eine Stelle in Kiel zu verschaffen, geht wohl auf F.K. Schmidt zurück: in seinem Brief an Hasse schreibt Scholz am 06.07.1934

> *Darf ich Sie noch bitten, [...] F. K. Schmidt, wenn er noch da ist, meinen herzlichen Dank zu übermitteln, dass er bei Kiel an mich gedacht hat!*

Friedrich Karl Schmidt wird am 22. September 1901 als Sohn des Kaufmanns Carl Schmidt und seiner Ehefrau Elisabeth, geborene Vehling, in Düsseldorf geboren. Ab 1911 besucht er das Reform-Realgymnasium, an dem er 1920 Abitur macht, um danach in Freiburg Theologie zu studieren. Weil er als Realgymnasiast keine Griechisch-Kenntnisse besitzt, befasst er sich im ersten Semester ausschließlich mit Griechisch und hört nebenher analytische

Geometrie bei Heffter; am Ende des ersten Semesters ist er zur Mathematik bekehrt und studiert nebenher Physik und Philosophie. Im Herbst 1922 erkrankt sein Vater: F.K. Schmidt bricht daraufhin sein Studium ab und beginnt eine kaufmännische Ausbildung. Als sich der Gesundheitszustand seines Vaters bessert, nimmt F.K. Schmidt sein Studium wieder auf und hört Vorlesungen bei Loewy und Krull; sein Vater stirbt allerdings bereits 1924. Schmidt promoviert 1925 bei Loewy mit „Allgemeine Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen", einer Verallgemeinerung des arithmetischen Teils der Artinschen Dissertation. In den darauffolgenden Jahren ist er wesentlich an der Entwicklung der Klassenkörpertheorie für Funktionenkörper beteiligt.

Im Herbst 1933 holt ihn Hermann Weyl nach Göttingen, damit er die Algebravorlesungen übernehmen kann, die vor ihm Emmy Noether gehalten hat. Sein Verkehr mit „jüdischen Kollegen", insbesondere mit Courant, zwingt ihn aber schnell zum Weggang. Im Oktober 1934 erhält er einen Ruf nach Jena; 1941 wird Schmidt aufgrund eines Gutachtens aus dem staatlichen Prüfungsausschuss entlassen, und er beschließt, seine Lehrtätigkeit aufzugeben und arbeitet während des Kriegs in der Deutschen Versuchsanstalt für Segelflug in Ainringen bei Bad Reichenhall. Er kehrt 1945 kurz nach Jena zurück und wird 1946 nach Münster berufen. 1952 wechselt er nach Heidelberg, wo er bis zu seiner Emeritierung 1966 unterrichtet. Schmidt ist am 25. Januar 1977 in Heidelberg gestorben.

Der Scholzsche Alternativplan, eine Stelle in Kiel zu erhalten, wird von Doetsch torpediert, sobald ihm die Sache zu Ohren kommt. Am 31. Juli 1934 schreibt er an Tornier in Göttingen, der sein Urteil an Kaluza in Kiel weitergeben solle:

> *Ich kann nur das eine sagen, dass mir ein derartiger Mangel an Pflichtgefühl an deutschen Hochschulen noch nicht vorgekommen ist. [...] Ich verlange von niemandem, daß er Nat[ional]-Soz[ialist] ist, ich bin selbst nicht Parteimitglied. Ich würde aber im Einklang mit den Intentionen der Regierung nur jemanden fördern, der zum mindesten eine positive Einstellung zum heutigen Staat hat. Davon kann bei Sch[olz] keine Rede sein. Er ist im Gegenteil hier zusammen mit seinem einzigen Freund, den er hat, nämlich Zermelo, als der typische Meckerer bekannt, der nichts lieber sähe, als wenn das nat[ional]-sozialistische Regiment, das im Gegensatz zu dem früheren solchen Charakteren wie er ist, zu Leibe zu gehen droht, so bald wie möglich wieder verschwände.*
>
> *Daß ein solcher Waschlappen wie Sch[olz] einen politischen Einfluß ausüben konnte, ist allerdings ausgeschlossen. [...] Wenn aber solche Leute wie Sch[olz] sehen, daß es ihnen trotz aller Ankündigungen der Regierung auch heute noch sehr gut geht, [Fußnote: Vor einem halben Jahr hat er sich ein Stipendium der Notgemeinsch[aft] besorgt, die Sache wurde hinter meinem Rücken eingeleitet.] so darf*

> *man sich nicht wundern, wenn sie ihr Unwesen ruhig und nur umso frecher weitertreiben. [...] Sie werden jetzt vielleicht begreifen, daß ich baß erstaunt war, daß dieser Mann ausgerechnet zu einer Zeit, wo solchen Drohnenexistenzen schärfster Kampf angesagt wird, mit der Auszeichnung bedacht werden soll, nach auswärts fur einen Lehrauftrag geholt zu werden.*
>
> *[...] Die Studenten stehen ihm völlig ablehnend gegenüber, sie wollten sogar im vorigen Semester eine Aktion gegen ihn unternehmen, allerdings wohl hauptsächlich, weil er ausschließlich mit Juden und Kommunisten herumlief.*

Diesen Brief hat Wilhelm Magnus nach dem Krieg in den Archiven gefunden und ihn postwendend an – ausgerechnet! – Wilhelm Süss geschickt, und zwar mit folgenden Worten:

> *[Ich füge] einen Brief, genauer die Abschrift eines Briefes, bei, den Doetsch 1934 an Tornier geschrieben hat. [...] Ich hätte nicht mit Arnold Scholz so gut bekannt sein müssen um den dringenden Wunsch zu empfinden, daß es den Schreibern derartiger Briefe in Zukunft erschwert werden möge, andere in einer derartigen Weise zu verleumden. Scholz hat mir immer versichert, dass er das Leben in Freiburg nicht lange mehr hätte aushalten können; ich sehe nun, dass er in einem Masse recht gehabt hat, das ich mir damals nicht richtig vorstellen konnte!*

Eine relativ oft zitierte Arbeit von Scholz ist [S15], in welcher er die Klassenkörpertheorie auf die Frage anwendet, unter welchen Bedingungen an die quadratfreie Zahl $d > 0$ die Nicht-Pellsche Gleichung $t^2 - du^2 = -4$ lösbar ist.

Die zweite große Arbeit, die 1934 nach langen Mühen veröffentlicht wird, ist die Arbeit [S17], an welcher Scholz seit Jahren zusammen mit Olga Taussky gearbeitet hat. Taussky gehörte als Jüdin wohl sicherlich zu den „Juden und Kommunisten“, mit denen sich Scholz nach Auskunft von Doetsch und Schlotter umgeben hat. In der Arbeit geht es um 3-Klassenkörpertürme imaginärquadratischer Zahlkörper; genauer versuchen Scholz und Taussky, die Möglichkeiten für die Galoisgruppe des 3-Klassenkörperturms durch Berechnung der Kapitulation so einzuschränken, dass ihre Bestimmung möglich wird oder zumindest das Abbrechen des Turms bewiesen werden kann. Diese Arbeit hat in der mathematischen Literatur viele Spuren hinterlassen; wir begnügen uns hier mit Hinweisen auf Brink [39], Heider & Schmithals [129], und die vielen Arbeiten jüngeren Datums von D. Mayer. Auch das Kapitulationsproblem ist eigentlich, wie manche andere Probleme, die Scholz untersucht hat, kohomologischer Natur. In normalen unverzweigten Körpererweiterungen K/k mit Galoisgruppe G ist der Kapitulationskern isomorph zu $H^1(G, E_K)$ (vgl. die schöne Übersicht von Jaulent [146]); wie alle Probleme



Abb. 1.3. Arnold Scholz mit seinem Neffen Nikola Korrodi

der algebraischen Zahlentheorie, die mit Einheiten zu tun haben, ist auch dieses sehr schwierig (oder, wie Artin sich einmal Taussky gegenüber geäußert hat, „hoffnungslos“), vor allem natürlich in nichtzyklischen Erweiterungen. Selbst ein so einfacher Satz wie derjenige, wonach in abelschen unverzweigten Erweiterungen K/k mindestens eine Untergruppe der Ordnung $(K : k)$ kapituliert, konnte erst 1991 von Suzuki [311] bewiesen werden.

Im Juli befasst sich Scholz mit der Möglichkeit der Umhabilitation nach Kiel; dorthin war erst vor kurzem Hammerstein berufen worden. Im August besucht er Kiel erstmals, Ende Oktober zieht er endgültig dorthin.

1935

Mit dem Ende des Stipendiums der Notgemeinschaft beginnt für Scholz der mühsame Kampf um finanzielle Unabhängigkeit von Neuem. Seine Versuche, in Kiel einen bezahlten Lehrauftrag zu erhalten, gestalten sich schwieriger als erwartet, vermutlich auch wegen des anhaltenden Störfeuers aus Freiburg. In seinem Bericht vom Mai 1935 schreibt Schlotter (es ist ein Zeichen der Zeit, dass man zur Beurteilung eines Arnold Scholz auch nützliche Idioten wie Schlotter heranzieht):

> *Politisch ist Scholz nicht zuverlässig. Mit dem Nationalsozialismus scheint er sich immer noch nicht abgefunden zu haben, bis zu seinem Abschied von Freiburg war er dauernd mit Juden und ehemaligen Kommunisten zusammen. Scholz will den Nationalsozialismus nicht verstehen.*

Schlotter dagegen versteht den Nationalsolzialismus sehr gut: 1935 wurde er Untersturmführer und 1938 Hauptsturmführer der Waffen-SS. Noch 1992 schreibt er:

> *Die Waffen-SS war eine Eliteformation der deutschen Wehrmacht, der das Abendland es verdankt, dass Stalins Welteroberung nicht stattfand. Wir sind stolz darauf.*

Was die Elite angeht: vom 6. Juni 1944 bis zum 17. April 1945 hat Schlotter die Division „Nordland“ der SS-Panzer-Nachrichten-Abteilung 11 befehligt. Da er die auswegslose Lage in Berlin erkannt hatte und nach eigenen Angaben[4] nicht den Heldentod sterben wollte, ließ er sich von einem Freund nach Flensburg versetzen (sein Nachfolger, Hauptsturmführer Schnick, ist tatsächlich einige Tage später gefallen). Nach dem Krieg unterrichtete Schlotter an einer weiterführenden Schule Mathematik, bis er 1974 in den Ruhestand ging – zwei Jahre, nachdem in Deutschland der sogenannte „Radikalenerlass“ in Kraft getreten war, welcher für viele Mitglieder der Vereinigung

[4] Sh. `http://www.wehrmacht-awards.com` .

der Verfolgten des Naziregimes und anderer Organisationen Berufsverbot bedeutete.

Ab 1935 betreut Scholz die Dissertation von G. Hannink über Verlagerung und Nichteinfachheit von Gruppen.

Im Sommer 1935 kristallisiert sich heraus, dass Scholz als Assistent von F.K. Schmidt nach Jena gehen soll. Bereits am 24.6. schreibt F.K. Schmidt an Hasse, der ihm Reichardt und Wecken[5] als Assistenten vorgeschlagen hat:

> *Hinzukommt, dass mich Blaschke in den letzten Tagen von den Schwierigkeiten unterrichtet hat, mit denen Arnold Scholz leider noch immer in Kiel zu kämpfen hat. Scholz hat danach den ihm in Aussicht gestellten Lehrauftrag noch immer nicht erhalten und ist daher nach Ablauf seines Notgemeinschafts-Stipendiums ohne Mittel. Ich möchte mich daher vor allem bemühen, für Herrn Scholz nach Möglichkeit hier etwas zu erreichen.*

Von Kiel aus hat Scholz regelmäßig Vorträge in Hamburg besucht, im Sommer 1935 war Blaschke zu einem Gegenbesuch in Kiel gewesen. Auch in seinem Brief an Hasse vom 15. Juli kommt F.K. Schmidt noch einmal auf Scholz zu sprechen:

> *Für die Nennung der Namen Schröder und Wieland[t] danke ich Ihnen ebenfalls vielmals. Von beiden habe ich in der letzten Woche bereits durch Schur gehört, den ich in Berlin besuchte. Bei uns stehen die Dinge nun allerdings so, dass ich unsere Assistentenstelle bereits Scholz definitiv angeboten habe. Scholz, der wie Sie wissen, seit Oktober vorigen Jahres in Kiel ist, ist dort in der seltsamsten Weise hingehalten worden. Obwohl er bereits einige Monate lang Hammerstein vertreten hat, hat man seine Umhabilitation bis zum Frühjahr dieses Jahres hinausgezögert und bis heute noch nicht die Vergebung des Lehrauftrages an ihn durchgesetzt. Scholz ist daher nach Ablauf seines Notgemeinschafts-Stipendiums, also seit 1.4. ds. Jrs. ohne jede Bezahlung. Ich kann das Gefühl nicht unterdrücken, dass bei all diesen Schwierigkeiten Doetsch seine Hand im Spiele haben dürfte. Jedenfalls weiss ich, dass Doetsch im Herbst vorigen Jahres sich sogleich an Kaluza gewandt hat, um dort den überaus günstigen Eindruck, den Scholz bei seinem Besuch in Kiel hinterlassen hatte, wieder zu verwischen. Ich glaube daher, dass für Scholz ein Ortswechsel das beste ist, und dass er an eine Universität gehen sollte, wo man ihn von früher her schon kennt. Eine Antwort von Scholz habe ich noch nicht erhalten, nehme aber an, dass sie in den nächsten Tagen eingeht.*

Am 27. August 1935 schreibt Scholz an Taussky:

[5] Franz Wecken legte 1935 in Göttingen das Staatsexamen ab und wurde 1938 in Marburg promoviert.

> *Nun ist es also so gut wie entschieden, dass ich Assistent von F.K. Schmidt in Jena werde. Es sind noch nicht alle Formalitäten erledigt; aber F.K.S. hat den Weg so weit geebnet.*

F.K. Schmidt war 1934 von Göttingen, wo er wegen seines Umgangs mit Courant von den radikalen Studenten angegriffen worden war, nach Jena gewechselt; dort bekam er ebenfalls Probleme, auch deswegen, weil er beim Springer-Verlag Bücher von Emigranten und jüdischen Autoren herausgegeben hatte, und so wechselte er 1941 zur Deutschen Forschungsanstalt für Segelflug in Ainring bei Bad Reichenhall.

Im Oktober 1935 werden die Verhandlungen zwischen Scholz und Jena beendet; dem Jenaer Rektor, schreibt Scholz am 28.10.1935, wurde bei seinem Besuch in Berlin gesagt, man wünsche, dass Scholz in Kiel bleibe. Auch F.K. Schmidt schreibt am 30.10. an Hasse:

> *Lassen Sie mich Ihnen noch kurz über den Fortgang der Angelegenheit Scholz berichten. Nach ziemlich langwierigen Verhandlungen u. nachdem es gelungen war, das Kultusministerium für die Sache zu interessieren, ist unserem Rektor mitgeteilt worden, man wünsche in Berlin das Verbleiben von Scholz in Kiel, da dort mehrere Stellen offen sind. Ich nehme danach an, dass Scholz zum nächsten Semester eine bezahlte Stelle in Kiel in irgend einer Form erhalten wird. Jedenfalls scheinen die gegen ihn vorgebrachten Bedenken von den zuständigen Stellen endgültig als unbegründet aufgeklärt worden zu sein. Ich freue mich natürlich im Interesse von Scholz über diese Regelung sehr, wenn ich es auch bedauere, nun auf ihn verzichten zu müssen. Wie wir schon in Stuttgart besprachen, habe ich nunmehr Herrn Reichardt die Stelle auf die übliche Zeit angeboten.*

Am 9.12. schreibt F.K. Schmidt wieder an Hasse:

> *Zu meiner grössten Überraschung hörte ich vor einigen Tagen von Scholz, dass er den Lehrauftrag in Kiel noch immer nicht erhalten hat. Ich möchte hoffen, dass es sich hier lediglich um eine der ja heute so häufigen Verzögerungen innerhalb des Reichskultusministeriums handelt. Ich mag wirklich nicht daran glauben, dass die Erklärung des Reichskultusministeriums gegenüber unserem Rektor, wonach man wünsche, dass Scholz in Kiel bleibe, lediglich ein diplomatischer Schachzug war, durch den man ein weiteres Drängen in der Angelegenheit von Jena aus abschütteln wollte. Solange jedenfalls für Scholz noch die Möglichkeit besteht, in Kiel etwas zu bekommen, würde ich es für unklug halten, wenn er seinen Posten verlässt und ein ausländisches Angebot annimmt.*

Daraufhin fragt Scholz bei Hasse nach, ob Ore ihm Geld für einen Aufenthalt in Cambridge beschaffen könne. Hasse verspricht, bei Ore nachzufragen, schreibt aber auch, dass es für Scholz' Aussichten in Deutschland nur ungünstig sei, wenn er jetzt ins Ausland gehe.

Im Dezember schreibt Scholz, dass er auch nach New Haven gehen würde. In seinem Brief an Hasse vom 19.12.1935 wird deutlich, dass Scholz sein Heimatland nicht gerne verlässt:

> *Aber inzwischen muss ich mich ja mit den Auslandsmöglichkeiten befassen, und ich rechne schon damit, dass ich, wenn ich ins Ausland geh, auf alles weitere hier verzichte, wenigstens für dieses Zeitalter [...].*

Außer dieser Möglichkeit spricht Scholz noch weitere an; Amsterdam, Cambridge, Jugoslawien .... Hasse schreibt daraufhin am 21. Dezember 1935 an Ore:

> *Wir machen uns augenblicklich etwas Sorge um die Gestaltung der Zukunft des Ihnen ja auch bekannten Zahlentheoretikers A. Scholz. Dieser ist augenblicklich in Kiel und es ist ihm schon seit langem ein Lehrauftrag in Aussicht gestellt worden. Da er aber offenbar irgendwo einen Feind hat, ist es bisher nicht zur Erteilung eines solchen Lehrauftrags gekommen.*

Ores Antwort vom Januar 1936 ist entmutigend:

> *I met Scholtz [sic!] in Hamburg last year and he made the best impression upon me. I am afraid I shall have to be rather discouraging about the possibilities for obtaining a position in America at the present time, but there might still be some chances. [...] I should, however, not be too hopeful on the outcome of an application.*
>
> *The Institute of Advanced Study in Princeton announces a set of fellowships in the last number of the Bulletin of the American Mathematical Society. Scholtz may also apply for one of these [...].*

Die Arbeit [S18], in der Scholz nachweist, dass die Einbettbarkeit des Kreiskörpers $K_p^{\ell^h} K_q^{\ell^m}$ in einen rein verzweigten Zweigkörper äquivalent zum Bestehen des Hauptirrealitätskriteriums ist, widmet Scholz seinem „Lehrer I. Schur zu seinem 60. Geburtstag am 10. Januar 1935". Auch diese Widmung dürfte seinen Bemühungen um eine angemessene Stelle geschadet haben.

Scholz beginnt mit der Untersuchung von Normenresten; die entsprechenden Beispiele, von denen er einige gemeinsam mit Artins Doktoranden Harald Nehrkorn[1)] aus Hamburg gesucht hat, wird er später in [S19] veröffentlichen.

Sei L/K eine abelsche Erweiterung von Zahlkörpern, und $\mathcal{N}$ bezeichne die Gruppe aller $\alpha \in K^\times$, die Normenreste in L/K sind, also lokale Normen in allen Komplettierungen von L. Scholz definiert nun

den Zahlknoten	$\mathfrak{K}_\alpha = \mathcal{N}/N_{L/K}L^\times$,
den Einheitsknoten	$\mathfrak{K}_\varepsilon = E_K \cap \mathcal{N}/E_K \cap N_{L/K}L^\times$, und
den Idealknoten	$\mathfrak{K}_{(\alpha)} = \{(\alpha) : \alpha \in \mathcal{N}\}/\{(\alpha) : \alpha \in N_{L/K}L^\times\}$

Aus der Definition folgt, dass diese Knoten Torsionsgruppen sind, und dass ihre Exponenten Teiler des Grads $(L : K)$ sind.

Zu den Scholzschen Resultaten gehört die Aussage, dass die Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathfrak{K}_\varepsilon \longrightarrow \mathfrak{K}_\alpha \longrightarrow \mathfrak{K}_{(\alpha)} \longrightarrow 1$$

exakt ist; bei ihm liest sich das so:

> *Es ist der Einheitsknoten einer Untergruppe des Gesamtknotens isomorph, deren Faktorgruppe der Idealknoten ist. Für die einzelnen Gruppenordnungen, die Knotungen $k_{(\alpha)}$,k_ε, k_α, gilt daher die Relation*
>
> $$k_{(\alpha)} \cdot k_\varepsilon = k_\alpha.$$

Scholz bemerkt auch, dass die Knoten für Erweiterungen mit Galoisgruppe (ℓ, ℓ) endliche ℓ-Gruppen sind, und dass die Ordnung von $\mathfrak{K}_\alpha$ in diesem Fall ℓ teilt. Aus früheren Arbeiten folgt, dass Rédeikörper einen nichttrivialen Zahlknoten haben. Mit Rédeikörper bezeichnet Scholz Komposita zyklischer Erweiterungen K_1/K und K_2/K von Primzahlgrad, wenn deren Diskriminanten teilerfremd sind und wenn jedes Primideal, welches in K_1/K verzweigt, in K_2/K zerfällt und umgekehrt.

Weiter beweist Scholz an einem Beispiel, dass der Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}\,)$, wo p und q Primzahlen der Form $4n + 1$ mit $(p/q)_4(q/p)_4 = -1$ sind, einen Einheitsknoten der Ordnung $\#\mathfrak{K}_\varepsilon = 2$ besitzen. Dagegen ist $\mathfrak{K}_\varepsilon = 1$, wenn $(p/q)_4(q/p)_4 = +1$ ist.

Sogar André Weil hat in [336] auf die Bedeutung der Diskrepanz zwischen Normen und Normenresten hingewiesen. Erst gegen Ende der 1960er Jahre rückte die Theorie der Normenreste aber wieder in das Blickfeld verschiedener Mathematiker. Tate gab auf der Brighton-Konferenz einen kohomologischen Zugang zu dieser Theorie und öffnete damit den Zugang mit modernen Methoden. Garbanati konnte in [92] zwar wenig beweisen, was nicht schon bei Scholz stand, hat aber in [93] auf die Scholzsche Arbeit [S25] hingewiesen. Die Scholzschen Arbeiten über Normenreste wurden in der Folge von Jehne [147], Heider [127], Lorenz [178], Opolka [234, 235, 237, 238] und anderen wieder aufgegriffen. Quasi nebenher wurde die Arithmetik der Tori entwickelt, zuerst vor allem von Ono, in welcher der Zahlknoten $\nu_{K/k}$ bisweilen mit der Tate-Shafarevich-Gruppe des Normtorus $R^{(1)}_{K/k}(\mathrm{GL}_1)$ identifiziert wird; vgl. Pollio & Rapinchuk [251]. Da sich bisher niemand gefunden hat, der die elementaren Teile dieser Theorie auch elementar darstellt, hat dieser Teil der Zahlentheorie nicht die Verbreitung gefunden, die er verdient hätte.

1936

Nachdem Scholz zum Mitglied des wissenschaftlichen Prüfungsamtes ernannt worden ist, glaubt er wieder daran, dass es mit seiner wissenschaftlichen Lauf-

bahn aufwärts gehen kann, und dass er den versprochenen Lehrauftrag bis Ostern erhalten wird.

Scholz [S19] erkennt, dass die Existenz von Knoten mit der Frage der Erweiterbarkeit gewisser Körpererweiterungen zusammenhängt, eine Einsicht, die letztlich auf die große Rolle der Schurmultiplikatoren in dieser Fragestellung führt. In seinem Paradebeispiel $K = K_p^\ell K_q^\ell$ existiert genau dann ein nichttrivialer Knoten, wenn sich K in eine nichtabelsche Erweiterung vom Grad ℓ^3 einbetten lässt, deren nichttriviale Elemente im Falle $\ell > 2$ alle Ordnung ℓ besitzen, während im Falle $\ell = 2$ die Galoisgruppe eine Diedergruppe der Ordnung 8 ist. Die Galoisgruppe einer solchen Erweiterung wird von den Frobeniussubstitutionen S_1 eines Primideals über p und S_2 eines Primideals über q erzeugt; der Kommutator $A = [S_1, S_2]$ entspricht einer Idealklasse der Ordnung ℓ in K, der sogenannten *Kommutatorklasse*, die Scholz bereits in [S18] eingeführt hatte. Die absoluten Normen der Ideale in dieser Kommutatorklasse sind Hauptideale, die von Normenresten in $K/\mathbb{Q}$ erzeugt werden, ohne aber Normen zu sein.

Ein weiteres Beispiel aus der Arbeit [S19] ist folgendes: sei $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$, $\eta = 18 - 7\sqrt[3]{17}$ die Fundamentaleinheit von $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{17}\,)$; dann wird $\eta = \varepsilon^{S-1}$ in $K_1 = kF$, wo S die erzeugende Substitution von K_1/k ist, und ε und ε^S sind die beiden Fundamentaleinheiten von k. Die Erweiterung K_2/k sei zyklisch vom Grad 3 mit Primidealführer $\mathfrak{q}$, wobei $\mathfrak{q}$ in K_1/k voll zerfallen soll.

Für eine zyklische Erweiterung F/k vom Primzahlgrad ℓ, ein Primideal $\mathfrak{q}$ in k und ein $\alpha \in F^\times$ bezeichne $r(\alpha, \mathfrak{q})$ den maximalen Exponent $r \le \ell$ mit

$$\alpha \equiv \mu^{(S-1)^r} \nu^\ell \bmod \mathfrak{q}.$$

Da Einheiten $S-1$-te Potenzreste sind, ist $r(\varepsilon, \mathfrak{q}) \ge 1$. Scholz zeigt: das Kompositum $K = K_1 K_2$ besitzt einen Einheitsknoten genau dann, wenn $r(\varepsilon, \mathfrak{q}) = 1$ ist, und einen Idealknoten sonst.

Ergebnisse wie dieses finden sich zuhauf in den Scholzschen Arbeiten und haben mehr Aufmerksamkeit verdient, als ihnen in der Vergangenheit zugekommen ist. Eine sehr überzeugende Darstellung der Knotentheorie hat dann Jehne [147] gegeben. Wir begnügen uns damit, hier die wesentliche Definition der Knoten vorzustellen, wie sie Jehne gegeben hat.

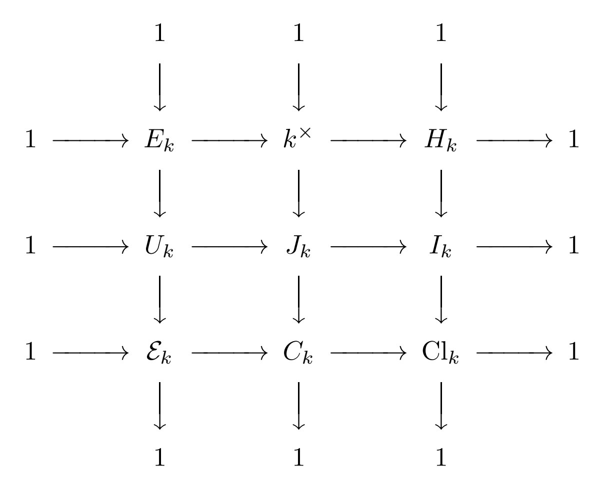
Sei k ein Zahlkörper; die Einbettung von $k^\times$ in die Idelgruppe J_k liefert eine exakte Sequenz $1 \longrightarrow k^\times \longrightarrow J_k \longrightarrow C_k \longrightarrow 1$, wo C_k die Idelklassengruppe von k bezeichnet. Der Kern der Abbildung $J_k \longrightarrow I_k$ von der Idelgruppe auf die Gruppe der gebrochenen Ideale I_k ist die Gruppe U_k der Ideleinheiten, was uns eine zweite exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow U_k \longrightarrow J_k \longrightarrow I_k \longrightarrow 1$$

liefert. Endlich gibt es noch die klassische Sequenz

$$1 \longrightarrow H_k \longrightarrow I_k \longrightarrow \mathrm{Cl}_k \longrightarrow 1,$$

welche die Idealklassengruppe Cl_k als Quotient der Idealgruppe I_k nach der Gruppe H_k der Hauptideale definiert. Diese exakten Sequenzen bilden das Fundamentalquadrat



des algebraischen Zahlkörpers k. Jetzt betrachtet Jehne exakte Sequenzen

$$1 \longrightarrow A_k \longrightarrow B_k \longrightarrow C_k \longrightarrow 1 \tag{2}$$

von abelschen Gruppen wie diejenigen aus dem Fundamentalquadrat. Ist K/k normal mit Galoisgruppe G, und bezeichnet $N = N_{K/k}$ die Relativnorm, dann liefert eine Anwendung des Schlangenlemmas auf das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A_K & \longrightarrow & B_K & \longrightarrow & C_K & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow N & & \downarrow N & & \downarrow N & & \\ 1 & \longrightarrow & A_k & \longrightarrow & B_k & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

die exakte Sequenz

$$\begin{array}{cccccccc} 1 \longrightarrow & A_K[N] & \longrightarrow & B_K[N] & \longrightarrow & C_K[N] & \stackrel{\delta}{\longrightarrow} & \\ & A_k/NA_K & \longrightarrow & B_k/NB_K & \longrightarrow & C_k/NC_K & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

wo $A[N]$ der Kern der Normabbildung auf A bezeichnet. Der Verbindungshomomorphismus δ bildet ein Element $a = \alpha A_K \in {}_NC_K$ auf $\delta(a) = N_{K/k}(\alpha)N_{K/k}A_K$ ab; weil α ein Element von B_K ist, dessen Relativnorm in A_k landet, ist dies wohldefiniert. Also folgt

$$\operatorname{im}\delta = A_k \cap N_{K/k}B_K/N_{K/k}A_K =: [A, B].$$

Jehne nennt dann $[A, B]$ den Knoten zur Sequenz (2). Bricht man diese Sequenz an der Stelle δ auf, so erhält man zwei exakte Sequenzen, in denen dieser Knoten auftritt:

$$1 \longrightarrow {}_N A_K \longrightarrow {}_N B_K \longrightarrow {}_N C_K \longrightarrow [A,B] \longrightarrow 1 \tag{3}$$

$$1 \longrightarrow [A,B] \longrightarrow A_k/NA_K \longrightarrow B_k/NB_K \longrightarrow C_k/NC_K \longrightarrow 1. \tag{4}$$

Die exakten Sequenzen des Fundamentalquadrats ergeben so sechs Knoten, von denen einer trivial ist: es gilt, wie man leicht zeigen kann, $[U,J] = 1$.

Damit bleiben fünf Knoten, nämlich

1. der Zahlknoten $\nu = \nu_{K/k} = [K^\times, J_K] = k^\times \cap NJ_K/NK^\times$;
2. der erste Einheitsknoten $\omega = \omega_{K/k} = [E_K, K^\times] = E_k \cap NK^\times/NE_K$;
3. der zweite Einheitsknoten $\omega' = \omega'_{K/k} = [E_K, U_K] = E_k \cap NU_K/NE_K$;
4. der Idealknoten $\delta = \delta_{K/k} = [H_K, I_K] = H_k \cap NI_K/NH_K$;
5. der Idelknoten $\gamma = \gamma_{K/k} = [\mathcal{E}_K, C_K] = \mathcal{E}_k \cap NC_K/N\mathcal{E}_K$.

Mit ganz wenig Aufwand erhält man jetzt aus den Hauptsätzen der Klassenkörpertheorie

Satz 3. Die Fundamentale Knotensequenz

$$1 \longrightarrow \omega_{K/k} \longrightarrow \omega'_{K/k} \longrightarrow \nu_{K/k} \longrightarrow \delta_{K/k} \longrightarrow \gamma_{K/k} \longrightarrow 1.$$

Der Scholzsche Einheitsknoten ω^0 ist der Quotient

$$\omega'/\omega \simeq E_k \cap NU_K/E_k \cap NK^\times;$$

mit dem Knoten $\delta^0 := \mathrm{im}\,(\nu \longrightarrow \delta)$ erhalten wir aus der fundamentalen Knotensequenz

Satz 4. Die Scholzsche Knotensequenz

$$1 \longrightarrow \omega^0_{K/k} \longrightarrow \nu_{K/k} \longrightarrow \delta^0_{K/k} \longrightarrow 1.$$

Diese Knoten erlauben eine Interpretation als Galoisgruppen gewisser Teilkörper des Hilbertklassenkörpers:

Satz 5. *Es ist*

$$\begin{aligned} \delta^0 &\simeq \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{cen}}/K_{\mathrm{gen}}), \\ \delta &\simeq \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{cen}}/k^1K), \quad \textit{und} \\ \gamma &\simeq \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{gen}}/k^1K). \end{aligned}$$

Das mittlere Glied der Scholzschen Knotensequenz steht mit dem Schurmultiplikator $\mathfrak{M}(G)$ der Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ in Verbindung. Der Schurmultiplikator einer endlichen Gruppe G ist wie folgt definiert: eine Gruppenerweiterung $E : 1 \longrightarrow A \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \longrightarrow 1$ heißt *zentral* wenn $A \subseteq Z(G)$, und eine *Aufspaltung*, wenn $A \subseteq \Gamma'$. Schur [286] hat gezeigt, dass die Ordnung der Gruppen A in zentralen Aufspaltungen beschränkt ist, und dass alle Gruppen A in maximalen zentralen Aufspaltungen zueinander isomorph sind. Die Isomorphieklasse dieser Gruppen A nennt man den Schurmultiplikator von G, die dazugehörigen Gruppen Γ heißen Darstellungsgruppen.

Es dürfte Scholz tief befriedigt haben, die große Rolle aufgedeckt zu haben, die der Schurmultiplikator, den sein Doktorvater Schur in die Darstellungstheorie eingeführt hatte, in der Klassenkörpertheorie spielt. In seinen im Crelle-Journal erschienenen Normenrestarbeiten [S19, S25] hat er Schur nicht zitiert oder nicht zitieren können, lediglich im gruppentheoretischen Teil [S23], erschienen im Monatsheft der Mathematik und Physik in Österreich, findet man die relevanten Zitate der Schurschen Arbeiten.

Nach der Entwicklung der Kohomologie hat sich herausgestellt, dass $\mathfrak{M}(G) \simeq H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ist. Damit folgt dann

Satz 6. *Sei K/k eine normale Erweiterung von Zahlkörpern mit Galoisgruppe G. Dann gibt es eine exakte Sequenz*

$$\coprod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{M}(G_{\mathfrak{P}})^{\frown} \longrightarrow \mathfrak{M}(G)^{\frown} \longrightarrow \nu_{K/k} \longrightarrow 1,$$

wo $G_{\mathfrak{P}}$ die Galoisgruppe der Erweiterung $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ bezeichnet, und wo $K_{\mathfrak{P}}$ und $k_{\mathfrak{p}}$ die Komplettierungen von K und k beim Primideal $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ sind. Weiter bezeichnet $A^{\frown} = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ die zu A duale Gruppe.

Da der Schurmultiplikator von zyklischen Gruppen trivial ist, hat dieser Satz den Hasseschen Normensatz als Korollar.

Neben seinen ersten Versuchen über Knoten und den Zusammenhang mit der Konstruktion von Körpererweiterungen gegebener Galoisgruppe studiert Scholz Furtwänglers Arbeit über rationale Approximierbarkeit und die damit zusammenhängende Frage nach der Größe minimaler Diskriminanten von Zahlkörpern mit vorgegebenem Grad. Seine Ergebnisse wird er in seinem Artikel über Minimaldiskriminanten [S21] veröffentlichen. Damit greift Scholz eine Frage aus [S6] wieder auf: wie findet man Türme von Körpererweiterungen, deren Diskriminante relativ bescheiden bleiben? In dieser Richtung war außer dem Beispiel Perrons von Körpern $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ nichts bekannt.

Unter allen Körpern vom Grad n sei K_n ein Zahlkörper mit minimaler Diskriminante (gemeint ist der Absolutbetrag). Der Differentenwert von K_n ist die reelle Zahl $E_n = \sqrt[n]{|\operatorname{disc} K_n|}$, die man in der heutigen Literatur die Wurzeldiskriminante $\mathrm{rd}\,(K_n)$ nennt. Resultate von Minkowski zeigen

$$\liminf_{n\to\infty} E_n \geq e^2,$$

und Blichfeldt hat diese Abschätzung zu $\geq e\pi$ verbessert. Die Perronschen Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ liefern $E_n < 2n$; aus der Existenz unendlicher Klassenkörpertürme würde, wie Scholz schreibt, folgen, dass $\liminf E_n/n = 0$ ist.

Durch Kreisteilungskörper $K/\mathbb{Q}$ kann man Furtwänglers obere Schranke nur leicht verbessern, weil für solche Körper

$$E_n \geq C \cdot \frac{n \log\log n}{\log n}$$

gilt: für $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ ist $\operatorname{disc} K = p^{p-2}$, also $\operatorname{rd}(K) = p^{\frac{p-2}{p-1}}$. Indem er Strahlklassenkörper über Kreisteilungskörpern betrachtet, gelingt Scholz aber der Nachweis, dass

$$E_n = O\Big(\frac{\log n}{\log\log n}\Big)^2$$

ist. Die Scholzsche Konstruktion liefert tatsächlich unverzweigte abelsche Erweiterungen geeigneter Kreiskörper; vgl. Lemmermeyer [168].

Die Scholzsche Vermutung $\lim_{n\to\infty} E_n/n = 0$ ist trotz der Techniken von Golod und Shafarevich immer noch offen. Das Problem liegt im Nachweis der Existenz von Erweiterungen von Primzahlgrad mit kleiner Diskriminante. Ebenfalls offen ist die Scholzsche Vermutung, dass die Minimaldiskriminante für Körpergrad $n = 400$ kleiner ist als diejenige für $n = 397$.

Es gibt noch eine ganze Reihe weiterer Fragen aus diesem Bereich, deren Untersuchung lohnenswert sein dürfte. So hat Ankeny [1] gezeigt, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt derart, dass $\log \operatorname{rd}(K) > c \cdot \log_m(K:\mathbb{Q})$ für alle normalen Erweiterungen $K/\mathbb{Q}$ gilt, deren Galoisgruppe G metabelsch der Stufe $m \geq 1$ ist, für die also die m-te Kommutatorgruppe $G^{(m)} = 1$ verschwindet, die $m-1$-te dagegen nicht. Hierbei bezeichnet $\log_m(x) = \log\log\cdots\log(x)$ den m-fach iterierten Logarithmus.

Es ist m.W. nicht bekannt, ob diese Schranke bestmöglich ist. Für $m = 1$, also abelsche Gruppen, haben die Körper $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ Wurzeldiskriminante $p^{\frac{p-2}{p-1}}$, und damit ist $\log \operatorname{rd}(K) = \frac{p-2}{p-1}\log p < \log(p-1) = \log(K:\mathbb{Q})$. Das Scholzsche Ergebnis zeigt, dass es auch für $m = 2$ solche Familien von Körpern gibt, da für die von ihm konstruierten metabelschen Körper die Ungleichung

$$\log \operatorname{rd}(K) < 2\log_2(K:\mathbb{Q})$$

gilt.

Von de Gruyter erhält Scholz das Angebot, eine Einführung in die elementare Zahlentheorie in der Göschen-Sammlung zu schreiben.

1937

Auf der Suche nach einer festen Anstellung schreibt Scholz am 3. November 1937 an Hasse, dass er in Tübingen vielleicht gut aufgehoben wäre, wo eben

ein Nachfolger für Kamke gesucht wurde. Kamke war mit einer Frau jüdischer Abstammung verheiratet, wenngleich diese auch zum Protestantismus konvertiert war. Bereits im April 1937 wurde Kamke vor die Wahl gestellt, sich von seiner Frau scheiden zu lassen oder seine Stelle zu verlieren; Kamke (sh. Segal [292, S. 105]) wählte Letzteres und wurde am 1. November entlassen. Dass Kamke die Kriegsjahre unbeschadet überstanden hat liegt unter Anderem daran, dass Süss seine Hand über ihn gehalten hat.

1937 veröffentlicht Scholz seine Arbeit [S20] über die Konstruktion algebraischer Zahlkörper, deren Galoisgruppe eine vorgegebene p-Gruppe ist. Dass er diesen Artilel „Emmy Noether zum Gedächtnis“ widmet, wird ihm bei seinen Bemühungen um eine Stelle nicht geholfen haben. In diesem Artikel tauchen im Zusammenhang mit Einbettungsprobleme auch die Schurschen Darstellungsgruppen auf und zeigen einmal mehr, wie eng der Zusammenhang zwischen solchen Fragen und der Theorie der Knoten ist, die Scholz später entwickeln wird.

Im Jahre 1937 erscheint die Scholzsche Aufgabe 253 über „Additionsketten“ im Jahresbericht, die wegen ihrer einfachen Fragestellung und ihrer Komplexität schnell berühmt und berüchtigt wurde; Alfred Brauer gelingt in [35] die Beantwortung einiger Probleme, aber die eigentliche Vermutung von Scholz ist bis heute offen geblieben und wird in Guys „Unsolved Problems in Number Theory“ [106, C6] diskutiert. Erst später stellte sich heraus, dass das Problem der Additionsketten bereits 1894 von H. Dellac in [68] formuliert worden war.

Scholz überarbeitet seine zweite Arbeit zu Normenresten schon zum sechsten Mal; diese Arbeit [S25] wird erst 1940 als eine seiner letzten erscheinen. Da die zur Beschreibung der Scholzschen Erkenntnisse geeignete mathematische Sprache (vor allem die Kohomologietheorie) noch nicht entwickelt ist, gehört diese Arbeit zu den am schwersten lesbaren. Auch hier hat Scholz manches Kleinod so im Text versteckt, dass erst viel später seine Priorität erkannt wurde: auf S. 227 schreibt er z.B.:

> *Obendrein ist gezeigt, daß jede endliche Gruppe als Galoisgruppe eines unverzweigten Relativkörpers auftritt.*

Ein Korollar hiervon ist der Satz, dass es beliebige hohe Klassenkörpertürme gibt. Artin hatte den Satz allerdings bereits 1934 bewiesen, aber nicht veröffentlicht: vgl. [76, 15.1] und [172, 7.27]. Später haben Fröhlich [78] und Uchida [321, Cor. 1] dieses Ergebnis wiedergefunden, eine Verschärfung für p-Gruppen findet man bei Nomura [230], und Ozaki [242] hat schließlich zeigen können, dass es zu jeder p-Gruppe G nicht nur eine unverzweigte Erweiterung K/k mit Galoisgruppe G gibt, sondern dass man darüberhinaus noch fordern darf, dass K der p-Klassenkörperturm von k ist.

1938

Im Oktober 1938 fragt Hammerstein Süss, der August 1937 zum Vorsitzenden der DMV vorgeschlagen worden war und wenig später auf der Jahrestagung in Bad Kreuznach auch gewählt worden ist, nach einem Gutachten über Scholz (auch Hasse wurde angeschrieben; dessen Antwort kann man auf S. 534 nachlesen); dieser antwortet (sh. [268, p. 62–63]):

> *Ich muß ehrlich gestehen, daß ich in diesem Sinne Herrn Scholz der Regierung des Dritten Reichs jedenfalls im Augenblick noch nicht vorschlagen würde. Seine Haltung scheint Jahre hindurch sehr viel zu wünschen übrig gelassen zu haben.*

1938 hat Süss auch aktiv daran mitgewirkt, Issai Schur aus der Redaktion der Mathematischen Zeitschrift zu entfernen. Die recht zwielichtige Rolle, die Süss während des Dritten Reichs gespielt hat, ist ihm nach dem Krieg in keinster Weise zum Verhängnis geworden: Süss war sicherlich ein Meister der Gratwanderung zwischen diplomatischem Geschick und Opportunismus.

Scholz schließt seine Arbeit an seiner Einführung in die Zahlentheorie in der Göschen-Sammlung ab. Dieses Buch beginnt mit der Herleitung der wichtigsten Grundgesetze der natürlichen Zahlen aus den Axiomen, entwickelt die elementare Zahlentheorie in dem Rahmen, der seit Gauß im wesentlichen üblich ist, und gibt dann eine Einführung in die Theorie der binären quadratischen Formen. Im letzten Kapitel erklärt Scholz diverse Tricks und Methoden bei der praktischen Rechnung.

Die Scholzschen Hoffnungen auf eine Stelle in Wien zerschlagen sich; Depressionen verleiden ihm mathematische Arbeiten. In den nächsten Jahren beschränkt sich Scholz darauf, angefangene Arbeiten zu vollenden. Insbesondere die bereits angekündigte Fortsetzung der Arbeit über Minimaldiskriminanten ist nie erschienen: Scholz beantwortet am 27.7.1938 eine Anfrage Hasses zu minimalen Körperdiskriminanten mit vorgegebenem Grad und führt dabei die Dirichletreihen $D_{n,G}(s) = \sum |D_K|^{-s}$ ein, wo die Summation über alle Körper vom Grad n zu erstrecken ist, deren normaler Abschluss die Galoisgruppe G besitzt. Er teilt auch diverse Ergebnisse über die Konvergenzabszisse $a(G)$ solcher Reihen mit; insbesondere ist im Falle von Erweiterungen 4. Grades $a(D_4) = 1$ für die Diedergruppe der Ordnung 8, $a(V_4) = a(C_4) = \frac{1}{2}$ für die Kleinsche Vierergruppe und die zyklische Gruppe der Ordnung 4. Darüberhinaus vermutet Scholz korrekt, dass $a(A_4) = \frac{1}{2}$ und $a(S_4) = 1$ ist. Diese Ergebnisse stehen im Zusammenhang mit asymptotischen Fragen über die Anzahl von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppen, die in den letzten Jahren intensiv studiert wurden.

Eine der zentralen Vermutungen in der Theorie der Abzählung von Galoiserweiterungen ist folgende: bezeichnet $N(G, x)$ die Anzahl aller Erweiterungen vom Grad n und Diskriminante $\leq x$, deren normaler Abschluss Galoisgruppe G hat, so gilt

$$N(G,x) = c \cdot x^{a(G)} (\log x)^{b(G)}$$

für gewisse nur (vom Grundkörper und) von G abhängigen Konstanten a, b, c. Schreibt man $G(s) = \sum D_K^{-s} = \sum a_n n^{-s}$, so ist $\sum_{k=1}^{n} a_k = N(G,n)$. Aus bekannten Eigenschaften von Dirichletreihen folgt dann, dass $a(G)$ gleich der Konvergenzabszisse von $G(s)$ ist. Insbesondere sind die von Scholz behaupteten Werte $a(D_4) = 1$ und $a(C_4) = a(V_4) = \frac{1}{2}$ allesamt richtig richtig. Auch die Scholzschen Vermutungen $a(S_4) = 1$ und $a(A_4) = \frac{1}{2}$ haben sich als wahr herausgestellt, ebenso die Behauptung, dass $\lim_{s \to 1/2} \frac{Z(s)}{V(s)} = 0$ wegen $b(C_4) = 0$ und $b(V_4) = 1$. Über die Scholzsche Beweistechnik ist nichts bekannt.

1939

1939 veröffentlicht Scholz in der Göschen-Sammlung ein kleines Büchlein mit einer originellen Einführung in die Zahlentheorie.

Vom 26.–30. Juni hat Hasse in Göttingen eine Gruppentheorietagung organisiert, zu der er Philip Hall eingeladen hat. Die ersten vier Tage begannen mit einem zweistündigen Vortrag von Hall, danach trugen Magnus, Zassenhaus, Grün Speiser, Wielandt, Witt, van der Waerden, Krull und Specht vor; Scholz hielt am 29. Juni von 18–19 h einen Vortrag über *Erweiterung und Aufspaltung von Gruppen*, also über den Inhalt seiner Arbeiten [S23, S24]. Viele dieser Vorträge wurden in Band 182 des Crelle-Journals veröffentlicht.

In [S23] untersucht Scholz die gruppentheoretische Seite von Körperkonstruktionen, wie sie in seiner Theorie der Normenreste gebraucht werden. Um wenigstens eine grobe Idee der Scholzschen Terminologie zu vermitteln, geben wir hier eine kurze Einführung in die Darstellung der Theorie, wie sie Heider [127] und später Steinke [306, § 2] entwickelt haben.

Dazu sei K/k eine normale Erweiterung von Zahlkörpern. Ist eine Erweiterung L/K normal über k, dann haben wir eine exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/k) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K/k) \longrightarrow 1$$

Verzichtet man auf die Interpretation als Galoisgruppe, so nennt Scholz G eine *Aufspaltung* der Grupe H, wenn die Sequenz

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$$

exakt ist.

Eine normale Erweiterung $L/K/k$ heißt

- *zentral über* K/k, wenn $\mathrm{Gal}(L/K) \subseteq Z(\mathrm{Gal}(L/k))$ ist, also die Galoisgruppe von L/K im Zentrum der Galoisgruppe von L/k liegt.
- *abelsch über* K/k, wenn $\mathrm{Gal}(L/K) \cap \mathrm{Gal}(L/k)' = 1$ ist, also die Galoisgruppe von L/K und die Kommutatorgruppe der Galoisgruppe von L/k disjunkt sind.

Seien nun L_1/k und L_2/k zentrale Körpererweiterungen über K/k. Gibt es dann eine über K/k zentrale Erweiterung L/k, welche L_1 und L_2 enthält und die abelsch über L_1/k und L_2/k ist, dann gehören L_1 und L_2 zum selben *Geschlecht*. Opolka hat in [236] gezeigt, dass die Geschlechter von zentralen Erweiterungen einer Galoiserweiterung K/k globaler oder lokaler Körper bijektiv den Faktorgruppen von $H^{-1}(G, C_K)$ entsprechen, wo C_K die Idelklassengruppe von K im globalen und die multiplikative Gruppe $K^\times$ im lokalen Fall bezeichnet. Hier zeigt sich einmal mehr, wie Scholz mit seiner eigenen Sprache Ersatz für die damals nicht vorhandenen kohomologischen Strukturen geschaffen hat.

Gibt es weiter eine abelsche Erweiterung M/k, der die maximale abelsche Teilerweiterung von K/k enthält und für welchen $L_1M = L_2M$ und $L_1 \cap M = L_2 \cap M$ gilt, dann sagt man, dass L_1 und L_2 zur selben Klasse gehören, oder durch *abelsche Durchkreuzung* auseinander hervorgehen. Scholz nennt die Gruppe F das *relative Produkt* von F_1 und F_2, wenn F in Abb. 1.4 minimal gewählt ist.

Die Technik der abelschen Durchkreuzung hat Hilbert in seinem Beweis des Satzes von Kronecker-Weber eingeführt: dort hatte er gezeigt, dass man eine abelsche Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ durch abelsche Durchkreuzung mit Kreisteilungskörpern zum Verschwinden bringen kann, woraus dann sofort folgt, dass K in einem Kompositum von Kreisteilungskörpern enthalten ist. Tschebotareff konnte mit derselben Technik seinen Dichtigkeitssatz beweisen, und Artin hat sie zum Beweis seines Reziprozitätsgesetzes verwendet. Trotz ihrer überragenden Bedeutung hat die Scholzsche Durchdringung dieses Konzepts mit Hilfe der Gruppentheorie wenig Anklang gefunden.

Gruppentheoretisch läuft die Sache auf folgendes hinaus: ist $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ eine endlice Gruppe und setzt man $F_j = \mathrm{Gal}(L_j/k)$, dann sind die Sequenzen

$$1 \longrightarrow A_j \longrightarrow F_j \longrightarrow G \longrightarrow 1 \qquad (5)$$

exakt, und es ist, wenn man den Monomorphismus $A_j \longrightarrow F_j$ als Inklusion interpretiert, $A_j \subseteq Z(F_j)$. Gibt es dann abelsche Gruppenerweiterungen

$$1 \longrightarrow N_j \longrightarrow F \longrightarrow F_j \longrightarrow 1,$$

für welche das Diagramm in Abb. 1.4 kommutativ ist, dann gehören die exakten Sequenzen (5) zum selben Geschlecht.

Gibt es darüberhinaus einen Normalteiler N von F derart, dass F/N abelsch ist, sowie $NN_1 = NN_2$ und $N_1 \cap N = N_2 \cap N = 1$ gilt, dann gehören die exakten Sequenzen (5) zur selben Klasse, bzw. gehen durch abelsche Durchkreuzung auseinander hervor.

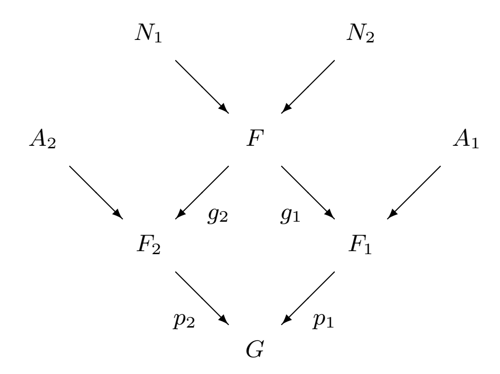


Abb. 1.4. Die Scholzschen Gruppengeschlechter

1940

Im Jahre 1940 promoviert G. Hannink bei Scholz in Kiel mit dem Thema „Verlagerung und Nichteinfachheit von Gruppen". Im Mai wird Scholz eingezogen, zum Funker ausgebildet, und in den Osten geschickt.

1941

Im Jahre 1941 wird Scholz als Lehrer für Mathematik an die Marineschule Flensburg-Mürwik verpflichtet, zusammen mit O.H. Keller. Am 28. Februar ist Scholz in Kiel, um an der Beisetzung von Hammerstein teilzunehmen, der am 25. Februar „infolge Unterernährung angegriffener Lunge" gestorben war.

Scholz organisiert ein Kolloquium am 19. Juli in Göttingen anlässlich Zermelos 70. Geburtstag; Zermelo selbst hält drei Vorträge, weitere Redner sind Konrad Knopp und Bartel van der Waerden.

Im Dezember erfährt Scholz, dass er nach Ende des Kriegs nicht darauf rechnen kann, in Kiel bleiben zu können.

Mathematisch befasst er sich mit unendlichen algebraischen Erweiterungen von Zahlkörpern, die vor ihm schon Krull und Herbrand untersucht hatten; auch Moriya [208, 209] hatte sich 1936 bereits mit der Entwicklung einer Klassenkörpertheorie über unendlichen algebraischen Zahlkörpern beschäftigt. Die entsprechende Arbeit, die Scholz ursprünglich an Weihnachten Hasse in Berlin übergeben wollte, wurde erst posthum publiziert.

1942

Scholz stirbt am 1. Februar 1942 in Flensburg. In [28, S. 141] heißt es dazu:

> *Gelegentlich kam es auch noch zu musikalischen Kontakten mit dem Zahlentheoretiker Arnold Scholz, der als Dozent an der Kieler Universitat lehrte. Von ihm berichtete Heesch spater, dass er kaum einen anderen Menschen gekannt habe, der so gut Musik hören und in ihrem Geist verstehen konnte. Scholz hielt Franz Schubert für den größten Musiker der gesamten Menschheitsgeschichte und von ihm wiederum das Streichquartett C-Dur, op. 163, als das größte Musikwerk. Während Heesch im Kriege als „Civillehrer" an der Schiffsartillerieschule in Kiel tätig war, lehrte Scholz als Civillehrer an der gleichnamigen Schule in Flensburg. Sie hatten gemeinsame Freunde, bei denen sie öfter eingeladen waren. Bei einem dieser Festabende im Januar 1942, auf dem „trotz der Finsternisse der Zeit auch getanzt wurde", fiel Scholz der Gastgeberin durch seinen ungewöhnlichen Durst auf. Acht Tage spater war Arnold Scholz tot. Ursache: „galloppierende Diabetes".*

Die „galoppierende Diabetes" scheint in der Medizin nicht bekannt zu sein; dagegen gibt es eine „galoppierende Schwindsucht": dies ist ein volkstümlicher Ausdruck für eine außerordentlich rasch und gefährlich verlaufende Form der Lungentuberkulose.

Heesch hatte 1931 in Göttingen bereits Olga Taussky kennengelernt, die gelegentlich am gemeinsamen Mittagessen mit ihm, Franz Rellich, Ernst Witt, Stefan Cohn-Vossen und Fritz John teilnahm.

Die Mutter von Scholz schickt dessen Nachlass zu Verwandten in Polen; bei der Vertreibung der Deutschen gehen 1945 alle Unterlagen verloren. Zur Geschichte des Scholzschen Nachlass ist bekannt, was Hasse am 29.10.1949 an Olga Taussky schrieb:

> *Frau Scholz[6] schrieb mir zunächst über den Nachlass folgendes: Er war in einem Rohrplattenkoffer und mehreren Handkoffern bei seinen Verwandten Josef Stenzel in Günthersdorf bei Brieg/Oder[7] untergestellt. Als die Polen kamen, mussten diese Verwandten ihren Besitz räumen, und der gesamte Nachlass von Arnold Scholz nebst einigem ihm gehörigen Mobiliar wurde von den Polen „in Gewahrsam genommen". Bei der Lage der Dinge ist es uns heute wohl kaum möglich, an die Dinge heranzukommen.*

Dies hat sich in der Tat bewahrheitet, sodass der gesamte Nachlass von Scholz (ebenso wie derjenige von Emmy Noether) als vollständig verloren gelten muss; Hasse selbst nennt dies einen „ganz empfindlichen Verlust".

[6] Gemeint ist seine Mutter, die damals in Zürich lebte.
[7] Heute: Brzeg

1943

Scholz' letzte Arbeit [S26], die er seinem kurz zuvor verstorbenen Kollegen Hammerstein gewidmet hat, wird posthum veröffentlicht. Darin geht es um einen neuen Aufbau der Zahlentheorie algebraischer Körperweiterungen unendlichen Grades, in denen er frühere Ergebnisse von Krull [158, 159] und Herbrand [130] auf anderem Weg gewinnt. Zu dieser Zeit war in keinster Weise absehbar, dass diese Ideen einmal reiche Früchte tragen würden: nach den bahnbrechenden Arbeiten von Iwasawa wurde aus diesem Zweig der Zahlentheorie ein tragfähiger Ast, und heute lassen sich damit auch auf dem von Scholz selbst bebauten Feld tiefe Existenzsätze beweisen wie der bereits oben zitierte Satz von Ozaki [242], wonach es zu jeder endlichen p-Gruppe G einen p-Klassenkörperturm L/K von Zahlkörpern gibt mit $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq G$.

1947

O.H. Keller widmet seine Arbeit [151] „Arnold Scholz zum Gedächtnis".

1952

Olga Taussky veröffentlicht einen Nachruf [Ta52a] auf Arnold Scholz.

1979

Wolfram Jehne veröffentlich seine große Arbeit [147] über zahlentheoretische Knoten „In memoriam Arnold Scholz" im Crelle-Journal.

1982

Das Crelle-Journal veröffentlicht anlässlich seines 40. Todestages und der Publikation von Heider und Schmithals [129] ein Bild von Arnold Scholz.

Veröffentlichungen von Arnold Scholz

[S1] (mit H. Hasse), *Zur Klassenkörpertheorie auf Takagischer Grundlage*, Math. Z. **29** (1928), 60–69; sh. S. 5, 82, 86, 89, 99, 221

[S2] *Über die Bildung algebraischer Zahlkörper mit auflösbarer Galoisscher Gruppe*, Math. Z. **30** (1929), 332–356; cf. p. 10, 12, 13, 14, 109, 516

[S3] *Reduktion der Konstruktion von Körpern mit zweistufiger (metabelscher) Gruppe*, Sitz.ber. Heidelberger Akad. Wiss. 1929, Nr. 14, 3–15; cf. p. 14, 150, 175, 343, 353, 516

[S4] *Anwendung der Klassenkörpertheorie auf die Konstruktion von Körpern mit vorgeschriebener Gruppe*, Jber. DMV **38** (1929), 46; cf. p. 14, 125

[S5] *Zwei Bemerkungen zum Klassenkörperturm*, J. Reine Angew. Math. **161** (1929), 201–207; cf. p. 16, 125, 133, 134, 140, 343, 501, 521

[S6] *Zur simultanen Approximation von Irrationalzahlen*, Math. Ann. **102** (1930), 48–51; cf. p. 17, 36, 299

[S7] *Über das Verhältnis von Idealklassen- und Einheitengruppe in Abelschen Körpern von Primzahlpotenzgrad*, Sitz.ber. Heidelberger Akad. Wiss. 1930, Nr. 3, 31–55; sh. S. 20, 148, 343, 352, 353, 406, 500

[S8] *Zermelos neue Theorie der Mengenbereiche*, Jber. DMV **40** (1931), 42–43; sh. S. 21, 344, 500, 501

[S9] *Ein Beitrag zur Theorie der Zusammensetzung endlicher Gruppen*, Math. Z. **32** (1931), 187–189; sh. S. 21

[S10] *Die Abgrenzungssätze für Kreiskörper und Klassenkörper*, S.ber. Akad. Wiss. Berlin 1931, 417–426; sh. S. 6, 21, 97, 121, 175, 181, 188, 504

[S11] *Über die Beziehung der Klassenzahlen quadratischer Körper zueinander*, J. Reine Angew. Math. **166** (1932), 201–203; sh. S. 21, 99, 104, 167, 181, 184, 500

[S12] *Idealklassen und Einheiten in kubischen Körpern*, Monatsh. Math. Phys. **40** (1933), 211–222; sh. S. 22, 99, 364, 377

[S13] *Die Behandlung der zweistufigen Gruppe als Operatorengruppe*, Sitzungsber. Heidelberg. Akad. Wiss. 1933, No.2, 17–22; sh. S.

[S14] *Die Kreisklassenkörper von Primzahlpotenzgrad und die Konstruktion von Körpern mit vorgegebener zweistufiger Gruppe I*, Math. Ann. **109** (1933), 161–190; sh. S. 20, 22, 195, 270, 373, 389, 403, 512

[S15] *Über die Lösbarkeit der Gleichung* $t^2 - Du^2 = -4$, Math. Z. **39** (1934), 95–111; sh. S. 8, 20, 26, 148, 198, 500

[S16] *Berichtigung zu der Arbeit: „Die Kreisklassenkörper von Primzahlpotenzgrad und die Konstruktion von Körpern mit vorgegebener zweistufiger Gruppe I“*, Math. Ann. **109** (1934), 764; sh. S.

[S17] (mit O. Taussky), *Die Hauptideale der kubischen Klassenkörper imaginärquadratischer Zahlkörper: ihre rechnerische Bestimmung und ihr Einfluss auf den Klassenkörperturm*, J. Reine Angew. Math. **171** (1934), 19–41; sh. S. 5, 26, 99, 104, 105, 198, 373, 374, 414, 500, 501

[S18] *Die Kreisklassenkörper vom Primzahlpotenzgrad und die Konstruktion von Körpern mit vorgegebener zweistufiger Gruppe II*, Math. Ann. **110** (1935), 633–649; sh. S. 31, 33, 195, 218, 270

[S19] *Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nicht-abelscher Körpererweiterungen I*, J. Reine Angew. Math. **175** (1936), 100–107; sh. S. 31, 33, 36, 175, 270

[S20] *Konstruktion algebraischer Zahlkörper mit beliebiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung I*, Math. Z. **42** (1937), 161–188; sh. S. 38, 266, 270

[S21] *Minimaldiskriminanten algebraischer Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. **179** (1938), 16–21; sh. S. 19, 36, 305, 307, 503

[S22] *Einführung in die Zahlentheorie*, Sammlung Goeschen. 1131) Berlin: de Gruyter 136 S. (1939); 2. Aufl. 136 S. (1945); 2. Aufl. überarb. v. B. Schöneberg, 128 S. (1955); 5. Aufl. überarb. und herausgegeben von B. Schöneberg, 128 S. (1973); sh. S. 104

[S23] *Abelsche Durchkreuzung*, Monatsh. Math. Phys. **48** (1939), 340–352; sh. S. 36, 40, 305, 307

[S24] *Zur Abelschen Durchkreuzung*, J. Reine Angew. Math. **182** (1940), 216; sh. S. 40

[S25] *Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nicht-abelscher Körpererweiterungen II*, J. Reine Angew. Math. **182** (1940), 217–234; sh. S. 32, 36, 38, 175, 305, 307, 517, 520

[S26] *Zur Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern*, J. Reine Angew. Math. **185** (1943), 113–126; sh. S. 44, 337

[S27] *Spezielle Zahlkörper* (*Special number fields*), Bestimmt für: Enzykl. math. Wiss. 2. Aufl. I (unvollendet); sh. S. 258, 316

2. Olga Taussky: Leben und Werk

Franz Lemmermeyer

Biographie

Olga Taussky[1] wurde am 30. August 1906 in Olmütz geboren, das damals noch Teil von Österreich-Ungarn war, später als Olomouc zur Tschechoslowakei kam, und das heute zu Tschechien gehört. Drei Jahre nach ihrer Geburt zogen ihre Eltern nach Wien, 1916 nach Linz, wo ihrem Vater die Stelle als Direktor einer Essigfabrik angeboten worden war. Dort besuchte sie später das Gymnasium und wählte den altsprachlichen Zug; bis zum Abschluss hatten sich ihre Interessen in den mathematischen Bereich verschoben, und ihre Abschlussarbeit behandelte den Binomial- und Polynomialsatz. Für Details zu Tausskys Biographie sei neben [29] auf ihre eigenen Veröffentlichungen [Ta83a, Ta95] verwiesen.

Philip Furtwängler

1925 immatrikulierte Taussky sich an der Universität Wien und belegte Vorlesungen über Zahlentheorie bei Philip Furtwängler. Philipp Furtwängler wurde am 21.4.1869 in Elze bei Hannover geboren. Er nahm 1889 sein Studium bei Felix Klein in Göttingen auf, und arbeitete ab 1898 im Preussischen Geodätischen Institut in Potsdam.

Furtwängler hatte Hilberts Zahlbericht studiert und dessen Programm der Theorie unverzweigter abelscher Erweiterungen, das Hilbert in seinen Artikeln skizziert hatte, ausgeführt: insbesondere gelang ihm der Beweis der Existenz des Hilbertklassenkörpers und der erste allgemeine Beweis des Reziprozitätsgesetzes für ℓ-te Potenzreste (Kummer hatte noch die Voraussetzung machen müssen, dass die Primzahl ℓ regulär ist, dass also die Klassenzahl des Körpers der ℓ-ten Einheitswurzeln nicht durch ℓ teilbar ist).

Nach diesen mathematischen Erfolgen und Lehrtätigkeiten in Aachen und Bonn wird Furtwängler 1912 Ordinarius in Wien. In den späten 1920ern, als Furtwängler fast schon 60 Jahre alt war, gelang ihm der Beweis der letzten

[1] Ursprünglich „Taußky“; Olga änderte die Schreibweise 1934 nach ihrer Emigration in die USA.

Hilbertschen Vermutung, nämlich des Hauptidealsatzes, wonach jedes Ideal des Grundkörpers im Hilbertklassenkörper zum Hauptideal wird oder, wie Scholz es nannte, kapituliert. 1938 erfolgte seine Emeritierung (aus Altersgründen), und er stirbt am 19.5.1940 in Wien.

Nach seinem Beweis des Hauptidealsatzes versuchte Furtwängler, mit gruppentheoretischen Methoden die Kapitulation von Idealklassen genauer zu untersuchen. Im Falle von elementarabelschen Idealklassengruppen vom Exponenten 2 gelang es ihm zu zeigen, dass man eine Basis der Klassengruppe so wählen konnte, dass jede Basisklasse in einer geeigneten unverzweigten quadratischen Erweiterung kapituliert. Olga Taussky erhielt von Furtwängler als Thema ihrer Dissertation die entsprechende Frage für elementarabelsche Gruppen ungerader Primzahlordnung. Taussky promovierte damit 1930 und verbrachte dann ihr letztes Semester an der Universität Zürich, wo sie Speiser, Fueter und Gut traf. Auf den Tagungen der DMV in Königsberg (1930) und Bad Elster (1931) knüpfte sie nicht nur Kontakte mit Arnold Scholz, den sie bereits in Wien gesehen hatte, sondern traf 1931 auch auf Richard Courant, der jemanden suchte, der Magnus und Ulm bei der Herausgabe des zahlentheoretischen Teils von Hilberts Gesammelten Werken helfen sollte.

David Hilbert

Courants Wahl fiel auf Olga Taussky, die daraufhin Briefe an verschiedene Mathematiker schrieb, in denen sie nach etwaigen Fehlern in Hilberts Zahlbericht fragte. Insbesondere Fueter und Speiser, die sie in Zürich getroffen hatte, schrieben ihr Listen mit Korrekturen. Später hat Taussky Hilberts Fehler oft angesprochen. Welche „Fehler in allen Größenordnungen“ das waren, bleibt allerdings Spekulation; richtig ist, dass Hilbert vermutet hatte, die Klassenzahl des Hilbertschen p-Klassenkörpers sei nicht durch p teilbar, und dass Furtwängler dies bei seinem Aufbau von Hilberts Programm korrigieren musste.

Der Brief von Furtwängler an Taussky in diesem Zusammenhang ist erhalten; Furtwängler sind allerdings nur einige Fehler in Hilberts Arbeiten über relativquadratische und relativabelsche Zahlkörper aufgefallen. In seinem Brief vom 25. November 1931 schreibt er:

> *Bemerkungen zu D. Hilbert, Über die Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper*, Gött. Nachr. 1898.
>
> **S. 378, dritter Absatz.** Die Einheit ε ist niemals total positiv, sondern nur kongruent dem Quadrat einer Zahl mod. 4. Eine total positive primäre Einheit existiert nur, wenn die Klassenzahl des Grundkörpers im gewöhnlichen Sinne gerade ist. Entsprechend ist auch die Definition der primären Einheit in Satz 9 zu modifizieren.
>
> **S. 397, Satz 16b.** Der erste und letzte Satz dieses Satzes ist unrichtig.

> **S. 397, letzter Absatz.** Der Inhalt von Satz 16b, soweit er richtig ist, charakterisiert natürlich den Klassenkörper nicht.
>
> Andere Unrichtigkeiten sind mir augenblicklich nicht in Erinnerung.

Beim Fehler auf S. 378 dürfte es sich um ein einfaches Versehen seitens Hilberts handeln; Satz 16b behauptet, dass die Klassenzahl des Klassenkörpers eines Zahlkörpers mit Klassenzahl 4 stets ungerade ist – dass dies nicht immer richtig ist, hat Furtwängler früh erkannt und 1916 in [86] noch einmal klar ausgesprochen. Auch der Fehler im letzten Absatz, wonach in jedem der drei unverzweigten quadratischen Erweiterungen alle Idealklassen kapitulieren, hängt mit dieser falschen Vermutung zusammen.

Taussky erwähnte auch des öfteren Kritik an Hilberts Zahlbericht, die von verschiedenen Seiten an sie herangetragen worden war. In [Ta83a, p. 499] bemerkt sie, dass Fueter und Speiser sich darüber beschwert hätten, dass die Darstellung nicht die beste für die algebraische Zahlentheorie gewesen sei, und schreibt dann, dass diese vielleicht eine Darstellung wie in Dicksons *Algebren und ihre Zahlentheorie* bevorzugt hätten; mir fällt die Vorstellung, jemand könne Hilberts präzise Darstellung mit dem etwas konfusen Schreibstil Dicksons eintauschen wollen, allerdings sehr schwer. Auch der Satz Emmy Noethers ([Ta83a, p. 499]), wonach Artin gesagt haben solle, dass der Zahlbericht die Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie um Jahre zurückgeworfen habe, ist in dieser Schärfe wenig glaubhaft. Richtig ist, dass die Darstellung Dedekinds moderner war als die Hilberts; ebenso richtig ist aber, dass Dedekind nicht gelesen und vor Emmy Noether wohl auch nicht richtig verstanden wurde: die großen Zahlentheoretiker im frühen 20. Jahrhundert haben algebraische Zahlentheorie aus dem Zahlbericht gelernt. Diese Einschätzung deckt sich mit dem, was Artin in [11] schreibt:

> *Die Darstellung Dedekinds ist heute für uns zwar sehr leicht lesbar und elegant, war aber für die damalige Zeit zu modern. So wurde denn der im Jahre 1897 im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung erschienene Zahlbericht Hilberts von allen Mathematikern mit großer Freude begrüßt.*

In der Tat legt dies nahe, dass nach Artins Meinung nicht der Zahlbericht die Entwicklung der Zahlentheorie gelähmt hat, sondern dass Dedekind seiner Zeit um mindestens 20 Jahre voraus war.

Zur Bearbeitung der Hilbertschen Werke hielt sich Taussky von 1931 bis 1932 in Göttingen auf; insbesondere besuchte sie Artins Vorträge über Klassenkörpertheorie und sorgte für deren Veröffentlichung. Im Herbst 1932 kehrte sie nach Wien zurück und wurde dort Assistentin von Menger. Sie bewarb sich um ein Stipendium am Girton College in Cambridge, erhielt aber auch eine Einladung nach Bryn Mawr. So konnte Taussky 1934 nach Bryn Mawr zu Emmy Noether gehen; erst danach ging sie nach Girton. Bei ihren Besuchen in London traf sie den Iren John Todd, den sie 1938 heiratete. Den

Krieg verbrachten die beiden in Belfast, danach nahm Todd 1947 eine Stelle in den USA an.

In den Folgejahren begann sich Olga Taussky-Todd vor allem für Matrizen zu interessieren; 1957 erhielten beide einen Ruf ans California Institute of Technology (CALTECH) in Pasadena. Olga Taussky starb dort am 7. Oktober 1995; John Todd folgte ihr 2007.

Taussky und ihre Arbeiten in Klassenkörpertheorie

In der Klassenkörpertheorie galt Tausskys Interesse vor allem dem Thema der Hauptidealisierung im Hilbertklassenkörper, ein Thema, das sie von ihrem Doktorvater Furtwängler geerbt hatte. Bereits Dedekind wusste, dass Ideale in Erweiterungen von Zahlkörpern Hauptideale werden können, und Arnold Scholz prägte dafür das Wort „Kapitulation"; Hintergrund war das Wortspiel zwischen dem lateinischen Wort caput für Haupt und dem deutschen Hauptideal. Die Ordnung eines Ideals in der Klassengruppe eines Zahlkörpers K, das in einer Erweiterung L/K kapituliert, teilt den Grad $(L : K)$; alle kapitulierenden Ideale bilden eine Untergruppe von $\mathrm{Cl}(K)$, welche man den Kapitulationskern $\kappa_{L/K}$ nennt; dieser ist Teil der exakten Sequenz

$$1 \longrightarrow \kappa_{L/K} \longrightarrow \mathrm{Cl}(K) \longrightarrow \mathrm{Cl}(L).$$

Die Berechnung des Kapitulationskerns erfordert in der Regel genaue Kenntnisse der Einheitengruppen und ist daher recht schwierig; im Falle, dass L/K eine unverzweigte abelsche Erweiterung ist, kann man aber mit Klassenkörpertheorie wesentliche Ergebnisse erzielen.

Der Hauptidealsatz

Der Hauptidealsatz, wonach jedes Ideal eines Zahlkörpers K in dessen Hilbertklassenkörper, also der maximalen abelschen unverzweigten Erweiterung L von K, kapituliert, wurde von Hilbert auf der Grundlage seines Beweises im Falle von unverzweigten quadratischen Erweiterungen von Zahlkörpern mit Klassenzahl 2 (sh. [135, 136]) vermutet. Hilbert skizzierte die Theorie solcher unverzweigter abelscher Erweiterungen, und Furtwängler führte das Hilbertsche Programm zwischen 1902 und 1913 aus. Insbesondere bewies er die Existenz des „Hilbertklassenkörpers" eines beliebigen Zahlkörpers K, einer unverzweigten abelschen Erweiterung L von K, deren Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathrm{Cl}(K)$ isomorph zur Idealklassengruppe von K ist (sh. [83, 84, 85]). Furtwängler konnte auch das Reziprozitätsgesetz für ℓ-te Potenzreste aus seiner Theorie ableiten; Kummer hatte das Reziprozitätsgesetz nur für reguläre Primzahlen beweisen können. Neben dem „allgemeinen Reziprozitätsgesetz" blieb von Hilberts Vermutungen damit nur eine als unbewiesen zurück: der Hauptidealsatz, wonach jedes Ideal des Grundkörpers in seinem

Hilbertklassenkörper kapituliert. Auch nachdem Takagi die Furtwänglersche Theorie auf verzweigte Erweiterungen ausgedehnt und damit eine allgemeine Theorie der abelschen Erweiterungen geschaffen hatte, blieb der Hauptidealsatz außerhalb der Reichweite der damals zur Verfügung stehenden Methoden.

Am Ende der 1920er waren nur wenige Ergebnisse über die Kapitulation von Idealklassen im Hilbertklassenkörper bekannt:

1. Hilberts Satz 94: ist L/K eine zyklische unverzweigte Erweiterung L/K von Primzahlgrad ℓ, dann gibt es eine Idealklasse der Ordnung ℓ in K, welche in L kapituliert.

2. Ist die Klassengruppe von K zyklisch von Primzahlordnung ℓ, dann ist die Klassenzahl des Hilbertklassenkörpers K^1 von K nicht durch ℓ teilbar. Insbesondere kapitulieren alle Ideale von K in K^1. Die Hilbertsche Vermutung, wonach dies auch im nichtzyklischen Falle gelten sollte, hat Furtwängler widerlegen können.

3. Furtwängler hatte schon 1916 die Kapitulation von Idealklassen in Zahlkörpern untersucht, deren Klassengruppe vom Typ $(2,2)$ ist. In diesem Fall ist die Klassenzahl des Hilbertklassenkörpers K^1 genau dann ungerade, wenn alle Idealklassen des Grundkörpers in allen drei unverzweigten quadratischen Erweiterungen kapitulieren; andernfalls ist die 2-Klassengruppe von K^1 zyklisch.

Weitere Fortschritte wurden erst möglich, als Artin sein Reziprozitätsgesetz fand, also einen kanonischen Isomorphismus zwischen der Klassengruppe eines Zahlkörpers und der Galoisgruppe des dazugehörigen Klassenkörpers. Der Transfer $\iota : \mathrm{Cl}(K) \longrightarrow \mathrm{Cl}(K^1)$ von Idealklassen des Grundkörpers in die Klassengruppe seines Hilbertklassenkörpers muss nach Artins Reziprozitätsgesetz einem Homomorphismus $\mathrm{Ver} : \mathrm{Gal}(K^1/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^2/K^1)$ entsprechen, den Artin die „Verlagerung“ nannte. Wie sich später herausstellte, hatte bereits Schur diese gruppentheoretische Konstruktion benutzt, und sogar das Gaußsche Lemma in der Theorie der quadratischen Reste kann als Spezialfall einer Verlagerung aufgefasst werden. Damit hatte man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cl}(K^1) & \xrightarrow{\mathrm{Art}} & G'/G'' \\ {\scriptstyle\iota}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\mathrm{Ver}} \\ \mathrm{Cl}(K) & \xrightarrow{\mathrm{Art}} & G/G' \end{array}$$

Damit konnte der Hauptidealsatz auf eine rein gruppentheoretische Behauptung zurückgeführt werden: ist G eine beliebige endliche Gruppe, dann ist $\mathrm{Ver} : G/G' \longrightarrow G'/G''$ die triviale Abbildung (sh. Artin [7]). Die Artinsche Konstruktion liefert auch die Kapitulation von Idealklassen in Teilkörpern

des Hilbertklassenkörpers: ist H eine beliebige Untergruppe mit endlichem Index in einer Gruppe G, und ist $G = \bigcup_{j=1}^{n} g_j H$ die Zerlegung von G in Linksnebenklassen, dann gibt es zu jedem $g \in G$ und jedem g_i ein $i' \leq n$ mit $gg_iH = g_{i'}H$. Die Abbildung

$$V : g \longmapsto \prod_{i=1}^{r} g_{i'}^{-1} g g_i \cdot H'$$

stellt sich als Homomorphismus $V : G \longrightarrow H/H'$ heraus, der nicht von der Wahl der Vertreter g_j abhängt. Da H/H' abelsch ist, muss der Kern von V die Kommutatorgruppe G' enthalten, und V induziert einen Homomorphismus $\mathrm{Ver}_{G,H} : G/G' \longrightarrow H/H'$.

Als Beispiel wollen wir eine 2-Gruppe G und eine Untergruppe H vom Index 2 betrachten. Sei z irgend ein Element in $G \setminus H$. Dann gilt

$$\mathrm{Ver}_{G,H}(g) = \begin{cases} g^2 H' & \text{if} \quad g \in G \setminus H, \\ z^{-1} g z g H' & \text{if} \quad g \in H. \end{cases} \tag{1}$$

In der Tat ist $\mathrm{Ver}(g) = g \cdot z^{-1} g z H'$, und im Falle $g \in G \setminus H$ können wir $z = g$ setzen, was auf $\mathrm{Ver}(g) = g^2 H'$ führt.

Zusammen mit Otto Schreier, einem ehemaligen Doktoranden Furtwänglers, berechnete Artin die Bilder der Verlagerungsabbildung $\mathrm{Ver}_{G,G'}$ für alle nichtabelschen p-Gruppen G der Ordnung $\leq p^5$. Schreier hatte seine Doktorarbeit über die Erweiterung von Gruppen geschrieben und war so einer der wenigen Fachleute auf dem Gebiet. Als Artin and Schreier nicht mehr weiterkamen, fragten sie Furtwängler um Rat. Taussky [Ta83a] schreibt, dass man Furtwängler daraufhin wochenlang nicht mehr gesehen habe, und am Ende des Sommers 1928 hatte der fast sechzigjährige Furtwängler den Wettlauf mit Schreier und Artin gewonnen: er fand einen (ziemlich technischen) Beweis des gruppentheoretischen Hauptidealsatzes; erst später konnte der Furtwänglersche Beweis wesentlich vereinfacht werden.

Furtwängler war zu Beginn sehr optimistisch, mit den neuen Methoden Artins alle offenen Fragen in Sachen Kapitulation erledigen zu können; dies stellte sich aber schnell als zu voreilig heraus. Sein erstes Resultat in dieser Richtung war das folgende:

Satz 7 (Furtwängler 1930)**.** *Sei K ein Zahlkörper mit elementarabelscher 2-Klassengruppe. Dann hat die 2-Klassengruppe eine Basis $c_1, \ldots, c_n$, sodass jede Klasse c_i in einer unverzweigten quadratischen Erweiterung kapituliert.*

Seine Beweisstrategie ist die folgende:

a) benutze Artins Reziprozitätsgesetz, um die Frage auf ein gruppentheoretisches Problem zurückzuführen;

b) ersetze die Gruppe G durch eine einfachere Gruppe G_1, für welche $G_1/G_1' \simeq G/G'$ und G_1' elementar-abelsch ist;

c) ersetze G_1 durch eine Gruppe G_2, für welche der Rang von G_2' maximal ist; solche Gruppen heißen vollständig.

Diese maximalen Gruppen haben dann eine Struktur, die eine explizite Berechnung der Verlagerung zulassen. Damit erhält man folgenden

Satz 8. *Sei K ein Zahlkörper mit elementar-abelscher 2-Klassengruppe vom Rang r, und sei $G = \mathrm{Gal}(K^2/K)$. Ist G vollständig und haben die Kommutatoren Ordnung 2 und sind invariant, dann gibt es r quadratische Teilerweiterungen K_j/K von K^1/K mit folgenden eigenschaften:*

1. *Es gibt eine eindeutig bestimmte Idealklasse c_j, die in K_j/K kapituliert.*
2. *Die Klassen $\{c_1, \ldots, c_r\}$ bilden eine Basis von $\mathrm{Cl}_2(K)$.*

Furtwängler schlug Taussky vor, das entsprechende Problem für p-Klassengruppen bei ungeraden Primzahlen p zu untersuchen. Taussky fand in der Tat eine Verallgemeinerung, aber vermutlich nicht in der von Furtwängler erhofften Richtung. In der Tat: sei K ein Zahlkörper mit elementar-abelscher p-Klassengruppe. Dann hat $G = \mathrm{Gal}(K^2/K)$ die Eigenschaft $G/G' = \langle S_1, \ldots, S_n \rangle$, wobei die S_i Erzeugende von G sind mit $S_i^p \in G'$. Mit $T_{jk} = [S_j, S_k] = S_j^{-1} S_k^{-1} S_j S_k$ bezeichnet Taussky[2] den Kommutator von S_j und S_k; damit ist $S_i^p = \prod_{j<k} T_{jk}^{g_{jk}^{(i)}}$ für Polynome $g_{jk}^{(i)}(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$, wo $\Delta_i = S_i - 1$. Taussky behauptet nun

Satz 9 (Taussky 1932). *Sei K ein Zahlkörper mit elementar-abelscher p-Klassengruppe. Dann gibt es eine Basis $c_1, \ldots, c_n$ der p-Klassengruppe, sodass jedes c_i in einer unverzweigten zyklischen Erweiterung von Primzahlgrad kapituliert, falls die Polynome $g_{jk}^{(i)}$ modulo p nur Terme vom Grad $\geq p-2$ enthalten.*

Weil die Bedingung $\deg g_{jk}^{(i)} \geq p - 2$ für $p = 2$ trivialerweise erfüllt ist, enthält Tausskys Ergebnis dasjenige von Furtwängler als Spezialfall.

Taussky konnte noch zeigen, dass der von Furtwängler erwartete verschärfte Hauptidealsatz nicht gilt, wenn man annimmt, dass sich die gruppentheoretischen Gegenbeispiele körpertheoretisch realisieren lassen:

Satz 10 (Theorem III). *Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ und jede ungerade Primzahl p gibt es eine metabelsche Gruppe G mit elementar-abelscher Faktorgruppe $G/G' = \langle S_1, \ldots, S_n \rangle$ und der Eigenschaft, dass für jede unverzweigte Erweiterung L/K mit Galoisgruppe G der verschärfte Hauptidealsatz nicht gilt.*

[2] Es ist ziemlich charakteristisch für Tausskys oft verwirrende Darstellung, dass die T_{jk} im Hauptsatz benutzt, aber erst später definiert werden.

Kapitulation in unverzweigten Abelschen Erweiterungen

Etwas später fragte Scholz, ob Taussky an einer gemeinsamen Arbeit über den 3-Klassenkörperturm von imaginär-quadratischen Zahlkörpern k mit 3-Klassengruppen vom Typ $(3,3)$ interessiert wäre. Dies führte nach einigen Jahren Arbeit zur ihrer gemeinsamen Veröffentlichung [Ta34c]. In diesem Artikel wurde Information über die Kapitulation von Idealklassen der Ordnung 3 in den vier unverzweigten zyklischen kubischen Erweiterungen von K benutzt, um Informationen über die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(k^2/k)$ zu erhalten. In einigen Fällen reichten diese Informationen aus, um das Abbrechen des 3-Klassenkörperturms nach dem zweiten Schritt nachzuweisen. Der Artikel [Ta34c] ist in einer Sprache geschrieben, mit der viele heutige Zahlentheoretiker wenig anzufangen wissen. Wir wollen uns daher etwas näher mit dieser Sprache befassen und dazu den einfacheren Fall der Kapitulation von Idealklassen in quadratischen unverzweigten Erweiterungen besprechen.

Gruppenerweiterungen von (ℓ,ℓ).

Sei ℓ eine Primzahl und k ein Zahlkörper mit $\mathrm{Cl}_\ell(k) \simeq (\ell,\ell)$. Seien k^1 und k^2 der erste bzw. zweite Hilbertsche ℓ-Klassenkörper von k, und setze $G = \mathrm{Gal}(k^2/k)$. Dann ist G eine metabelsche ℓ-Gruppe, und insbesondere ist die Kommutatorgruppe G' abelsch. Für $R,S,T \in G$ setzen wir $S^T := T^{-1}ST$, $R^{S+T} = R^S R^T$ und $R^{nS} = (R^n)^S$. Dann gelten für alle $A,B \in G'$ und alle $R,S,T \in G$ die folgenden Relationen:

$$\begin{array}{llcllcl} 1. & A^{S+T} & = & A^{T+S}; & 2. & A^{ST} & = & A^{TS}; \\ 3. & (AB)^S & = & A^S B^S; & 4. & A^{(R+S)T} & = & A^{RT+ST}. \end{array}$$

Die Verifikation dieser Relationen ist leicht. Das Rechnen mit Elementen außerhalb von G' erfordert allerdings etwas Sorgfalt: mit $A = [S,T]$ gilt beispielsweise $S^{T-1} = T^{-1}STS^{-1} = SAS^{-1} = A^S$ und $S^{-1+T} = S^{-1}T^{-1}ST = A$.

Jetzt wollen wir zusätzlich annehmen, dass G eine ℓ-Gruppe ist, die von zwei Elementen S und T erzeugt wird, und dass $G/G' \simeq (\ell,\ell)$ ist. Wir führen nun eine Reihe von elementaren Ergebnissen über solche Gruppen an (sh. Furtwängler [90]):

Lemma 1. *Es gilt*

$$[S^i,T^j] = [S,T]^{(1+S+S^2+\ldots+S^{i-1})(1+T+T^2+\ldots T^{j-1})}. \tag{2}$$

Beweis. Aus $T^{-1}ST = SA$ folgt $T^{-1}S^2T = SASA = S^2A^{S+1}$, und Induktion ergibt

$$T^{-1}S^iT = (T^{-1}ST)^i = S^iA^{1+S+S^2+\ldots+S^{i-1}}.$$

Jetzt finden wir

$$\begin{aligned} T^{-2}S^iT^2 &= T^{-1}S^iA^{1+S+S^2+\ldots+S^{i-1}}T = T^{-1}S^iTA^{(1+S+S^2+\ldots+S^{i-1})T} \\ &= S^iA^{(1+S+S^2+\ldots+S^{i-1})(1+T)} \end{aligned}$$

etc. □

Beachte, dass G auf G' via Konjugation operiert. Jetzt können wir zeigen, dass G' als G-Modul zyklisch ist:

Lemma 2. *Die Kommutatorgruppe G' wird als G-Modul vom Kommutator $A = [S,T] = S^{-1}T^{-1}ST$ erzeugt, d.h. jedes $B \in G'$ kann in der Form $B = A^{F(S,T)}$ geschrieben werden, wo der symbolische Exponent $F(S,T) \in \mathbb{Z}[S,T]$ ein Polynom in S und T ist.*

Beweis. Sei $\{A\} = \{A^{F(S,T)}, F \in \mathbb{Z}[S,T]\}$. Dann gilt offenbar $\{A\} \subseteq G'$. Andererseits hat jeder Kommutator in G die Form $[S^i, T^j]$. Die Behauptung folgt jetzt aus der Identität (2). □

Aus den Relationen (1) – (4) folgt, dass die Menge

$$\mathfrak{M} = \{f \in \mathbb{Z}[S,T] : A^f = 1\} = \mathrm{Ann}(A)$$

ein Ideal im Polynomring $\mathbb{Z}[S,T]$ ist. Es wird nützlich sein, die Abkürzungen $X = S - 1$ und $Y = T - 1$ einzuführen. Die folgenden Beobachtungen sind fast offensichtlich:

Lemma 3. *Mit der eben eingeführten Notation gilt:*

1. $\mathfrak{M} = (1)$ *genau dann, wenn* $A = 1$, *d.h. wenn* G *abelsch ist.*

2. *Es gibt ein* $m \in \mathbb{N}$ *mit* $\ell^m \in \mathfrak{M}$.

3. $\mathbb{Z}[X,Y] = \mathbb{Z}[S,T]$.

4. $G' \simeq \mathbb{Z}[X,Y]/\mathfrak{M}$.

5. G' *ist zyklisch als Gruppe genau dann wenn* $X, Y \in \mathfrak{M}$. *Genauer ist* $G' \simeq \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{M} = (\ell^m, X, Y)$.

Beweis. Es gibt fast nichts zu beweisen:

1. Offenbar ist G abelsch $\iff$ $G' = 1$ $\iff$ $A = 1$ $\iff$ $\mathfrak{M} = 1$.

2. Da G' eine endliche ℓ-Gruppe ist, muss es einen Exponenten m geben mit $A^{\ell^m} = 1$.

3. Da jedes Polynom in S und T als Polynom in X and Y geschrieben werden kann und umgekehrt (Polynome haben endliche Taylorreihen), gilt $\mathbb{Z}[X,Y] = \mathbb{Z}[S,T]$.

4. Der Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}[X,Y] \longrightarrow G' : F(X,Y) \longmapsto A^{F(X,Y)}$ von der additiven Gruppe $\mathbb{Z}[X,Y]$ in die multiplikative Gruppe G' ist surjektiv, und sein Kern ist nach Definition $\mathfrak{M}$.

5. Ist $\mathfrak{M} = (\ell^m, X, Y)$, dann gilt $\mathbb{Z}[X,Y]/\mathfrak{M} \simeq \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}$. Ist umgekehrt G' zyklisch, dann mus $A^S = A^n$ für eine ganze Zahl $n \geq 0$ gelten. Da A^S und A dieselbe Ordnung haben, muss $\mathrm{ggT}(n,\ell) = 1$ sein. Aus $A = A^{S^\ell} = A^{n^\ell}$ folgern wir, dass $1 \equiv n^\ell \bmod \ell^m$ ist. Aber daraus folgt $n \equiv 1 \bmod \ell^m$, also $A^S = A$ und $A^X = 1$.

□

Das folgende Resultat wird recht nützlich sein:

Lemma 4. *Ist $\mathfrak{M} \neq (1)$, dann gilt $\mathfrak{L} = (\ell, X, Y) \mid \mathfrak{M}$.*

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass es eine ganze Zahl $a \in \mathbb{N}$ gibt mit $\ell^a \in \mathfrak{M}$: dies folgt daraus, dass G' eine endliche ℓ-Gruppe ist. Wegen $S^\ell \in \langle A \rangle$ gilt $A^{S^\ell} = A$ und daher $S^\ell - 1 \in \mathfrak{M}$. Jetzt zeigt die Kongruenz $0 \equiv S^\ell - 1 = (X+1)^\ell - 1 = X^\ell - \ell P(X) \bmod \mathfrak{M}$ für ein $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$, dass $X^\ell \equiv \ell P(X) \bmod \mathfrak{M}$ ist. Also gibt es ein $b \in \mathbb{N}$ mit $X^{\ell^b} \in \mathfrak{M}$ und $Y^{\ell^b} \in \mathfrak{M}$.

Jetzt sei $L = r\ell + sX + tY$ irgendein Polynom in $\mathfrak{L}$. Nach dem bereits Bewiesenen ist $L^{\ell^m} \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann zeigt aber

$$(1+L)^{-1} \equiv 1 - L + L^2 - L^3 + L^4 \pm \ldots \bmod \mathfrak{M},$$

dass $1 + L$ eine Einheit modulo $\mathfrak{M}$ ist, da die geometrische Reihe auf der rechten Seite endlich ist.

Ähnlich zeigt man, dass $c + L$ eine Einheit ist, wenn $\ell \nmid c$ gilt; dies zeigt, dass jedes Element von $\mathbb{Z}[X,Y] \setminus \mathfrak{L}$ eine Einheit modulo $\mathfrak{M}$ ist, und damit haben wir $\mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{M}$. □

Als nächstes untersuchen wir Untergruppen vom Index ℓ in G. Der Einfachkeit halber wollen wir annehmen, dass G/G' elementar-abelsch ist; dann sind diese Untergruppen gegeben durch

$$C_S = \langle S, G' \rangle,\ C_T = \langle T, G' \rangle,\ C_{ST} = \langle ST,\ G' \rangle, \ldots, C_{ST^{\ell-1}} = \langle ST^{\ell-1}, G' \rangle.$$

Nach Artins Reziprozitätsgesetz entsprtechen diesen Untergruppen vom Index ℓ in G Untergruppen der Ordnung ℓ in der Klassengruppe $\mathrm{Cl}_\ell(k)$; wie Scholz und Taussky wollen wir die Idealklasse, die der Nebenklasse S^aT^bG' entspricht, ebenfalls mit S^aT^b bezeichnen. Weiter sei κ_S die Untergruppe der Idealklassen in $\mathrm{Cl}_\ell(k)$, welche in der von C_S festgelassenen Erweiterung kapitulieren, und definieren κ_T usw. entsprechend.

S^2	$=$	A^{F_S}	T^2	$=$	A^{F_T}	$(ST)^2$	$=$	$A^{F_{ST}}$
X	$=$	$S-1$	Y	$=$	$T-1$	Z	$=$	$ST-1$
$X\,F_S$	$\equiv$	0	$Y\,F_T$	$\equiv$	0	$Z\,F_{ST}$	$\equiv$	0
$Y\,F_S$	$\equiv$	$2+X$	$X\,F_T$	$\equiv$	$-2-Y$	F_{ST}	$\equiv$	F_S+F_T-1-Y
X^2	$\equiv$	$-2X$	Y^2	$\equiv$	$-2Y$	Z^2	$\equiv$	$-2Z$

Tabelle 2.1. Grundrelationen für $G/G' \simeq (2,2)$

$\ell = 2$: Gruppentheorie

Von jetzt ab sei $\ell = 2$ und $\mathrm{Cl}_2(k) \simeq (2,2)$. Wir werden außer den bereits gegebenen Definitionen und Kongruenzen mod $\mathfrak{M}$ noch die folgenden brauchen:

In der Tat:

- Aus $S^2 = A^{F_S}$ folgt $A^{F_S X} = (S^2)^X = S^{2S-2} = 1$, also $F_S X \in \mathfrak{M}$.
- Hier finden wir

$$A^{F_S Y} = A^{F_S T - F_S} = S^{2T} S^{-2} = S^{-1} A S A = A^{S+1} = A^{X+2}.$$

- Es ist $A^{X^2} = A^{S^2-2S+1}$; weil $S^2 = A^{F_S}$ mit A kommutiert, ist $A^{S^2} = 1$ und damit $A^{X^2} = A^{1-2S+1} = A^{-2X}$. Daraus folgt die Behauptung $X^2 \equiv -2X \bmod \mathfrak{M}$.
- Schließlich ist

$$A^{F_{ST}} = (ST)^2 = S^2 S^{-1} T^2 S A = A^{F_S} S^{-1} A^{F_T} S A = A^{F_S + F_T S + 1}$$

und $F_S + F_T S + 1 = F_S + F_T + F_T X + 1 \equiv F_S + F_T - 1 - Y \bmod \mathfrak{M}$.

Die folgende Proposition ist bis auf kleinere Modifikationen aus Tausskys Artikel [Ta37b]:

Proposition 2. *Ist $\mathfrak{M} \neq (1)$, dann kann man S und T so wählen, dass $\mathfrak{M} = (2^n, X, Y+2)$ für ein $n \geq 1$ gilt. Ist insbesondere G eine 2-Gruppe mit $G/G' \simeq (2,2)$, dann ist G' zyklisch.*

Beweis. Nach Lemma 4 gilt $\mathfrak{L} \mid \mathfrak{M}$, und die Kongruenz $F_{ST} \equiv F_S + F_T - 1 - Y \bmod \mathfrak{M}$ zeigt, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, dass $F_S(0,0) \not\equiv 0 \bmod 2$ ist; anderfalls ersetzen wir einfach T durch ST und bemerken, dass dies $A = [S,T] = [S,ST]$ unverändert lässt.

Die Grundrelationen $X^2 \equiv -2X$ und $Y^2 \equiv -2Y$ zeigen, dass jedes Polynom in X, Y als $\mathbb{Z}$-Linearkombination von X, Y und XY geschrieben werden kann. Daher können wir

$$F_S \equiv u + aX + bY + cXY \bmod \mathfrak{M}$$

für $u, a, b, c \in \mathbb{Z}$ und ungerades u schreiben. Multiplizieren wir diese Gleichung mit X, dann erhalten wir

$$0 \equiv XF_S \equiv (u-2a)X + (b-2c)XY, \tag{3}$$

und analog

$$2 + X \equiv Y\,F_S \equiv (u-2b)Y + (a-2c)XY. \tag{4}$$

Sei k die kleinste natürliche Zahl derart, dass $XY^k \equiv 0$ ist; ein solches k existiert, da $Y^2 \equiv 2Y$ und die Ordnung von A eine Potenz von 2 ist.

Ist $k \geq 1$, dann folgt durch Multiplikation von XF_S mit Y^{k-1}, dass $0 \equiv (u-2a)XY^{k-1}$ ist; weil u ungerade ist, ist $u-2a$ eine Einheit modulo $\mathfrak{M}$, und es muss $XY^{k-1} \in \mathfrak{M}$ gelten. Dieser Widerspruch zeigt $k = 0$, d.h. $X \in \mathfrak{M}$. Aber dann zeigt $0 \equiv XF_T \equiv -2 - Y \bmod \mathfrak{M}$, dass $Y + 2 \in \mathfrak{M}$ ist, und es gilt $\mathfrak{M} = (2^n, X, Y+2)$ wie behauptet, wo n minimal mit $2^n \in \mathfrak{M}$ ist.

Also ist jedes Polynom in $\mathbb{Z}[X, Y]$ einer Zahl kongruent modulo $\mathfrak{M}$: jede symbolische Potenz von A ist daher eine gewöhnliche Potenz, und insbesondere ist G' zyklisch. □

$\ell = 2$: Arithmetik

Sei k ein Zahlkörper mit 2-Klassengruppe vom Typ $(2, 2)$. Die Formeln für die Verlagerung in (1) zeigen

$$\begin{aligned} S \in \kappa_S &\implies \operatorname{Ver}(S) = S^{T+1} = A^{F_S+1} \in C'_S, \\ S \in \kappa_T &\implies \operatorname{Ver}(S) = S^2 = A^{F_S} \in C'_T, \\ S \in \kappa_{ST} &\implies \operatorname{Ver}(S) = S^2 = A^{F_S} \in C'_{ST}. \end{aligned}$$

Beachte, dass beispielsweise $\operatorname{Ver}(S) = S^{T+1} = T^{-1}STS = S(S^{-1}T^{-1}ST)S = SAS = S^2S^{-1}AS = A^{F_S}A^S = A^{F_S+S}$ ist; jetzt zeigt $A^S = S^{-1}AS = A[A, S] \equiv A \bmod C'_S$, dass $\operatorname{Ver}(S) = A^{F_S+1}C'_S$ ist. Mit diesen Formeln können wir folgenden Hilfssatz beweisen:

Lemma 5. *Sei k ein Zahlkörper mit 2-Klassengruppe vom Typ $(2, 2)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $S \in \kappa_S$;
2. $A^{F_S+1} \in C'_S$;
3. $F_S \equiv -1 \bmod (\mathfrak{M}, X)$.

In diesem Fall gilt $\mathfrak{M} = (2^n, X, Y+2)$ für ein $n \geq 1$, sowie $F_S \equiv -1 \bmod \mathfrak{M}$. Weiter hat die quadratische Erweiterung von k, die zur Untergruppe $\langle S \rangle$ gehört, eine zyklische 2-Klassengruppe der Ordnung $m = 2^n$.

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass 1. und 2. äquivalent sind. Jetzt beachten wir, dass C'_S von Kommutatoren der Form $[S, A^F] = A^{FX}$ erzeugt wird; dies zeigt $C'_S = \{A^X\}$. Also ist $A^{F_S+1} \in C'_S$ genau dann, wenn $F_S+1 \equiv 0 \bmod (\mathfrak{M}, X)$.

Sei nun $S \in \kappa_S$. Wegen $F_S \equiv -1 \bmod (\mathfrak{M}, X)$ gilt $F_S(0,0) \equiv 1 \bmod 2$, und der Beweis von Prop. 2 zeigt $\mathfrak{M} = (2^n, X, Y + 2)$.

Wegen $X, Y+2 \in \mathfrak{M}$ ist jedes Element von $\mathbb{Z}[S,T]$ einer ganzen Zahl kongruent modulo $\mathfrak{M}$, also können die symbolischen Potenzen von A als gewöhnliche Potenzen von A geschrieben werden. Dies zeigt, dass die Klassengruppe der unverzweigten quadratischen Erweiterung von k zur Untergruppe $\langle S \rangle$ eine zyklische 2-Klassengruppe besitzt, deren Ordnung $m = 2^n$ mit der Ordnung von A übereinstimmt. □

Auf ähnliche Art und Weise beweist man

Lemma 6. *Sei k ein Zahlkörper mit 2-Klassengruppe vom Typ $(2,2)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $S \in \kappa_T$;
2. $A^{F_S} \in C'_T$;
3. $F_S \equiv 0 \bmod (\mathfrak{M}, Y)$.

Als nächstes definieren wir den Kapitulationstyp von k. Sei k wie oben ein Zahlkörper mit 2-Klassengruppe $C_0 = \mathrm{Cl}_2(k) \simeq (2,2)$. Dann hat C_0 drei Untergruppen C_1, C_2, C_3 der Ordnung 2, und diese entsprechen via Artins Reziprozitätsgesetz drei unverzweigten quadratischen Erweiterungen k_j/k, für die $C_i = N_{k_j/k}\mathrm{Cl}_2(k_j)$ ist. Wir sagen, k habe Kapitulationstyp $[i_1\ i_2\ i_3]$, wenn $\kappa_j = C_{i_j}$ ist. Wir werden nicht zwischen Kapitulationstypen unterscheiden, die nach einer geeigneten Permutation der Körper k_i auseinander hervorgehen. Hat beispielsweise k Kapitulationstyp $[1\ 0\ 0]$ (genau die Untergruppe C_1 kapituliert in k_1/k, während in k_2/k und k_3/k die ganze 2-Klassengruppe kapituliert), dann zeigt Vertauschung der Rollen von k_1 und k_2, dass die Erweiterung auch Kapitulationstyp $[0\ 2\ 0]$ besitzt; wir schreiben dies als $[1\ 0\ 0] \sim [0\ 2\ 0]$.

Tabelle 2.2 gibt alle 16 möglichen Kapitulationstypen an. Die meisten davon können mit dem folgenden Lemma ausgeschlossen werden:

Lemma 7. *Ist $S \in \kappa_S$ und $S \in \kappa_T$, dann hat k Kapitulationstyp $[0\ 0\ 0]$, und es ist $\mathfrak{M} = (1)$.*

Beweis. Es ist $F_S+1 \equiv 0 \bmod (\mathfrak{M}, X)$ wegen $S \in \kappa_S$ und $F_S \equiv 0 \bmod (\mathfrak{M}, Y)$ wegen $S \in \kappa_T$. Ist dann $\mathfrak{M} \neq (1)$, dann gilt $\mathfrak{L} \mid \mathfrak{M}$ nach Lemma 4 und damit $1 = F_S + 1 - F_S \equiv 0 \bmod \mathfrak{L}$: dieser Widerspruch beweist die zweite Behauptung.

Sei also $\mathfrak{M} = (1)$. Aus $F_S \equiv -1 \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}$ folgt dann $S \in \kappa_S$ und $S \in \kappa_T$, und auf ähnliche Art und Weise finden wir, dass die Klassen T und ST kapitulieren. □

#	Orbits von Kapitulationstypen
1	[0 0 0]
2	[1 0 0] ∼ [0 2 0] ∼ [0 0 3]
3	[2 0 0] ∼ [3 0 0] ∼ [0 1 0] ∼ [0 3 0] ∼ [0 0 1] ∼ [0 0 2]
4	[0 2 3] ∼ [1 0 3] ∼ [1 2 0]
5	[0 2 1] ∼ [0 1 3] ∼ [1 0 2] ∼ [2 0 3] ∼ [1 3 0] ∼ [3 2 0]
6	[0 1 2] ∼ [0 3 1] ∼ [2 0 1] ∼ [3 0 2] ∼ [3 1 0] ∼ [2 3 0]
7	[0 1 1] ∼ [2 0 2] ∼ [3 3 0]
8	[0 2 2] ∼ [0 3 3] ∼ [1 0 1] ∼ [3 0 3] ∼ [1 1 0] ∼ [2 2 0]
9	[0 3 2] ∼ [3 0 1] ∼ [2 1 0]
10	[1 1 1] ∼ [2 2 2] ∼ [3 3 3]
11	[1 1 2] ∼ [1 3 1] ∼ [2 2 1] ∼ [3 2 2] ∼ [3 1 3] ∼ [2 3 3]
12	[1 2 2] ∼ [1 2 1] ∼ [1 1 3] ∼ [1 3 3] ∼ [2 2 3] ∼ [3 2 3]
13	[2 1 1] ∼ [2 1 2] ∼ [2 3 2] ∼ [3 1 1] ∼ [3 3 1] ∼ [3 3 2]
14	[2 3 1] ∼ [3 1 2]
15	[1 2 3]
16	[1 3 2] ∼ [2 1 3] ∼ [3 2 1]

Tabelle 2.2. Kapitulationstypen für $\mathrm{Cl}(k) \simeq (2,2)$

Dieses Lemma zeigt, dass die Kapitulationstypen 2 – 8 und 10 – 12 unmöglich sind. Beachte, dass Furtwänglers verschärfter Haupitdealsatz für Klassengruppen vom Typ $(2,2)$ (sh. [91]) äquivalent dazu ist, dass der Kapitulationstyp 10 nicht möglich ist.

Als nächstes zeigen wir, dass der Kapitulationstyp 14 nicht auftreten kann:

Lemma 8. *Der Kapitulationstyp* $\kappa = [2\ 3\ 1]$ *ist unmöglich.*

Beweis. Aus $\kappa = [2\ 3\ 1]$ folgen die Kongruenzen

$$F_T \equiv 0 \bmod (\mathfrak{M}, X), \quad F_{ST} \equiv 0 \bmod (\mathfrak{M}, Y), \quad F_S \equiv 0 \bmod (\mathfrak{M}, Z).$$

Ist $\mathfrak{M} \neq (1)$, dann gilt $\mathfrak{L} \mid \mathfrak{M}$, und $F_S \equiv F_T \equiv F_{ST} \equiv 0 \bmod \mathfrak{L}$ impliziert $0 \equiv F_{ST} \equiv F_S + F_T - 1 - Y \equiv -1 \bmod \mathfrak{L}$, was den gewünschten Widerspruch ergibt. Also ist $\mathfrak{M} = (1)$, was aber sofort $\kappa = [0\ 0\ 0]$ nach sich zieht. □

Alle bisher nicht ausgeschlossenen Kapitulationstypen kommen tatsächlich vor. Die Gruppen, die im untenstehenden Satz auftauchen, haben folgende Präsentationen und Ordnungen:

$$\begin{aligned} D_m &= \langle a, b : a^m = b^2 = 1,\ [a,b] = a^{-2} \rangle, & \#D_m &= 2m; \\ H_{4m} &= \langle a, b : a^m = b^2 = -1,\ [a,b] = a^{-2} \rangle, & \#H_{4m} &= 4m; \\ SD_{4m} &= \langle a, b : a^{2m} = b^2 = 1,\ [a,b] = a^{m-2} \rangle, & \#SD_{4m} &= 4m. \end{aligned}$$

Wir haben bereits gesehen, dass der Annihilatormodul $\mathfrak{M}$ von A im wesentlichen durch reine Gruppentheorie bestimmt ist. Die Kapitulationstypen dagegen bestimmen die Kongruenzklassen von F_S und F_T modulo $\mathfrak{M}$, und umgekehrt bestimmen diese Kongruenzklassen den Kapitulationstyp:

Satz 11. *Die Kapitulationstypen legen die Restklassen von F_S und F_T modulo $\mathfrak{M}$ fest; Einzelheiten gibt die folgende Tabelle (es ist $m = 2^n$):*

#	κ	$\mathfrak{M}$	$F_S \bmod \mathfrak{M}$	$F_T \bmod \mathfrak{M}$	$\mathrm{Gal}(k^2/k)$
1	[0 0 0]	(1)	0	0	$(2,2)$
9	[0 3 2]	$(2^n, X, Y+2)$	-1	0	D_m
13	[2 3 2]	$(2^n, X, Y+2)$	$-1+2^{n-1}$	0	SD_{2m}
15	[1 2 3]	$(2, X, Y)$	-1	-1	H_8
16	[1 3 2]	$(2^n, X, Y+2)$	-1	2^{n-1}	H_{2m}

Im Falle 1 wissen wir bereits, dass $\mathfrak{M} = (1)$ gilt, und daraus folgt sofort $G \simeq (2,2)$. Jetzt behandeln wir nacheinander die restlichen Möglichkeiten.

Lemma 9. *Aus $S \in \kappa_S$ und $T \in \kappa_T$ folgt $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$ und $G = H_8$.*

Beweis. Aus Lemma 5 erhalten wir $X, Y, Y+2 \in \mathfrak{M}$, folglich $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$. Wegen $\mathfrak{M} \neq (1)$ folgt $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$.

Weiter haben wir die Kongruenzen $F_S \equiv F_T \equiv -1 \bmod \mathfrak{M}$. Also ist $S^2 = A^{F_S} = A^{-1}$ und $T^2 = A^{-1}$, sowie $A^2 = 1 = [A,S] = [A,T]$. Die von diesen Relationen erzeugte Gruppe ist die Quaternionengruppe der Ordnung 8. □

Für die andern Fälle brauchen wir zwei Hilfssätze:

Lemma 10. *Ist $T \in \kappa_S \cap \kappa_{ST}$, dann ist $Y + 2 \in \mathfrak{M}$ und $F_T \in \mathfrak{M}$.*

Beweis. Es gilt $F_T \equiv 0 \bmod (\mathfrak{M}, X)$ und $F_T \equiv 0 \bmod (\mathfrak{M}, Z)$ mit $Z = ST - 1 = XY + X + Y$. Daraus folgt $F_T \equiv XZG \bmod \mathfrak{M}$ für ein $G \in \mathbb{Z}[X,Y]$. Jetzt finden wir

$$\begin{aligned} F_T &\equiv XZG = X(XY + X + Y)G \\ &= (X^2Y + X^2 + XY)G \\ &\equiv ((X^2 + 2X)Y + X^2 - XY)G \\ &\equiv (-2X - XY)G \qquad\qquad \text{wegen } X^2 \equiv -2X \bmod \mathfrak{M} \\ &= -X(Y+2)G \bmod \mathfrak{M} \end{aligned}$$

Weiter ist $-2 - Y \equiv XF_T \equiv -X^2(2+Y)G \bmod \mathfrak{M}$, und daraus ergibt sich $0 \equiv (2+Y)(1+X^2G) \bmod \mathfrak{M}$. Aber $1 + X^2G$ ist eine Einheit modulo $\mathfrak{M}$ (sh. den Beweis von Lemma 4), folglich gilt $Y + 2 \in \mathfrak{M}$.

Da wir die Kongruenz $F_T \equiv -X(Y+2)G \bmod \mathfrak{M}$ bereits bewiesen haben, folgt jetzt die zweite Behauptung aus $Y + 2 \in \mathfrak{M}$. □

Lemma 11. *Ist $T \in \kappa_S \cap \kappa_{ST}$ und $ST \in \kappa_T$, dann gilt $\mathfrak{M} = (2^n, X, Y+2)$ für ein $n \geq 1$.*

Beweis. Aus $F_{ST} \equiv 0 \bmod (\mathfrak{M}, Y)$ folgt $F_{ST} \equiv YG \equiv -2G \bmod \mathfrak{M}$ für ein $G \in \mathbb{Z}[X,Y]$, und $Y + 2 \in \mathfrak{M}$ liefert $F_{ST} \equiv F_S + F_T - 1 - Y \equiv F_S + 1 \bmod \mathfrak{M}$. Mit $XF_S \in \mathfrak{M}$ erhalten wir damit $X \equiv -2GX \bmod \mathfrak{M}$ und $X(1+2G) \in \mathfrak{M}$. Da $1 + 2G$ eine Einheit modulo $\mathfrak{M}$ ist nach dem Beweis von Lemma 4, folgt $X \in \mathfrak{M}$. □

Jetzt können wir die noch verbliebenen Fälle behandeln.

Lemma 12. *Ist* $\kappa = [0\ 3\ 2]$*, dann gilt* $\mathfrak{M} = (2^n, X, Y+2)$*,* $F_T \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}$ *und* $F_S \equiv -1 \bmod \mathfrak{M}$*. Weiter ist* $G \simeq D_m$ *für* $m = 2^n$*.*

Beweis. Die Behauptungen $\mathfrak{M} = (2^n, X, Y+2)$ und $F_T \in \mathfrak{M}$ folgen aus Lemma 10 und 11, während $F_S \equiv -1 \bmod \mathfrak{M}$ sich aus Lemma 5 ergibt. Also ist $T^2 = A^{F_T} = 1$, $S^2 = A^{F_S} = A^{-1}$ und $(ST)^2 = S^2[S,T] = 1$. Weil G von zwei Elementen der Ordnung 2 erzeugt wird, ist G eine Diedergruppe. □

Lemma 13. *Ist* $\kappa = [2\ 3\ 2]$*, dann gilt* $\mathfrak{M} = (2^n, X, Y+2)$ *für ein* $n \geq 2$*, sowie* $F_T \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}$ *und* $F_S \equiv -1 + 2^{n-1} \bmod \mathfrak{M}$*. Weiter ist* $G \simeq SD_m$ *für* $m = 2^n$*.*

Beweis. Es gilt $2F_{ST} \equiv -YF_{ST} \equiv -Y(F_S+1) \equiv -2-Y-X \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}$ sowie $F_{ST} \equiv F_S + 1 \bmod \mathfrak{M}$. Aus $F_{ST} \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}$ würde $F_S \equiv -1 \bmod \mathfrak{M}$ und $S \in \kappa_S$ folgen; also gilt $F_{ST} \equiv 2^{n-1} \bmod \mathfrak{M}$ und damit $F_S \equiv -1 + 2^{n-1} \bmod \mathfrak{M}$ wie behauptet.

Wäre $n = 1$, dann würde aus $F_S \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}$ sofort $S \in \kappa_T$ folgen; also ist $n \geq 2$.

Die Gruppe $G = \mathrm{Gal}(k^2/k)$ wird von S und T erzeugt, und wir haben die Relationen $S^2 = A^{-1+2^{n-1}}$ und $T^2 = 1$. Aus $A^m = 1$ ergibt sich $S^{2m} = T^2 = 1$; weiter ist $S^{-1}T^{-1}ST = A = S^{m-2}$ wegen $S^m = A^{-m/2} = A^{m/2}$ und $S^2 = A^{m/2-1}$. Damit sind die Relationen der Semidiedergruppe der Ordnung $4m$ erfüllt. □

Lemma 14. *Ist* $\kappa = [1\ 3\ 2]$*, dann gilt* $\mathfrak{M} = (2^n, X, Y+2)$*, und* $G = H_{2m}$*.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass $X \in \mathfrak{M}$, $Y + 2 \in \mathfrak{M}$, $F_S \equiv -1 \bmod \mathfrak{M}$, $F_T \equiv 0 \bmod (\mathfrak{M}, Z)$ und $F_{ST} \equiv 0 \bmod (\mathfrak{M}, Y)$ ist.

Weiter ist $2F_T \equiv -YF_T \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}$; die Relation $F_T \in \mathfrak{M}$ ist äquivalent zu $T \in \kappa_S \cap \kappa_{ST}$, also liegt F_T nicht in $\mathfrak{M}$. Da F_T zu einer ganzen Zahl kongruent modulo $\mathfrak{M}$ ist, muss $F_T \equiv 2^{n-1} \bmod \mathfrak{M}$ sein.

Mit $m = 2^n$ finden wir nun $S^2 = A^{-1}$, $T^2 = A^m$, $T^4 = 1$, woraus sich zwanglos $G = H_{2m}$ ergibt. □

Der folgende Satz enthält Teilresultate von Furtwängler [86], Kisilevsky [152], sowie Couture & Derhem [59]:

Satz 12. *Sei* k *ein Zahlkörper mit* $\mathrm{Cl}_2(k) \simeq (2,2)$*, sei* k^1 *der* 2*-Klassenkörper von* k*, und seien* k_i $(1 \leq i \leq 3)$ *die drei unverzweigten quadratischen Teilerweiterungen in* k^1/k*, sowie* κ_i *die Untergruppe von* $\mathrm{Cl}(k)$*, die in* k_i/k *kapituliert. Dann ist* k_i *Klassenkörper von* k *für die Klassengruppe* $C_i = N_{k_i/k}\mathrm{Cl}_2(k_i)$*. Sei* k^2 *der* 2*-Klassenkörper von* k^1*, und setze* $G = \mathrm{Gal}(k^2/k)$*. Dann hat der* 2*-Klassenkörper von* k *höchstens die Länge* 2*, und* G *ist entweder* $\simeq (2,2)$ *oder isomorph zur Dieder, Semidieder oder der (verallgemeinerten) Quaternionengruppe. Genauer gilt:*

1. *$G \simeq (2,2) \iff \kappa_i = \mathrm{Cl}_2(k)$ $(i = 1,2,3)$, d.h. in jeder Erweiterung k_i/k kapituliert die ganze 2-Klassengruppe $Cl_2(k)$;*

2. *$G \simeq H_8 \iff \kappa_i = C_i$ für $i = 1,2,3$.*

In allen andern Fällen ist k^2 zyklisch über genau einem der k_i, sagen wir über k_1. Dann ist $\mathrm{Cl}_2(k_1) \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für eine 2-Potenz m, und es gilt

3. *$G \simeq D_m$, $m \geq 4 \iff \kappa_1 = \mathrm{Cl}_2(k), \kappa_2 = C_3, \kappa_3 = C_2$;*

4. *$G \simeq SD_{2m}$, $m \geq 8 \iff \kappa_1 \cap C_1 = 1, \kappa_2 = C_3, \kappa_3 = C_2$;*

5. *$G \simeq H_{2m}$, $m \geq 8 \iff \kappa_1 = C_1, \kappa_2 = C_3, \kappa_3 = C_2$.*

Ist $G \simeq SD_{2m}$, dann ist $\kappa_1 = C_2$, wo k_2 derjenige Körper k_i ist, über dem k^2 eine Diedererweiterung ist; in diesem Fall gibt es eine Einheit $\varepsilon \in E_k \setminus E_k^2$ mit $\varepsilon \equiv \xi^2 \bmod 4$.

$\ell = 3$

Wir wollen nun einige Ergebnisse von Scholz and Taussky [Ta34a] besprechen. Die Kapitulationstypen sind wie oben definiert. Weil die Arbeit nur imaginär-quadratische Zahlkörper behandelt, müssen Kapitulaiontstypen, die eine 0 enthalten, nicht betrachtet werden. Zu den Ergebnissen von Scholz and Taussky gehören die folgenden:

1. Ist k imaginär-quadratisch, dann ist $\mathfrak{M} \neq (1)$;

2. Ist $\mathfrak{M} \neq (1)$, dann gilt $\mathfrak{M} \equiv 0 \bmod \mathfrak{L}$;

3. Ist $\mathfrak{M} \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{L}_2 = (3, X^2, XY, Y^2)$, dann kapituliert in allen vier unverzweigten zyklischen kubischen Erweiterungen dieselbe Idealklasse, sagen wir S_1, und es ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}, S_1^3 = 1$ und $S_2^3 = A$.

4. Ist k imaginär-quadratisch, dann ist $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{L}$.

5. Hat k Kapitulationstyp [1 1 2 3], d.h. kapituliert die Idealklasse S_1 in den Fixkörpern von S_1 und S_2, und kapitulieren S_2 und S_1S_2 in den Fixkörpern von S_1S_2 und $S_1^2S_2$, dann ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_2$, $F_1 = F_2 = X$.

Die Kenntnis von $\mathfrak{M}$ reicht nicht aus, um die Gruppenstruktur von $G = \mathrm{Gal}(k^2/k)$ zu bestimmen; einige wenige Eigenschaften lassen sich aber doch ablesen:

a) ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$, dann ist $\#G = 3^3$ und $G' = \langle A \rangle$, d.h. G ist eine der beiden nichtabelschen Gruppen der Ordnung 27.

b) ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_2$, dann ist $\#G = 3^5$ und $G' = \langle A, A^X, A^Y \rangle \simeq (3,3,3)$; darüberhinaus gilt $G/G' \simeq (3,3)$.

Die Ergebnisse von Scholz and Taussky wurden in einer Reihe von Arbeiten aufgegriffen. Taussky [Ta69a, Ta71a] bewies Sätze wie den folgenden:

Proposition 3. *Sei $p > 3$ prim, und setze $X = S - 1$, $Y = T - 1$. Sei G die ℓ-Gruppe der Ordnung p^5 mit $\mathfrak{M} = (p, X^2, XY, Y^2)$. Ist k ein Zahlkörper mit $\mathrm{Gal}(k^2_{(p)}/k) \simeq G$, dann sind alle zyklischen unverzweigten Erweiterungen K/k mit $(K : k) = \ell$ vom Typ A.*

Chang & Foote [52] (sh. auch [51]) definieren die *Kapitulationszahl* ν für Zahlkörper k mit $\mathrm{Cl}_p(k) \simeq (p, p)$ als die Anzahl der unverzweigten zyklischen Erweiterungen K/k vom Grad p mit $\kappa_{K/k} = \mathrm{Cl}_p(k)$, d.h. in welchen die gesamte p-Klassengruppe kapituliert. Offenbar ist $\nu \in \{0, 1, \ldots, p + 1\}$. Im Falle $p = 2$ haben wir gesehen, dass $\nu \in \{0, 1, 3\}$ ist; Chang & Foote haben gezeigt, dass es für $p \geq 3$ und für ein beliebiges $\nu \in \{0, 1, \ldots, p + 1\}$ p-Gruppen G_ν gibt, sodass jeder Zahlkörper k mith $\mathrm{Gal}(k^2_{(p)}/k) \simeq G_\nu$ die Kapitulationszahl ν besitzt.

In [Ta34a] haben Scholz und Taussky behauptet, dass der p-Klassenkörperturm eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers k mit Kapitulationstyp $\mathfrak{X}_\alpha$ die Länge 2 besitzt; die gegebene Beweisskizze wurde von Brink & Gold [40] (vgl. auch Brink [39]) als fehlerhaft nachgewiesen.

Weitere Artikel, die sich mit verwandten Themen befassen, sind Browkin [42, 43], Schmithals [279, 280], Heider & Schmithals [129], Müller [217], Nebelung [221, 222], Mayer [187], Miyake [203], sowie Arrigoni [4]. In den letzten Jahren haben auch Bush und vor allem D. Mayer [188, 189, 190, 191, 49] die Kapitulation in unverzweigten kubischen Erweiterungen und die dazugehörigen Klassenkörpertürme ausgiebig untersucht.

Hilberts Satz 94

Eines der ersten Ergebnisse über die Kapitulation von Idealklassen in unverzweigten zyklischen Erweiterungen ist Hilberts Satz 94: ist L/K eine unverzweigte zyklische Erweiterung von Primzahlgrad ℓ, dann gibt es eine Idealklasse $c \in \mathrm{Cl}(K)$ der Ordnung ℓ, die in L kapituliert. Insbesondere folgt aus der Existenz dieser Erweiterung L/K, dass die Klassenzahl von K durch ℓ teilbar sein muss.

Hilberts Beweis ist im wesentlichen kohomologischer Natur (in einer modernen Darstellung wird dazu die Kohomologie der Einheitengruppe und das Herbrandsche Lemma benutzt) und lässt sich daher nicht ohne weiteres auf nichtzyklische Erweiterungen verallgemeinern.

In [Ta69a] stellt Taussky die folgende Frage: sei K ein Zahlkörper dessen ℓ-Klassengruppe vom Typ (ℓ, ℓ) ist. Seien H_0, ..., H_p die Untergruppen vom Index ℓ in der Klassengruppe von K, und seien K_i/K die zu den Gruppen H_i gehörigen zyklischen unverzweigten Erweiterungen. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

(A) Die Idealklasse, die H_i erzeugt, kapituliert in K_i.

(B) Die Idealklasse, die H_i erzeugt, kapituliert in K_i nicht.

Nach den Ergebnissen, die Scholz & Taussky in [Ta34c] erhalten haben, kann es im Falle $\ell = 3$ nicht passieren, dass alle vier unverzweigten kubischen zyklischen Erweiterungen von imaginär-quadratischen Zahlkörpern vom Typ A sind. In [Ta69a] zeigt Taussky, dass dies für Primzahlen $\ell \geq 5$ zumindest gruppentheoretisch passieren kann.

In der Tat: schreibe $G = \mathrm{Gal}(K^2/K) = \langle S_1, S_2 \rangle$ (beachte, dass S_1^p und S_2^p in der Kommutatorgruppe G' liegen) und setze $T = [S_1, S_2] = S_1^{-1} S_2^{-1} S_1 S_2$, sowie $\Delta_i = S_i - 1$. Dann ist G eindeutig bestimmt durch das Ideal $\mathfrak{M}$ aller Polynome $f \in \mathbb{Z}[\Delta_1, \Delta_2]$, für die $T^f = 1$ ist. Schreier hatte in seiner Dissertation gezeigt, dass unter diesen Relationen immer die folgenden sind:

$$S_1^{\Delta_1} = 1, \qquad S_2^{\Delta_2} = 1,$$
$$(S_1^p)^{\Delta_2} = T^{1+S_1+S_1^2+\ldots+S_1^{p-1}}, \qquad (S_2^p)^{\Delta_1} = T^{1+S_2+S_2^2+\ldots+S_2^{p-1}}.$$

Tausskys Hauptresultat ist dar folgende

Satz 13 (Taussky 1969). *Sei K ein Zahlkörper, dessen ℓ-Klassengruppe Typ (ℓ, ℓ) besitzt. Weiter möge in jeder zyklischen unverzweigten Erweiterung L/K vom Grad ℓ genau eine zyklische Untergruppe der Klassengruppe kapitulieren. Sei $G = \mathrm{Gal}(K^2/K)$ mit*

$$S_1^p = T^{\Delta_1}, \quad S_2^p = T^{\Delta_2}.$$

Dann hat jede Erweiterung K_i Typ A.

Gruppentürme und Klassenkörpertürme

Eine Frage, die in den 1930er Jahren ausgiebig diskutiert worden ist, kam wohl erstmals in Diskussionen zwischen Furtwängler und seinem Doktoranden Otto Schreier auf: sei K ein Zahlkörper, K^1 sein Hilbert-Klassenkörper, K^2 der Hilbert-Klassenkörper von K^1 usw.; bricht dieser „Körperturm“ ab, d.h. gibt es ein (von K abhängiges) n mit $K^n = K^{n+1}$? Artin schlug zuerst vor, durch eine Verbesserung der Minkowskischranke für die Norm von Idealen in Idealklassen zu zeigen, dass jeder Klassenkörperturm abbrechen muss. Taussky betrachtete den dazugehörigen Gruppenturm; bereits Furtwängler hatte 1916 bewiesen, dass der 2-Klassenkörperturm eines Zahlkörpers mit 2-Klassengruppe vom Typ $(2, 2)$ abbricht, weil der erste 2-Klassenkörper bereits zyklische 2-Klassengruppe besitzt, was sofort $K^2 = K^1$ zur Folge hat.

Wie Taussky in [Ta83a] schreibt, hat Scholz nicht geglaubt, dass der Gruppenturm immer abbrechen muss, und tatsächlich wurde diese Behauptung schnell widerlegt. Noburo Ito [143] gab einen unendlichen Gruppenturm für $p = 3$ an, und Magnus [180] konnte zeigen, dass es beliebig hohe Gruppentürme gibt. Zassenhaus zeigte Tausskys Doktoranden C. Hobby [138] eine

elegante Methode zur Konstruktion unendlicher 2-Gruppentürme. Das allgemeine Ergebnis, wonach unendliche p-Gruppentürme für alle nichtzyklischen p-Gruppen G existieren mit der einzigen Ausnahme $G = (2, 2)$, wurde später von Serre [293] bewiesen.

Die ursprüngliche Frage Furtwänglers wurde durch Golod und Shafarevich beantwortet, und zwar durch den Nachweis, dass der p-Klassenkörperturm eines algebraischen Zahlkörpers K immer unendlich groß ist, wenn nur der Rang der p-Klassengruppe von K hinreichend groß ist.

Taussky veröffentlichte noch zwei kleinere Arbeiten zur Klassenkörpertheorie: in [Ta37b] gab sie einen gruppentheoretischen Beweis für das Furtwänglersche Ergebnis aus [86], wonach der 2-Klassenkörperturm von Zahlkörpern K mit 2-Klassengruppe vom Typ $(2, 2)$ spätestens mit K^2 abbricht, indem sie zeigte, dass für jede 2-Gruppe G mit $G/G' \simeq (2, 2)$ automatisch G' zyklisch und damit $G'' = 1$ ist. In der Note [Ta37c] präsentiert sie die ziemlich triviale Beobachtung, dass wenn $K_1/\mathbb{Q}$ und $K_2/\mathbb{Q}$ zyklische Erweiterungen mit Primzahlgraden ℓ_1 bzw. ℓ_2 sind, deren Kompositum K_1K_2 unverzweigt über K_1 und K_2 ist, die Grade $\ell_1 = \ell_2$ notwendig gleich sind. Die folgt ziemlich direkt aus der Hilbertschen Verzweigungstheorie.

Ausgewählte Veröffentlichungen von Olga Taussky

[Ta32a] O. Taussky, *Über eine Verschärfung des Hauptidealsatzes für algebraische Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. **168** (1932), 193–210; sh. S. 251, 351, 465, 481

[Ta32b] O. Taussky, *Zur Theorie des Klassenkörpers*, Jahresbericht D. M. V. **41** (1932), 74 kursiv; sh. S. 364

[Ta34a] O. Taussky, *Zur Axiomatik der Gruppen*, Ergebnisse math. Kolloquium Wien 4 (1933), 2–3; sh. S. 63, 64

[Ta34c] A. Scholz, O. Taussky, *Die Hauptideale der kubischen Klassenkörper imaginär-quadratischer Zahlkörper: ihre rechnerische Bestimmung und ihr Einfluß auf den Klassenkörperturm*, J. Reine Angew. Math. **171** (1934), 19–41; sh. S. 54, 65, 486

[Ta35b] O. Taussky, *Fields as class fields of different reference fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), 32; sh. S. 373

[Ta36h] O. Taussky, *Modern problems in algebraic number theory*, British Assoc. Advanc. Sci., Rep. 1936, 332; sh. S.

[Ta37b] O. Taussky, *A remark on the class field tower*, J. London math. Soc. **12** (1937), 82–85; sh. S. 57, 66, 373

[Ta37c] O. Taussky, *A remark on unramified class fields*, J. London math. Soc. **12** (1937), 86–88; sh. S. 66, 373

[Ta39] O. Taussky, *An algebraic property of Laplace's differential equation*, Quart. J. Math. **10** (1939), 99–103; sh. S. 493

[Ta52a] O. Taussky, *Arnold Scholz zum Gedächtnis*, Math. Nachr. **7** (1952), 379–386; sh. S. 44

[Ta69a] O. Taussky, *A remark concerning Hilbert's theorem 94*, J. Reine Angew. Math. **239/240** (1970), 435–438; sh. S. 64, 65

[Ta71a] O. Taussky, *Hilbert's theorem 94* Computers in Number Theory, Proc. Sci. Res. Council Atlas Sympos. No.2, Oxford 1969 (1971), 65–71; sh. S. 64

[Ta81] O. Taussky, *Composition of binary integral quadratic forms via integral* 2×2 *matrices and composition of matrix classes*, Linear and Multilinear Algebra **10** (1981), 309–318; sh. S.

[Ta81b] O. Taussky, *History of sums of squares in algebra*, American mathematical heritage: algebra and applied mathematics (El Paso, Tex., 1975/Arlington, Tex., 1976), pp. 73–90, Math. Ser., 13, Texas Tech Univ., Lubbock, Tex., 1981; sh. S.

[Ta83a] O. Taussky, *Some non-commutativity methods in algebraic number theory*, in *A Century of Mathematics in America. Part II*, (P. Duren, ed.), 493–511; sh. S. 47, 49, 52, 65

[Ta95] O. Taussky, *Olga Taussky-Todd (1906–1995). Autobiography, 1979–1980*, Mary Terrall (ed.), Archives Cal. Inst. Tech., Pasadena; sh. S. 47, 270

Teil II

Briefwechsel Hasse – Scholz

3. Die Korrespondenz
Helmut Hasse – Arnold Scholz

3.1 22.04.1927, Scholz an Hasse

Charlottenburg, 22. April 1927

Sehr geehrter Herr Professor!

Für die uns geliehenen Exemplare Ihrer Arbeit[2)] über Klassenkörpertheorie möchte ich jetzt, wo unser Arbeitszirkel[3)] beendet ist, nochmals im Namen der Mathematisch–Physikalischen Arbeitsgemeinschaft Ihnen, Herr Professor, meinen verbindlichsten Dank aussprechen und die Exemplare zurücksenden, zu gleicher Zeit mit dem Brief. Ich muss mich entschuldigen, dass es vorläufig erst 2 Exemplare sind; das dritte hat ein Teilnehmer unseres Arbeitszirkels, Herr Müller, leider verloren, obwohl ich es ihm gerade besonders ans Herz gelegt hatte, das Heft behutsam zu behandeln; er hat ein Ersatzexemplar bei Teubner bestellt, das aber noch nicht angekommen ist; es wird auch leider kein Sonderabdruck sein können, sondern nur Bd. 35_{1-4}. Da ich morgen nach Wien fahre, wo ich diesen Sommer studieren will, kann ich vorläufig nur die zwei Exemplare schicken; das dritte muss dann Herr Klaus Müller,[4)] Berlin–Lichterfelde–West, Arndtstr. 6^{a}, nachsenden. Ich bitte also noch vielmals um Entschuldigung.

Betreffs Ihrer Arbeit hätte ich zur Reduktion 3.[5)] noch einige Fragen: In der Anm. 20 ist angegeben, dass die Schlussweise in Takagis Arbeit auf S. 83 Z. 7. v. o. fehlerhaft sei.[6)] Mir scheint die Sache aber doch in Ordnung zu sein. Jedenfalls ist doch richtig, dass (Zeile 5) die K_0 zugeordnete Klassengruppe in k die Gruppe (6):

$$(6) \qquad \{c_1^{\ell},\, c_2\,, \dots\,;\, D_0\} \quad \text{auf S. 82}$$

enthält, da (6) die K zugeord. Klassengruppe ist und $K_0 < K$. Ist nun (Zeile $3/4$) richtig, dass die K_0 zugeord. Idealgruppe von Index ℓ ist, so folgt, da $1 < (D : D_0) \leqq n < \ell$ gilt, dass H die einzige Idealgruppe von Index ℓ ist, die (6) enthält, also dass K_0 wirklich Klassenkörper zu H ist.

Die Richtigkeit von Zeile $3/4$ wird aber in den nächsten Zeilen bis Z.7. v. u. erläutert, und auch hier habe ich keinen Fehler gefunden. Allerdings ist die Ausführung etwas umständlich, denn einmal hätte man gleich für alle Ideale $\mathfrak{l}$ die Potenz $\mathfrak{p} > \sigma\ell$ wählen können; dass dadurch der Rang $\bar{t}$ vielleicht grösser werden kann, tut dem ganzen Beweis offenbar keinen Eintrag. Dann hätte man auch, ohne gleich mit der Klassenkörpereigenschaft von K_0 operieren zu brauchen, so schliessen können: Die K_0 zugeord. Idealgruppe H_0 hat einen Index $h_0 \leqq \ell$. Nun kann aber die Klasse c_1 nicht in H_0 vorkommen; denn aus

$c_1 = N_{K_0}(C_0)$ würde $N_K(C_0) = c_1^n$ folgen, während doch (6) die K zugeord. Idealgr. ist; also kommt erst c_1^ℓ in H_0 vor, und da $h_0 \leqq \ell$ ist, ist $H_0 = H$.

Überhaupt kann man die Reduktion 3. noch wie die Reduktion 2. ohne Benutzung der etwas complicierten Geschlechtertheorie, die ja bei Ihrer nachträglichen Anmerkung (Bleistift) zur Redukt. 3 in Anwendung kommt, zustande bringen, indem man die Frobenius'schen Resultate über Primzahldichtigkeiten (Bln. Sitzb. 1896 p. 689–702)[7)] heranzieht, die für klassenkörpertheoretische Untersuchungen auch sonst von Vorteil sein könnten.

Z. B. lässt sich dadurch zeigen, dass die Relation 7 in Ihrem Bericht nicht nur auch für Nichtgaloissche Körper mit dem Zeichen: ‚$\geqq$' statt ‚$=$' gilt (sodass also auch $h_m \leqq n$), sondern dass dann:

$$(7'): \qquad \sum \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} = \rho \log \frac{1}{s-1} + \delta(s) \quad \text{gilt, wo } \rho > \tfrac{1}{n}\,.$$

Woraus dann $h_m < n$ folgt, sodass man also für die Klassenkörpereigenschaft den Nachweis entbehren kann, dass der betreffd. Körper galoisch ist, und nur: $h_m = n$ zu zeigen braucht.

Ist nämlich k der natürl. Rationalitätsbereich, so ist (7') in der Frobeniusschen Arbeit enthalten, und es ist: $\rho = 1 - D_0 = \sum_{\lambda=1}^{n} D_\lambda > \frac{1}{n}$, wenn nicht alle $D_1 = D_2 = \cdots = D_{n-1} = 0$, also wenn K nichtgaloisch ist. Hierbei bedeutet D_λ die Dichtigkt. der Primzahlen, die in K genau λ Primidealfaktoren 1. Grades besitzen.[8)] Für den allg. Fall eines Körpers k genügt es offenbar, in k Primideale $\mathfrak{p}_1$ ersten Grades in von 0 verschiedener Dichtigkeit nachzuweisen, die im nichtgaloisschen Körper K durch ein Primideal $\mathfrak{P}_1$ ersten Grades teilbar sind, ohne in lauter solche Primideale zu zerfallen; denn für diese Ideale ist:

$$\sum_{\mathfrak{P}_1} \frac{1}{N_K(\mathfrak{P}_1)^s} < n \cdot \sum_{\mathfrak{p}_1} \frac{1}{N_K(\mathfrak{p}_1)^s},$$

während sonst beim Übergang von K auf k in der Summenformel höchstens n Summanden durch einen ersetzt werden; also $\rho > \frac{1}{n}$.

Nach Frobenius gibt es nun zu jeder Substitution S der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von K (im absoluten Sinne) Primideale $\mathfrak{P}$ im absoluten Normalkörper von K in von 0 verschiedener Dichtigkeit, sodass die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{P}$ aus den Potenzen von S besteht (Trähgr. $= E$). Gehört nun K zur Untergruppe $\mathfrak{G}_1$ der Gal. Gr. $\mathfrak{G}$, und existiert ein zu K in bezug auf k conjugierter Körper: $K' \neq K$, der zur Untergr. $\mathfrak{G}_2 < \mathfrak{G}$ gehöre, so braucht man nach Dedekind (Zur Theorie der Ideale; Gött. Nachr. 1894)[9)] nur $S < \mathfrak{G}_1$; $S \not< \mathfrak{G}_2$ zu wählen, und ein zur Subst. S gehöriges (s. o) Primideal $\mathfrak{P}$ ist Teiler eines Primideals $\mathfrak{p}_1$ in k von oben verlangter Eigenschaft. (Es ist im Dezember in den Annalen auch eine Abhandlg.[10)] von F. Gassmann erschienen, die die Frobeniusschen Resultate auf belieb. Grundkörper erweitert; so viel ich weiss, lassen sich die Dichtigkeitssätze ohne weiteres von Primzahlen auf Primideale ersten Grades übertragen.)

Für die Reduktion 2. kommt man jedoch gänzlich ohne diese Hilfsmittel aus. Für die Reduktion 3. kann man aus den Dedekind–Frobeniusschen Resultaten die Tatsache herleiten, dass ein Körper k, in dem die Normen aller zur Discriminante teilerfremden Primideale n^{te} Potenzreste (mod ℓ) sind, wo $n|\ell-1$, notwendig den Unterkörper n^{ten} Grades des ℓ^{ten} Kreisteilungskörpers enthält. (Das Umgekehrte ist ja ohne weiteres klar.) Mit diesen Hilfsmitteln kann man dann, ohne auf Geschlechter, Einheiten ... einzugehen, die Red. 3. erzielen.

Ist nämlich $\mathcal{C}$ der Unterkörper n^{ten} Grades des ℓ^{ten} Kreisteilkp. s und K ein Galoisscher Körper, der $\mathcal{C}$ und k enthält, und sind $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{H}$ die Untergr. der Gal–Gr. von K, zu denen $\mathcal{C}$ und k gehören, so gibt es nach Frobenius Primideale $\mathfrak{P}$ in K, die zu einer beliebigen Substitution $S < \mathfrak{H}$ gehören. Die durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primzahl zerfällt dann nach Dedekind in k in Primideale $\mathfrak{p}$ ersten Grades, sodass also $N(\mathfrak{p}) = p \equiv c^n \pmod{\ell}$ $[c \not\equiv 0\ (\ell).]$ ist. Hieraus folgt aber, dass p in $\mathcal{C}$ auch in lauter verschiedene Primideale ersten Grades zerfällt, d. h.: es gilt mit $S < \mathfrak{H}$ auch: $S < \mathfrak{C}$; also $\mathfrak{H} < \mathfrak{C}$ oder: $\mathcal{C} < k$. (Den Fall: $n = \ell - 1$ hat M. Bauer in Math. Archiv **III 6** S. 220 behandelt[11)]). Ist also für einen Körper k gerade n diejenige Zahl, dass alle und nur die n^{ten} Potenzreste (mod ℓ) als Normen von (Prim–)Idealen vorkommen, so ist der gr. gem. Teiler von k und dem ℓ^{ten} Kreisteilungskörper obiger Körper $\mathcal{C}$.

Ist nun $mn = \ell - 1$, so ist dann $k' = k(\zeta)$ vom Relativgrade m in bezug auf k, wo ζ ℓ^{te} Ew. ist. In k kommen alle n^{ten} Potenzreste (mod ℓ) als Normen vor, in k' nur der Rest 1. Da nun die Gruppe $\mathfrak{C}$ der Ideale in k, deren Norm $\equiv 1$ (ℓ), von Index m ist und alle Relativnormen von k' auf k in $\mathfrak{C}$ hineinfallen, so hat die k' (mod ℓ) zugeord. Idealgruppe den Index m, da der Relativgrad m nicht überschritten werden kann, und es ist also k' Klassenkörper über k (mod ℓ). Ist H die in k vorgegebene Idealgruppe vom Index ℓ, zu der K konstruiert werden soll, so kommen offenbar Relativnormen von Idealen aus k' in allen Nebengruppen zu H vor, da $\ell > m$ und Primzahl. Die Gruppe H' der Ideale in k', deren Relativnorm nach H fällt, ist dann vom Index ℓ, und es lässt sich nach Annahme ein Klassenkörper K' vom Relativgrad ℓ über k' zu H' konstruieren. ($K' = k'(\sqrt[\ell]{\mu}) = k(\zeta, \sqrt[\ell]{\mu})$, wo $\mu < k'$). K' ist dann auch galoisch über k wegen seiner Gestalt:[12)] $K(\zeta, \sqrt[\ell]{\mu})$, und da seine Normen in den Durchschnitt von $\mathfrak{C}$ und H fallen, der vom Index: ℓm ist, so ist K' Klassenkörper über k.

Jetzt kann man dann die Takagische Überlegung auf S. 78/79 benutzen und schliessen, dass K' abelsch über k ist, da sonst jedes Primideal $\mathfrak{p}$ aus k, das nicht in $\mathfrak{C}$ liegt, also in k' nicht in Primideale 1. Grades zerfällt, in K' in ℓ–mal so viele Primideale zerfällt, sodass also $\mathfrak{p} < H$, wie aus der Konstruktion von K' hervorgeht. Um behaupten zu können, dass es Primideale $\mathfrak{p}$ gibt, die *sowohl* ausserhalb H *als auch* ausserhalb $\mathfrak{C}$ liegen, lässt sich allerdings wohl der erweiterte Satz über die arithmetische Progression nicht umgehn, den ja Takagi auch seinen Untersuchungen voranstellt. Ohne dies kann man wieder auskommen, wenn man stattdessen die Relation (7') benutzen will:

dass $h_m = n$ schon die Eigsch. des Gal. Körpers in sich enthält: Dann kann man überhaupt schliessen, dass wenn K Klassenkörper über k ist, nicht bloss K auch Klassenkörper über allen Zwischenkörpern zwischen K und k ist, sondern auch alle Zwischenkörper Klassenkörper über k sind also auch rel. galoisch über k, d. h. noch nicht, dass K rel. abelsch über k).[13)]

Sei $k < K' < K$, K' und K vom Relativgrad m und mn, $H \pmod{m}$ die Idealgruppe in k vom Index mn, zu der K Klassenkörper ist. Für die K' in $k \pmod{m}$ zugeord. Idealgr. H' gilt: $H' > H$; $\mathrm{Ind}\,(H') = r \leqq n$. Während sich nun die Normen von Idealen aus K' auf alle $\frac{mn}{r}$ Nebengruppen zu H innerhalb H' verteilen, liegen die Normen von solchen Idealen aus K', die selbst Normen von Idealen aus K sind, in der Gruppe H selbst. Da nun die Normen zweier Ideale in K' derselben Strahlklasse $\pmod{m}$ auch in k in dieselbe Strahlklasse $\pmod{m}$ fallen, so folgt, dass die $K \pmod{m}$ zugeord. Idealgruppe in K' einen Index: $h \geqq \frac{mn}{r}$ hat; anderseits gilt: $h \leqq m$; $r \leqq n$; also: $h = m$; $r = n$.

Ohne die Relation 7' erhält man also, dass K über K' Klassenkörper ist und K' über k dann, wenn K' rel. galoisch ist. (Auf diesem Wege kann die Reduktion 2. zu Ende geführt werden.)

Mit der Relation 7' erhält man, dass auch stets K' Klassenkörper über K ist und somit rel. galoisch.

Mit der Relation 7' schliesst man, dass der in der Reduktion 2 konstruierte Körper K' rel. abelsch über k ist und sein Unterkörper K vom Relativgrade ℓ der Klassenkörper zu H ist. Denn sonst hätte K' (nach Takagi) ℓ Unterkörper (nichtgal., conjugiert), die alle Klassenkp. zu H sein müssten.

Die ‚Konstruktion 4.'[14)], für die ja die Geschlechtertheorie wesentlich ist, habe ich nicht mehr allein durchzuführen gesucht, sondern die Ergänzungen im Takagi nachgelesen.

Ich habe mich dann noch weiter mit Herrn Dr. F. Neiss[15)], der auf dem Gymnasium mein Mathematiklehrer war und die Anregung zu diesem Arbeitszirkel gegeben hat, in die Klassenkpth. eingearbeitet; sonst hat sich insbesondere auch noch obiger Herr Müller für die Theorie interessiert.

Wenn Sie mir noch antworten wollten, Herr Professor, so schreiben Sie, bitte, an meine Charlottenburger Adresse; es wird mir dann nach Wien nachgesandt.

mit ergebenem Gruss.

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 22.04.1927

[1]In seiner Vorlesung über Klassenkörpertheorie aus dem Wintersemester 1931/32, von der eine nach dem zweiten Weltkrieg verfasste Abschrift erhalten ist, rechnet Artin zwei Beispiele vor, nämlich den Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{13})$ von Hasse und den Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17})$ „von Nehrkorn und Scholz".

[2]Der erste Teil von Hasses Klassenkörperbericht [113] erschien in den Jahresberichten der DMV von 1926. Hasses Bericht beginnt mit einem Überblick über die Arbeiten von Takagis Vorgängern, also Hilbert, Weber und Furtwängler.

Für einen Zahlkörper k und einen Erklärungsmodul $\mathfrak{m}$ ist der Strahl $H_0^{(\mathfrak{m})}$ modulo $\mathfrak{m}$ die Gruppe aller Hauptideale (α) in k, für die $\alpha \gg 0$ totalpositiv und $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$ ist.

Einer Erweiterung K/k algebraischer Zahlkörper und einem Ideal $\mathfrak{m}$ in k ordnet Takagi dann eine Idealgruppe $H_\mathfrak{m}$ in k zu, welche aus allen denjenigen Strahlklassen mod $\mathfrak{m}$ besteht, die Relativnormen zu $\mathfrak{m}$ primer Ideale aus K enthalten. Der Index $h_\mathfrak{m} = (H_\mathfrak{m} : H_0^{(\mathfrak{m})})$ genügt nun der *ersten Ungleichung* $h_\mathfrak{m} \leq n = (K : k)$, und zwar für jedes $\mathfrak{m}$. Der Körper K heißt Klassenkörper zu einer mod $\mathfrak{m}$ erklärten Idealgruppe H in k, wenn K/k normal und die K mod $\mathfrak{m}$ zugeordnete Idealgruppe $H_\mathfrak{m}$ „gleich" H ist, und $h_\mathfrak{m} = n$ gilt.

Scholz ist bei seinem Studium des Hasseschen Berichts aufgefallen, dass sich die folgenden beiden Tatsachen auf einfachstem Weg aus den analytischen Hilfsmitteln ergeben, die Frobenius für den Beweis seines Dichtigkeitssatzes bereitgestellt hat:

1. Ist K/k nicht galoissch, so muss $h_\mathfrak{m} < n$ sein.
2. Ist K Klassenkörper von k und F ein Zwischenkörper von K/k, dann ist K Klassenkörper von F und F Klassenkörper von k.

Daraus folgt „fast", dass Klassenkörper abelsch sind: nach einem Ergebnis von Dedekind [63] (diese Arbeit von Dedekind war zu diesem Zeitpunkt offenbar weder Scholz noch Hasse bekannt) sind Gruppen, deren sämtliche Untergruppen normal sind, entweder abelsch oder das direkte Produkt einer elementar-abelschen 2-Gruppe, einer abelschen Gruppe ungerader Ordnung, und einer Quaternionengruppe der Ordnung 8. Allerdings reichen die für den Beweis der ersten Ungleichung verwendeten Methoden anscheinend nicht aus, um zu zeigen, dass Quaternionenerweiterungen keine Klassenkörper sind.

Iyanaga hat in einem Brief an Hasse vom 27.06.1934 aber folgende Idee von Zassenhaus vorgeschlagen: wäre K/k ein Klassenkörper mit Hamiltonscher Gruppe (Dedekindsche Gruppen sind solche, deren Untergruppen allesamt Normalteiler sind; Hamiltonsche Gruppen sind die nichtabelschen unter ihnen), dann müsste auch das Kompositum von K/k mit einer zyklischen Erweiterung 4. Grades von k ein Klassenkörper sein; da die dazugehörige Gruppe nicht mehr Hamiltonsch ist, kann das nicht sein.

Die Aussage, dass eine Gruppe G mit der Eigenschaft, dass alle Untergruppen von G und $G \times C_4$ normal sind, notwendig abelsch ist, lässt sich nach Marston Conder wie folgt elementar beweisen:

Sei z eine Erzeugende des zyklischen Faktors C_4, und seien x und y beliebige Elemente von G. Sei weiter k die Ordnung von x, und $m = \mathrm{kgV}(k, 4)$ die Ordnung von xz (da $x \in G$ und $z \in C_4$ ist, kommutieren diese Elemente in $G \times C_4$). Jetzt

betrachten wir die Konjugierte von xz unter y, also $(xz)^y = (x^y)z$. Da die von xz erzeugte Untergruppe nach Voraussetzung normal ist. muss $(x^y)z \in \langle xz \rangle$ sein, also, da x und z kommutieren, $(x^y)z = (xz)^j = x^j z^j$ für ein $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Weil das Produkt direkt ist, muss daher $x^y = x^j$ und $z = z^j$ sein. Also ist $j \equiv 1 \bmod 4$, und aus $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ folgt $x^{-1}x^y = x^{j-1}$.

Andererseits folgt aus einfachen Eigenschaften von Kommutatoren, dass die Ordnungen beliebiger nicht-kommutierender Elemente x, y in einer Hamiltonschen Gruppe $\equiv 4 \bmod 8$ sind, und dass ihr Kommutator gleich der eindeutig bestimmten Involution im Schnitt der von ihnen erzeugten zyklischen Untergruppen ist. Insbesondere ist $[x, y] = x^t$ für ein $t \equiv 2 \bmod 4$.

Ist also die Dedekindsche Gruppe G nichtabelsch, dann folgt aus $[x, y] = x^{j-1}$ dass $j - 1 \equiv 2 \bmod 4$ und damit $j \equiv 3 \bmod 4$ ist: Widerspruch. Also ist G abelsch.

[3]Hasse schreibt am 21.11.1926 mit nur leicht verborgenem Stolz an Bessel-Hagen:

> *In Berlin hat sich übrigens eine Arbeitsgemeinschaft zum Studium meines Berichts aufgetan. Das ist doch sehr schön!*

[4]Klaus Müller hat für das Jahrbuch an die 100 Referate abgeliefert; insbesondere hat er Tschebotareffs Arbeit über seinen Dichtigkeitssatz besprochen. Bis 1928 waren seine Referate mit „Müller, Klaus; Berlin“ unterzeichnet, ab 1930 dann mit „Müller, Klaus; Studienassessor (Finsterwalde)“.

[5]Bei den Reduktionen geht es um den Nachweis des Existenzsatzes, nach dem es zu jeder Idealgruppe H in k genau einen Klassenkörper K gibt, der abelsch über k mit $\mathrm{Gal}(K/k) \simeq H$ und unverzweigt außerhalb des Führers der Idealgruppe ist.

Dieser Existenzsatz wird in 4 Schritten bewiesen:

1. Reduktion auf den Fall einer Idealgruppe H von Primzahlpotenzindex l^ν und zyklischer Faktorgruppe A/H (A ist die Gruppe aller zum Erklärungsmodul von H teilerfremden Ideale);
2. Reduktion auf den Fall einer Idealgruppe H von Primzahlindex l;
3. Reduktion auf einen Grundkörper, der die l-ten Einheitswurzeln enthält.
4. Konstruktion des Klassenkörpers im letzten Falle.

[6]Der in der ursprünglichen Version von Hasses Bericht [113] angegebene Verweis auf S. 83, Z. 7 v.o. ist im Nachdruck von 1970 zu „S. 79, Z. 12/13 v.o.“ berichtigt. Scholz hat also recht, wenn er sagt, Takagis Schlussweise an der angegebenen Stelle sei in Ordnung.

[7]G. Frobenius geht in der Arbeit [77] einer Fragestellung Kroneckers [156] nach: dieser interessierte sich für eine Charakterisierung irreduzibler Polynome durch ihr Zerlegungsverhalten modulo p. Nimmt man an, dass die Dirichletdichten D_k von Primzahlen p existieren, für die ein vorgelegtes irreduzibles Polynom f vom Grade n genau k Nullstellen über $\mathbb{F}_p$ hat, so bemerkt Kronecker, dass dann $\sum kD_k = 1$, sowie natürlich $D_{n-1} = 0$ ist. Die Tatsache, dass Kronecker die Existenz seiner Dichten und seinen eigentlichen Dichtesatz, wonach Primzahlen, welche in einem normalen Zahlkörper vom Grad n voll zerfallen, Dirichletdichte $\frac{1}{(K:\mathbb{Q})}$ besitzen, nicht bewiesen habe, findet sich deutlich ausgesprochen in Hawkins [112] und Rosen [272]; Kroneckers Bemerkungen im Falle von Kreisteilungskörpern lassen aber keine Zweifel daran aufkommen, dass er diese Beweise besessen hat und der Meinung war, seine Andeutungen müssten interessierten Lesern als Hinweis genügen.

Die Vermutung Kroneckers über die Existenz der Dichten D_k hat nun Frobenius in [77] aufgegriffen. Tatsächlich konnte er mehr zeigen: Frobenius zählt nicht nur die Nullstellen von f, sondern betrachtet die Zerlegung von f in irreduzible Faktoren; ein Polynom vom Grade 5 mit einer Nullstelle über $\mathbb{F}_p$ hat beispielsweise zwei mögliche Zerlegungen $(1, 4)$ und $(1, 2, 2)$, wobei z.B. (a, b, c) eine Zerlegung von f in irreduzible Faktoren vom Grade a, b und c andeuten soll. Diese Zerlegungstypen

entsprechen „Abteilungen“ der Galoisgruppe von f: ist G eine Gruppe der Ordnung n und $\sigma \in G$, dann besteht die Abteilung $\mathcal{A}\mathrm{bt}(\sigma)$ von σ aus den zu einem σ^m mit $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$ konjugierten Elementen. Frobenius zeigt dann, übersetzt in die Sprache der modernen algebraischen Zahlentheorie, folgendes: Sei K/F eine galoissche Erweiterung von Zahlkörpern mit Galoisgruppe G, und sei S_σ die Menge aller Primideale in F unter einem Primideal in K, dessen Frobeniusautomorphismus in $\mathcal{A}\mathrm{bt}(\sigma)$ liegt. Dann hat S_σ die Dirichletdichte $\# \mathcal{A}\mathrm{bt}(\sigma)/\#G$.

Hasse ist übrigens selbst auf das ursprüngliche Problem Kroneckers zurückgekommen, nämlich in [124].

[8]Die Notation hier geht auf Kronecker [156] zurück: dieser betrachtete ein Polynom f mit ganzen Koeffizienten und fragte nach der Dichte D_k der Primzahlen, für welche f modulo p genau k Wurzeln hat. Bezeichnet α eine Wurzel von f und setzt man $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, so stimmt diese Bedingung nach Kummer und Dedekind für nicht in der Diskriminante von f aufgehende Primzahlen mit der Forderung überein, p möge in K genau k Primidealteiler vom Grad 1 besitzen. Man kann leicht zeigen, dass $K/\mathbb{Q}$ genau dann normal ist, wenn $D_1 = \ldots = D_{n-1} = 0$ ist.

[9]Dedekind [62]; in diesem Brief an Frobenius gibt Dedekind einen Beweis der Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung, der auf der Isomorphie von $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ und der Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}$ beruht, welche, wie Emmy Noether in ihrem Kommentar in Dedekinds gesammelten Werken anmerkt, einen elementaren Spezialfall des Artinschen Reziprozitätsgesetzes darstellt. Tatsächlich findet sich Dedekinds Beweis in den Noten zur Klassenkörpertheorie von Artin & Tate [13] wieder, nämlich beim Beweis von Artins Reziprozitätsgesetz für den rationalen Grundkörper.

[10]F. Gassmann [94]. Dies ist im wesentlichen ein im Nachlass von Hurwitz gefundenes Manuskript, in welchem dieser unabhängig von Frobenius zu denselben Resultaten gekommen ist. Frobenius hatte seine Resultate bereits 1880 erhalten und hat seine Pläne zur Umarbeitung des Manuskripts erst aufgegeben, als er am 2.1.1896 einen Brief von Hurwitz erhielt, in dem dieser ihm seine Ergebnisse mitteilte.

Gassman gab das Hurwitzsche Manuskript heraus und hat es kommentiert; dabei hat er das erste Beispiel nichtisomorpher Zahlkörper mit der gleichen Zetafunktion konstruiert. Diese Fragestellung wurde in jüngster Zeit u.a. von Perlis [245] und de Smit [298, 299] wieder aufgegriffen, die auch Zahlkörper mit der gleichen Zetafunktion, aber unterschiedlichen Klassenzahlen konstruierten. Vgl. auch die Monographie Klingens [153].

[11]M. Bauer [17]. Die Besprechung aus dem Jahrbuch durch Faerber gibt folgende Zusammenfassung:

> *Mittels der Theorie der Ideale wird der Satz bewiesen: „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die irreduktiblen Gleichungen (mit rationalen Koeffizienten) $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0$ zu derselben Klasse in dem Sinne gehören, dass die zugehörigen Galoisschen Resolventen dieselbe Gattung bestimmen, besteht darin, dass die Ausdrücke $f_1(x), f_2(x)$ im allgemeinen für dieselben Primzahlenmoduln in lineare Faktoren zerfallen.“*

[12]Das ist nicht richtig, wie Hasse in seiner Antwort feststellen wird.

[13]Scholz hat gezeigt, dass jede Teilerweiterung von K/k, wo K Klassenkörper von k ist, galoisch über dem Grundkörper k ist. Hier lässt er erkennen, dass er weiss, dass daraus nicht folgt, dass der Klassenkörper K abelsch über k ist. Das Gegenbeispiel einer Quaternionenerweiterung wird im Brief vom 01.06.1927 mit Rückverweis auf diese Bemerkung gegeben.

[14]Nach den Reduktionsschritten wird hier die Existenz des Klassenkörpers bewiesen unter der Annahme, dass H eine Idealgruppe von Primzahlindex ℓ ist über einem Grundkörper k, welcher die ℓ-ten Einheitswurzeln enthält.

[15]Friedrich Neiß wurde am 1.10.1883 in Dietzenbach (Kreis Offenbach) geboren. Er studierte ab 1905 in Berlin (1 Semester Gießen), machte 1910 sein Lehramtsstaatsexamen und arbeitete dann als Lehrer. Er promovierte 1914 in Leipzig über „Rationale Dreiecke, Vierecke und Tetraeder“, und habilitierte sich 1930 in Halle, wo er als Privatdozent arbeitete. 1935 wurde er Dozent in Berlin, und 1940 Professor.

3.2 08.05.1927, Scholz an Hasse

Wien, 8. Mai 1927.

Sehr geehrter Herr Professor!

Für Ihren Brief und die nachfolgende Karte meinen besten Dank! Zu 2.) Ihres Briefes hätte ich zu bemerken:

A) Ist k ein beliebiger Grundkörper, so kann man doch ohne weiteres behaupten, dass $K' = k(\zeta, \sqrt[\ell]{\mu})$, wo ζ ℓ^{te} prim. Ew. und $\mu < k(\zeta)$, ein Galoisscher Körper ist. Dies ergibt sich mit der elementaren Körpertheorie so:[1)]

Ist $\vartheta = \varphi(\zeta, \sqrt[\ell]{\mu})$ eine K' erzeugende Grösse, so sind die Conjugierten zu ϑ gewiss unter den Grössen:

$$\varphi\left(\zeta^{\kappa}, \zeta^{\lambda} \cdot \sqrt[\ell]{\mu}\right) = \varphi_{\kappa\lambda}\,(\zeta, \sqrt[\ell]{\mu}) = t^{(\kappa,\lambda)}(\vartheta) \qquad \text{enthalten.}$$

Ich hätte allerdings dies gleich so ausführen sollen, da es sonst so aussieht, als wollte man nur die Conjugierten: $\zeta^{\lambda}\sqrt[\ell]{\mu}$ in bezug auf $k(\zeta)$ bilden, und die Tatsache hat mich oft selbst stutzig gemacht.

B) Von meinen beiden Beweisen der Reduktion 3.), die den Weg gehn, dass $k' = k(\zeta)$ und dann auch $K' = k\left(\zeta, \sqrt[\ell]{\mu}\right)$ Klassenkörper über k wird, bleibt der jedenfalls richtig, der schliesst, dass Unterkörper von Klassenkörpern wieder Klassenkörper sein müssen; bei diesem Beweis wird dann nur noch davon Gebrauch gemacht, dass die Klassenkörpereigenschaft schon durch: ‚$h_m = n$' allein charakterisiert ist.

Der andere Beweis dagegen benutzt direkt den Takagischen ‚Hilfssatz'[2)] und ist in dieser Form daher verkehrt. Die Anlehnung an Takagi war aber hier ganz überflüssig; man kann einfach schliessen: Sind k' und K die in Takagis ‚Hilfssatz' vorkommenden Körper, so zerfallen jedenfalls die Primideale, die in k' unzerfallen bleiben, in K in ℓ Primideale; denn sonst müsste K zyklisch sein. Ist nun in der Reduktion 3. $\mathfrak{H}$ die vorgegebene Idealgruppe vom Index ℓ, $\mathfrak{L}$ die Idealgruppe vom Index m, zu der der Körper $k' = k(\zeta)$ gehört, so wähle man jetzt ein Primideal in k, welches nicht bloss ausserhalb $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{L}$ liegt, sondern sogar in einem die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}}$, ebenso (unveränderterweise) die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{H}}$ erzeugenden Klassencomplex, d. h. also wenn $\mathfrak{D}$ der Durchschnitt von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{L}$, in einem die Faktorgruppe: $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}} \sim \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}} \times \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{H}}$ erzeugenden Klassencomplex. (Ich habe jetzt plötzlich für die Idealgruppen deutsche statt lateinische Buchstaben verwandt.)

Ein solches Primideal müsste aber auch in $K' = k(\zeta, \sqrt[\ell]{\mu})$ unzerfallen bleiben, also K' zyklisch über k. Der erweiterte Satz von der arithmetischen Progression wird hier schon dabei verwandt, dass das Primideal nicht bloss ausserhalb $\mathfrak{L}$, sondern sogar in einer ‚erzeugenden' Nebengruppe zu $\mathfrak{L}$ liegt.

Ihr Beweis für: ‚$h_m < n$' im Falle des Nichtgaloisschen Körpers, den Sie mir noch nachsandten, ist allerdings noch einfacher als meiner, namentlich, weil ich die Frobeniusschen Resultate noch auf Relativkörper übertragen musste; sonst aber operiert ja die Frobeniussche Abhandlung mit denselben Mitteln wie Ihr §5, und das Frobeniussche Resultat ist ein sehr übersichtliches.

Ihrer Anregung, eine kleine Note[3] aus diesem Satz zu machen, würde ich gern Folge leisten. Meinten Sie es so, dass Sie die Note in eine Arbeit von Ihnen einfügen oder getrennt, vielleicht im Anschluss daran, ins Crelle–Journal aufnehmen wollten? Oder würden Sie jetzt lieber Ihren Beweis anbringen und meinen erwähnen oder beide Beweise anbringen? Und wenn ich nun die Note abfasse, genügt es dann, wenn ich sie Ihnen schriftlich einsende und Sie sie dann eventuell passend einfügen?

Ich bleibe noch wenigstens 2 Monate in Wien, vielleicht auch noch etwas länger. Mit den Vorlesungen habe ich es recht gut getroffen. Prof. Furtwängler behandelt jetzt gerade in seinem Seminar Klassenkörpertheorie (Fall des Führers: $f = 1$)[4] und Reciprocitätsgesetze.

Mit ergebenstem Gruss

Ihr

Arnold Scholz.

Wien XVIII,
Messerschmidtgasse 32,
Tür 7.

Anmerkungen zum 08.05.1927

[1]Hier macht Scholz einen Anfängerfehler. Tatsächlich wusste schon Kummer (vgl. Hilberts Zahlbericht [133, Satz 147]), dass $k(\zeta, \sqrt[\ell]{\mu})/k$ mit $\mu \in k(\zeta)$ genau dann über k galoissch ist, wenn es eine zu ℓ teilerfremde Zahl a gibt, sodass $\mu^{\sigma - a}$ eine ℓ-te Potenz in $k(\zeta)$ ist, wo σ die Galoisgruppe von $k(\zeta)/k$ erzeugt.

[2]Der Beweis dieses Hilfssatzes enthält den von Hasse in seinem Bericht [113] angesprochenen Fehler. Zum Zeitpunkt des ersten Briefes vom 22.04.1927 wusste Scholz noch nicht, dass dieser Hilfssatz so nicht gilt.

[3]Die gemeinsame Note ist [S1].

[4]Hierbei handelt es sich um die Theorie des Hilbert-Klassenkörpers, die im wesentlichen von Furtwängler selbst nach dem Hilbertschen Vorbild entwickelt worden ist. Die Beschränkung auf Führer 1, also auf unverzweigte Erweiterungen, führt zu einer gewissen Vereinfachung der Beweise, insbesondere der zweiten Ungleichung und des Existenzsatzes. Jedoch reicht die Existenz des Hilbert-Klassenkörpers zum Beweis der Reziprozitätsgesetze aus.

Olga Taussky begann ihr Studium in Wien 1925 und hörte in ihrem ersten Jahr eine Vorlesung von Furtwängler über Zahlentheorie; in ihrem zweiten Jahr gab Furtwängler ein zweistündiges Seminar über algebraische Zahlentheorie und eine Einführung in die Klassenkörpertheorie. Als Scholz in Wien ankam, hatte Taussky Furtwängler bereits um ein Dissertationsthema gebeten, und Furtwängler schlug ihr Klassenkörpertheorie vor. Sie wird daher sicherlich das Seminar besucht und dort Scholz getroffen haben. Wie sie später einmal schrieb, hat sie mit Scholz damals aber keine Kontakte geknüpft: das geschah erst später auf der DMV-Tagung in Königsberg.

3.3 01.06.1927, Scholz an Hasse

Wien, 1. VI. 1927.

Sehr geehrter Herr Professor!

Für Ihren liebenswürdigen Brief vom 25. Mai mit den Einlagen, die ich hier zurücksende, meinen besten Dank! So, wie Sie die beiliegende Note[1)] zur Klassenkörpertheorie veröffentlichen wollen, ist es sicher das beste, und ich bin damit sehr einverstanden. Im einzelnen hätte ich dazu noch einiges zu fragen: Der Absatz 3.) auf S. 4 fällt doch wohl fort gegen das Kapitel auf S. 5–7? Wenn ich richtig verstanden habe, geht also der auf S. 7 angegebene Beweis davon aus, dass der Existenzsatz für *beliebige* Idealgruppen schon bewiesen sei, und deswegen, weil nicht nur jedem Körper zwischen k und K eine Idealgruppe zwischen A und H entspricht, sondern auch umgekehrt, gilt nicht nur, dass $H_1 \leqq H_2$ und $K_1 \geqq K_2$ gegenseitig folgt, sondern auch, wie man dann folgert, dass dem Durchschnitt oder Compositum mehrerer H_i das Compositum oder der Durchschnitt der zugeord. K_i entspricht, sodass man auch (S. 7, Z. 8) eine Darstellung von A/H als Compositum paarweise teilerfremder Untergruppen erhält, woraus doch aber dann auch sofort folgt, dass die Zerlegung direkt ist, da A/H Abelsch ist.[*)]

Dann ist mir der Satz (S. 7 unten) unbekannt, dass eine nichtzyklische Gruppe von Primzahlpotenzordnung stets mehrere Untergruppen vom Index p besitzt. Gilt dieser Satz allgemein[2)] oder nur für Gruppen, deren Untergruppen Normalteiler sind? Allgemein habe ich mir folgendes überlegt: Ist A ein Element dieser nichtzykl. Gruppe von der Maximalordg.: p^α, so gibt es jedenfalls doch ein von der Gruppe $\{A\}$ unabh. El. B von einer Ordg.: p^β, und es sind dann schon $\{A^{p^{\alpha-\beta}}\}$ und $\{B\}$ zwei Untergruppen der Ordnung p^β; es würden dann für die Untergruppen dieser Ordg. der Galoisschen Gruppe[**)] von K/k die zugehörigen Idealgruppen nicht mehr ausreichen. Also muss die Galoissche Gruppe von K/k in zyklische Faktoren direkt zerlegt sein.

Als ich mir damals überlegte, dass Unterkörper von Klassenkörper stets wieder Klassenkörper und damit Galoissch sind, vermutete ich auch zuerst, dass man daraus schliessen kann, dass die Klassenkörper Abelsche Körper sind, und dachte beweisen zu können, dass eine Gruppe, deren Untergruppen sämtlich invariant sind, Abelsch sein müsse. Ich erwartete, schon mit

---

[*)] Es ist eine direkte Zerlegung, aber noch keine vollständige in zyklische Gruppen.

[**)] der nicht mehr zerlegbaren Untergruppe einer Ordg. p^μ der Gal. Gr.

dem Ansatz, dass jedes Element einer solchen Gruppe nur in eine eigene Potenz transformiert werden kann, für Nichtabelsche Gruppen auf einen Widerspruch zu stossen, stiess aber stattdessen schliesslich auf die Quaternionengruppe.[3)] Ich hatte darum auch in meinem Brief vom 22. April in Klammern hinzugefügt, dass man aus meinen Überlegungen noch nicht schliessen kann, dass der Klassenkörper Abelsch ist.

Besonders interessant finde ich es auch, dass man den Satz 4[4)] auch noch aus der Geschlechtertheorie herausheben kann. Ich werde daraufhin den Beweis von Satz 4 noch einmal durchstudieren; bisher bin ich noch nicht dazu gekommen. Wir haben das schon bei unserm Arbeitszirkel als eine starke Complification empfunden, dass man den harmlos aussehenden Satz 4 bisher nur mit Hilfe eines Existenzsatzes, des Satzes 5[5)] beweisen konnte.

Dass $k\left(\zeta, \sqrt[\ell]{\mu}\right)$ im allg. kein Galoisscher Körper zu sein braucht, habe ich inzwischen dann nach dem vielen Hin– und Herschwanken, ob es richtig sei, doch bemerkt. Ich hatte zuletzt bei der Darstellung: $\vartheta = \varphi\left(\zeta, \sqrt[\ell]{\mu}\right)$ das Bild nebeneinander adjungierter Körper im Auge. Es ist doch merkwürdig, mit wie wenigen fehlerhaften Mitteln beliebiger Art man ‚auskommt', um zu schwer zugänglichen Teilen des Fermat–Satzes zu gelangen! Auf den andern Fehler, dass ich vorzeitig den Satz von der arithm. Progression benutzte, bin ich so gekommen, dass mir die Klammerbemerkung zu Takagis Satz 5 schliesslich ganz in Vergessenheit geraten war, während ich noch wusste, dass er auf H. Weber hinwies und glaubte, der Satz sei endgültig erledigt. Die Fehler haben sich also da eingeschlichen, wo ich dem Satz, dass $h = n$ einen Galoisschen Körper bedingt, auszuweichen suchte. Richtig bleibt also die Reduktion 3., bei der ich fortgesetzt diesen Satz anwende:
1) um behaupten zu können, dass stets $k(\zeta)$ Klassenkörper über k;
2) dass auch K' Klassenkörper über k ist;
3) um von K' primzahlgradweise bis zu einem Körper K vom Grade ℓ über k hinabsteigen zu können, der dann notwendig Klassenkörper zu H ist; indem man schliesst, dass jeder Körper, zu dem man von K' aus gelangt, wieder Galoissch ist, sodass man die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von K'/k von hinten in eine Compositionsreihe mit dem vordersten Index: ℓ entwickeln kann:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc} \mathfrak{G} & \underset{\beta}{\underbrace{\triangleright}} & \mathfrak{H} & \triangleright & \cdots & \triangleright & \mathfrak{P}_3 & \underset{\beta}{\underbrace{\triangleright}} & \mathfrak{P}_2 & \underset{p_2}{\underbrace{\triangleright}} & \mathfrak{P}_1 & \underset{p_1}{\underbrace{\triangleright}} & \mathcal{E}\,. \\ k & < & K & < & \cdots & & \overline{\overline{\overline{K}}}' & < & \overline{\overline{K}}' & < & \overline{K}' & < & K'\,. \end{array}\right.$$

Ich weiss nicht, ob ich diesen Beweis in meinem Brief vom 22. April angegeben habe, oder was für einen Beweis sonst ausser dem verkehrten mit der arithm. Progression. Ich habe mir selbst leider nichts aufgeschrieben; es ist das eine schlechte Angewohnheit von mir, dass ich fast alles nur im Kopf mache; die Gefahr der Fehler ist dann auch grösser. Ich werde mir also alles mal aufschreiben, was ich mir in der Klassenkörpertheorie überlegt habe.

Wie ich evtl. einen Beitrag zur Reduktion 3.) abfassen sollte, werde ich natürlich erst abwarten, bis Sie mir die Korrektur Ihres Teil I[a] zusenden

können.[6] Wenn man davon ausgeht, wie der Leser ohne grossen Aufwand am meisten Einblick in die Klassenkörpertheorie bekommt, würde ich doch auch denken, dass man ruhig mit den Reduktionen beginnt, die ja den Satz 2 vollständig in sich aufnehmen, von dem ja im Falle der Primzahlordnung nichts zu beweisen übrig bleibt. Der Leser sieht dann, dass es die Hauptaufgabe ist, die beiden correspondierenden *Existenzsätze*[7] für *Primzahlordnung* zu beweisen; und ausserdem kann [man] dann die Betrachtung über Gruppen mit nur invarianten Untergruppen entbehren. Oder würde sich dadurch dann nicht der Satz 4 so schön beweisen lassen? Wenn man nun noch auf Anwendungen der Klassenkörpertheorie hinzielt — und es scheint doch die Klassenkörpertheorie die hauptsächlichste Grundlage für idealtheoretische Untersuchungen zu werden — so wird man, wenn es nicht gerade so tiefliegende Dinge sind wie die Reziprozitätsgesetze, meistens mit solchen Begriffen zu operieren haben, wie sie bei den Reduktionen verwandt werden, sodass auch einer, der die Theorie nicht vollständig durchstudiert hat, mit den klassenkörpertheoretischen Ergebnissen wird operieren können.

Ich werde morgen eine Pfingstreise nach Graz und in die Steirischen Alpen antreten. In Wien bleibe ich sicher den Juli hindurch, wahrscheinlich auch noch teilweise den August.

Ein frohes Pfingstfest wünscht
Ihnen, Herr Professor,

Ihr ganz ergebener

Arnold Scholz

Anmerkungen zum 01.06.1927

[1]Die gemeinsame Arbeit [S1].

[2]Dieser Satz gilt in der Tat für beliebige p-Gruppen.

[3]Dies war damals bereits bekannt: schon Dedekind [63] konnte zeigen, dass alle nicht-abelschen Gruppen, deren Untergruppen alle normal sind (solche Gruppen nannte Dedekind Hamiltonsche Gruppen), direktes Produkt einer Quaternionengruppe, einer elementar-abelschen 2-Gruppe, und einer abelschen Gruppe ungerader Ordnung sind (sh. z.B. M. Hall [110, Thm. 12.5.4]). Hasse hatte Anfang Mai in einer Postkarte an Speiser angefragt, ob es nicht-Abelsche Gruppen gibt, deren sämtlichen Untergruppen Normalteiler sind. Speiser antwortete ihm darauf am 12.05.1927 mit dem Beispiel der Quaternionengruppe und einem Verweis auf Webers Algebra II, S. 129.

[4]Satz 4 ist das Zerlegungsgesetz der zum Führer teilerfremden Primideale im Klassenkörper.

[5]Satz 5 ist der Umkehrsatz, wonach jede abelsche Erweiterung Klassenkörper zu einer geeigneten Idealgruppe ist.

[6]Hier geht es um den nächsten Teil von Hasses Klassenkörperbericht, der Beweise und Erläuterungen zu den Sätzen aus Teil I enthält. Hasse hat Scholz diesen Teil nachgeschickt, und im nächsten Brief vom 6.7.1929 bezieht sich Scholz bereits auf Beweise aus Teil Ia.

[7]Hierbei handelt es sich zum einen um Takagis Satz 1 aus Hasses Bericht [113, § 4]:

> *Zu jeder Idealgruppe H aus k existiert (unabhängig von deren Erklärungsmodul $\mathfrak{m}$) ein und nur ein Klassenkörper K.*

Der zweite Existenzsatz ist Satz 5 aus [113, § 4]:

> *Jeder relativ-Abelsche Körper K über k ist Klassenkörper zu einer eindeutig bestimmten Idealgruppe H von k. [...]*

3.4 06.07.1927, Scholz an Hasse

Wien, 6. VII. 1927.

Sehr geehrter Herr Professor!

Entschuldigen Sie, bitte, dass es diesmal noch länger gedauert hat, als ich erwartet hatte! Ich hatte gerade in der Woche, in der Sie mir die Fahnenkorrektur[1)] sandten, und der darauffolgenden ein mengentheoretisches Referat im Seminar von Prof. Hahn, und das liess mich nicht dazu kommen, die Sache sogleich eingehend noch einmal zu überlegen. Ich glaube, dass für die zu veröffentlichende Arbeit von den Reduktionen nur die Reduktion 3. in Frage kommt, die ich gesondert aufgeschrieben habe. Zur Reduktion 2. könnte man höchstens noch als Anmerkung anfügen, dass man in Teil I^{a} §7 Punkt (5.) hinter dem zweiten Absatz fortfahren kann: Dass K nur einen solchen Körper, den Körper K_1, enthält, folgt nach Manuskript Satz II daraus, dass jeder solcher Körper Klassenkörper über k sein müsste, während doch nur eine H enthaltende Idealgruppe vom Index ℓ existiert. (Man. Satz I ist dann hierbei garnicht benutzt, da die zu prüfenden Körper als Galoissch bekannt sind.)

Punkt (3.) in der Reduktion 2. (I^{a} §7)[2)] könnte man vielleicht einfacher noch so ausdrücken: Die Zuordnung: $\mathfrak{A}_1 \to N_{K_1/k}(\mathfrak{A}_1) \cdot H$ ist nach dem Normenmultiplikationsgesetz: $N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a}) \cdot N(\mathfrak{b})$ eine eineindeutige der Nebengruppen zu $\overline{H}_1$ in $\overline{A}_1$ auf die Nebengruppen zu H innerhalb H_1. Denn fallen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ in dieselbe Nebengruppe zu $\overline{H}_1$, so liegt $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1}$ in $\overline{H}_1$, also $N_{K_1/k}\left(\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1}\right) = \frac{N(\mathfrak{A}_1)}{N(\mathfrak{B}_1)}$ in H, also auch $N(\mathfrak{A}_1)$ und $N(\mathfrak{B}_1)$ in derselben Nebengruppe zu H. Ebenso kann man rückwärts schliessen, da ja nach der Definition von $\overline{H}_1$ $\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1}$ in $\overline{H}_1$ liegen soll, wenn $\frac{N(\mathfrak{A}_1)}{N(\mathfrak{B}_1)}$ in H liegt. Ebenso liefert das Normenmultipl. gesetz die Isomorphie der beiden Gruppen, da ja aus: $\mathfrak{A}_1\overline{H}_1 \cdot \mathfrak{B}_1\overline{H}_1 = \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\overline{H}_1$ folgt: $N(\mathfrak{A}_1)H \cdot N(\mathfrak{B}_1)H = N(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1)H$, welches die $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\overline{H}_1$ zugeord. Nebengruppe [ist]. (Dies gehört natürlich nicht in die Publikation.) H_1' kann man ganz weglassen.

Bei der Reduktion 3. dachte ich auch erst schon, nach der Vorlage des Teil I^{a} die Aufteilung: $k < k_1 < \cdots < k'$ (S. 29) voranzustellen; es schien mir dann aber doch wenig vorteilhaft, da ich ja, um dem Umkehrungssatz auszuweichen, doch immer benutzen musste, dass die Körper k_ν alle durch Adjunktion von Teilen des ℓ^{ten} Kreisteilungskörpers zu k entstanden sind. So bin ich auf meine ursprünglichste Fassung der Reduktion 3. zurückgekommen.

Den Zerlegungssatz habe ich indessen auch noch einmal durchstudiert. Es kommt also der Umkehrungssatz wirklich nur soweit in Anwendung, wie er in Manuskr. Satz II. enthalten ist: Zweimal wird die Klassenkörpereigenschaft des Zerlegungskörpers eines Klassenkörpers benutzt: S. $\left\{\begin{array}{c} 29 \\ 30 \end{array}\right\}$ Z. 17 v. u. in Teil I.; zweimal wird der Satz 11 angewandt: S. 30 Z. 3 u. 21. v. o. Im zweiten Fall ist aber die Teilerfremdheit (umgekehrte) der Gruppen H und H' bekannt, sodass hier ebenso wie bei der Reduktion 1. Satz 10 ausreicht. Im ersten Falle kann man aus der paarweisen Teilerfremdheit der Körper sofort auf die paarweise umgekehrte Teilerfremdheit der Gruppen schliessen, da zu einer gemeinsamen Übergruppe zweier H_i ein gemeinsamer Teiler zweier K_i als Klassenkörper gehören müsste nach Satz 1 und 10. Man kann aber auch noch den Satz 11 vom Umkehrsatz unabhängig machen, indem man erst b) (S. 28 u.) beweist. Vielleicht lohnt sich das auch mit in die Publikation aufzunehmen; ich schreibe es darum auf die Sonderbogen. Da meine Notizen ja sowieso noch den Ihren angepasst werden müssen, habe ich vorläufig noch die mir geläufigen Bezeichnungen verwandt, z. B.: $<$ statt $\leqq$ bei Körpern und Gruppen.

Zum Beweis des Zerlegungssatzes wollte ich noch bemerken, dass (Teil I S. 29) (a)[3)] zwar eine Teilbehauptung ist, aber (b) doch die vollständige, da ja nur von den zum Führer primen Idealen die Rede ist und die Zahl f die eineindeutige Zuordnung liefert (vgl. Formulierung des Satzes 4). Da man nun nur von den zum Führer primen Idealen spricht, benutzt man ja in a) auch den Führer–Relativdiscr.–Umkehrsatz nicht, bloss den Satz 3 selbst in b). Ich dachte schon, ob es nicht möglich ist, den Satz 3 durch Betrachtung des Trägheitskörpers auch noch aus dem Beweis des Satzes 4 herauszubringen und vielleicht gar Satz 4 ohne Beschränkung auf zum Führer prime Ideale zu beweisen, sodass sich daraus dann von selbst ergibt, dass die Relativdiscriminante und der Führer dieselben Primideale enthalten. Ferner, ob man nicht die allgemeine Relativdiscr. formel (Teil I §9 Satz 16,[4)] 17[5)]) auf dem Reduktionswege auf die Formel: $\mathfrak{d} = \mathfrak{f}^{\ell-1}$ für relativ zykl. Körper zurückführen kann. Der Heckesche Beweis[6)] muss doch jedenfalls ein furchtbarer Umweg sein.

Dann scheint es mir, als ob man Teil I^{a} Satz 11[7)] auch ohne analytische Hilfsmittel beweisen könnte. Jedenfalls gilt dies, wenn man nur: $\left(\frac{\mu_1}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mu_2}{\mathfrak{p}}\right) = \cdots = \left(\frac{\mu_m}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ verlangt. Denn dass es in jedem Körper unendlich viele Primideale ersten Grades gibt, lässt sich ohne analytische Hilfsmittel beweisen, und ich glaube, dass das Hinzufügen von $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$, ohne sich natürlich auf einen bestimmten Restcharakter ζ^i festzulegen, auch noch keine analytischen Hilfsmittel erfordern dürfte.[8)]

Mit den besten Grüssen Ihr ganz ergebener Arnold Scholz

Anmerkungen zum 06.07.1927

[1]Hier handelt es sich um die Korrekturen der gemeinsamen Arbeit [S1].

[2]Es geht um den Nachweis, dass die Idealgruppe $\overline{H}_1$ Index $\ell^{\nu-1}$ und zyklische Faktorgruppe besitzt.

[3]Hasse teilt den Zerlegungssatz in zwei Teile auf:

(a) *Zerfällt* $\mathfrak{p}$ *in* K *in verschiedene Primidealfaktoren vom Relativgrade* f*, so liegt* $\mathfrak{p}^f$ *in* H.

(b) *Ist* $\mathfrak{p}^f$ *die früheste Potenz von* $\mathfrak{p}$*, die in* H *liegt, so zerfällt* $\mathfrak{p}$ *in* K *in verschiedene Primidealfaktoren vom Relativgrade* f.

[4]Satz 16. Ist K ein relativ-Abelscher Körper über k, der Klassenkörper zur Idealgruppe H vom Index h aus k ist, so ist die Relativdiskriminante $\mathfrak{d}$ von K nach k das Produkt $\prod_\chi \mathfrak{f}_\chi$ der Führer aller h Charaktere χ nach H.

[5]Satz 17. Der Führer $\mathfrak{f}$ von H ist das kleinste gemeinsame Multiplum $(\mathfrak{f}_\chi)$ aller Führer $\mathfrak{f}_\chi$ der h Charaktere χ nach H.

[6]Die Führer-Diskriminanten-Formel wird von Hasse in Teil I aus der Funktionalgleichung der L-Reihen abgeleitet. Diese Methode gibt oft auf relativ einfachem Weg tiefe Resultate über Diskriminanten, die sich direkt nur durch verwickelte Rechnungen mit höheren Verzweigungsgruppen herleiten lassen. Vereinfachungen finden sich auch bei Herglotz [131] und in der viel zu wenig gelesenen Arbeit [50] von Carlitz.

[7]Dieser Satz lautet: *Ist* μ *von* $\mu_1, \ldots, \mu_R$ ℓ*-unabhängig, so existieren unendlich viele Primideale* $\mathfrak{p}$ *(sogar* 1*-ten Grades), so daß gilt:*

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1; \quad \left(\frac{\mu_1}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \ldots, \left(\frac{\mu_R}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Er findet sich schon bei Kummer, wurde von Hilbert in den Zahlbericht [133, Satz 152] aufgenommen, und später in seinen Arbeiten über relativ-quadratische Erweiterungen wesentlich benutzt.

[8]Dass die Idealklassengruppe in den Körpern $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ der p-ten Einheitswurzeln von Primidealen vom Grad 1 erzeugt wird, konnte Kummer algebraisch beweisen; für beliebige Galoissche Zahlkörper findet sich das entsprechende Resultat in Hilberts Zahlbericht ([133, Satz 89]) und in Washington [331]. Scholz erwähnt das Problem auch noch einmal in seiner Skizze des Artikels über *Spezielle Zahlkörper*. Der Frage, wieviel von Chebotarevs Dichtigkeitssatz sich algebraisch beweisen lässt, sind Lenstra & Stevenhagen [173] nachgegangen.

3.5 20.08.1927, Scholz an Hasse

Wien, 20. VIII. 1927

Sehr geehrter Herr Professor!

Für Ihren Brief[1)] und die Zusendung Ihres Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes[2)] meinen besten Dank! Zugleich möchte ich die Gelegenheit benutzen, Ihnen, Herr Professor, im voraus zum Geburtstag zu gratulieren. Ich muss nun auch mal näher meine Personalien angeben, da sie noch nicht im Jahresbericht der D. M. V. zu finden sind. Also ich bin $6\,{}^{1}/_{3}$ Jahr jünger, am 24. XII. 1904 geboren. Seit dem S. S. 1923 besuchte ich die Universität in Berlin, wollte schon immer mal einen Sommer nach ausserhalb gehen, kam aber erst diesen Sommer dazu. Zuerst dachte ich an Freiburg[3)]. Prof. Schur riet mir aber, an eine bedeutendere Universität zu gehn, riet mir zu Göttingen[4)] und Hamburg.[5)] Ich hatte aber wieder keine Lust, im grauen Norden zu bleiben, und so kam ich schliesslich darauf, das Schöne mit dem Nützlichen zu verbinden und nach Wien[6)] zu gehen. An die Klassenkörpertheorie habe ich mich eigentlich erst Ende Oktober letzten Jahres gewagt. Ich hatte früher davon immer nur im Zusammenhang mit elliptischen Funktionen[7)] gehört, und das hatte mich etwas abgeschreckt.[8)] Schon Dedekind schreibt in seiner Abhandlg. über kubische Körper (Crelle **121**)[9)] dass man den dort aufgestellten Satz über das Abhängen der Zerlegungen der Primzahlen von ihrer Darstellbarkeit in den Klassen der quadratischen Formen der Discriminante des kubischen Körpers wird mit Hilfe der Theorie der ellipt. Funktionen beweisen könne. Ich hatte diesen Satz schon früher vermutet, ehe ich diese Abhandlung las, auf Grund dessen, dass 2 kubischer Rest ist[10)] für die Primzahlen von der Form: $x^2 + 27y^2$. Ich probierte dann auch den kubischen Restcharakter von andern Primzahl[en] aus, ebenso das allgemeine Gesetz an vielen Beispielen der Tabelle kubischer Körper von L. W. Reid (Diss. Gött. 1898)[11)] die übrigens einige Fehler enthält. Ich suchte dann, den allgemeinen Satz, wie er im Crelle **121** S. 96 steht, rein algebraisch zu beweisen, merkte dann jedenfalls, dass man [genaue] Reziprozitätsgesetze braucht[12)]; denn gar zu oft ist das Modul, was man zum Rest haben möchte und umgekehrt. Dass man die Reziprozitätsgesetze auf die Klassenkörpertheorie zurückführt und so auch transcendente Hilfsmittel gebraucht, hätte ich damals nicht gedacht,[13)] bis ich's dann in Ihrem Bericht las. Möglich, dass man den Bedarf für kubische Körper ohne analytische Hilfsmittel decken könnte. Als ich dann Ende Oktober meinen Lehrer F. Neiss mal wieder besuchte (vielleicht kennen Sie seine Abhandlung über ‚Relativ Abelsche Zahlkörper', Sitzber. d. Bln. Math. Ges.

26. 5. 1920. Er beschäftigt sich ziemlich viel mit Klassenkörpertheorie; seine Abhandlung gehört in die Kreiskörpertheorie), da schlug er vor, einen Arbeitszirkel über Klassenkörpertheorie zu veranstalten, und da ich gerade Ihren Bericht etwas angesehen hatte, namentlich das Vorwort, schlug ich vor, danach vorzugehen. Im Laufe des Winters orientierte ich mich dann weiter über die Klassenkörperliteratur, fand zum Schluss auch noch die Note von Takagi in den C. R. **171**, S. 302 (?), (1920) Über die Dedekindsche Vermutung[14] (Crelle **121**), die damit vollständig erledigt ist. Ich hatte mir dies inzwischen auch schon auf Grund der Klassenkörpertheoriesätze soweit überlegt, dass der Galoissche Körper eines nichtgal. kubischen Körpers stets *Ring*–Klassenkörper über einem quadratischen Körper ist[15] und, wie man sagen kann, zu einer Untergruppe der quadr. Formenklassen einer Discriminante: $D = \partial Q^2$ gehört, wo Q Führer, und dass dann die Discriminante des nichtgal. kubischen Körpers wirklich D ist; nur in dem Falle, wo ∂ und Q beide durch 3 (genau durch 3, bzw. höchstens durch 9) teilbar sind, gelang es mir nur zu zeigen, dass D, $\frac{D}{9}$ oder $\frac{D}{81}$ die Discriminante des kubischen Körpers[16] ist. In diesem letzten Falle scheint man ohne die complicierte Betrachtung der Verzweigungskörper in den C. R. **171** nicht auszukommen.[17] Gewundert hat mich bloss, dass bei dieser Abhandlung von Takagi eine Hauptsache garnicht explicite angegeben ist, nämlich dass jeder galoissche Körper eines kubischen Körpers wirklich *Ring*klassenkörper[18] ist, was zwar aus einer Bemerkung resultiert, die aber in den C. R. **171**, ich glaube, auf 304 oben nur in eckigen Klammern hinzugefügt ist.

Da diese Behandlung des kubischen Körpers nun erledigt war, habe ich mich dann an eine andre, hoffentlich noch nicht erledigte, klassenkörpertheoretische Aufgabe begeben, die ich mir dann jetzt als Dissertation gewählt habe und mit Prof. Furtwängler hier bespreche: Zu zeigen, dass es über jedem endlichen Zahlkörper Körper mit vorgeschriebener auflösbarer Gruppe gibt, wozu mir das Vorgehen mit klassenkörpertheoretischen Hilfsmitteln unbedingt vorteilhaft erscheint, wenn nicht erforderlich. Ich glaube jetzt alles Material beisammen zu haben, um die Sachen durchführen zu können, und mir scheint auch, dass man mit den nötigen Erweiterungen dann überhaupt aus der Klassenkörpertheorie eine gewisse Radicalkörpertheorie aufbauen kann. Vorläufig bleibe ich aber mal bei meinem ‚Existenz'thema. Da hat es mich nun ganz besonders interessiert zu hören, dass die Substitution $\sigma_{\mathfrak{p}}$ Klasseninvariante[19] ist. Das brauche ich nämlich unbedingt für meine Arbeit, wie ich Ende Juli merkte; überlegte mir auch gleich, dass darin enthalten ist, dass das ℓ^h-te Potenzrestsymbol $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{\ell^h}$ Klasseninvariante für den Klassenkörper $k\left(\sqrt[\ell^h]{\mu}\right)$ ist, dass man aber auch aus der Invariante $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{\ell^h}$ die Invariante $\sigma_{\mathfrak{p}}$ für Abelsche Körper überhaupt erhalten kann bis auf gewisse Ausnahmefälle, die mich nicht interessiert hätten; hörte dann auch von Prof. Furtwängler, dass er gerade von Ihnen die Nachricht von Artins neuem Beweis des Reziprozitätsgesetzes[20] bekommen. Dass man aber erst über die Invariante $\sigma_{\mathfrak{p}}$ zur Invariante $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ gelangt, was mir sehr angenehm ist, hörte ich jetzt erst

von Ihnen. Ist eigentlich die Invarianteneigenschaft von $\sigma_{\mathfrak{p}}$ auch jetzt erst von Artin bewiesen oder etwa schon von Tschebotareff in seiner Abhandlung über die Dichte der zu einer Substitution gehörigen Primideale, die ich nur flüchtig angesehn habe ? Die Definition von $\sigma_{\mathfrak{p}}$ stammt ja von Frobenius, oder wenigstens die von S_p bei rationalem Grundkörper.

Ihre Gründe zur Weglassung[21)] der Reduktion 3 in unserer Note sehe ich ganz ein. Ich bin eben eigentlich vom entgegengesetzten Prinzip ausgegangen, den Kreiskörper als besonders durchsichtig dem allgemeinen Klassenkörper vorwegzunehmen. Das Manuskript senden Sie dann wohl am besten Anfang September an meine Adresse in *Berlin–Charlottenburg 1, Scharrenstr. 39.* Entweder bleibe ich bis Ende August hier und komme nach einem Salzburger Aufenthalt am 7. IX. in Berlin an, wo ich es sofort mir ansehen kann, während ich hier in den letzten Tagen mit der Abreise viel zu tun habe. Oder ich bleibe wegen einer plötzlich dazwischengekommenen Hochzeit in Schlesien noch länger hier, um direkt dorthinzufahren, und dann werden mir meine Eltern das Manuskript von Berlin sofort hierher nachsenden.

Mit den besten Grüssen.

Ihr ganz ergebener A. Scholz.

Anmerkungen zum 20.08.1927

[1]Der Brief war vom 17.08.1927; sh. den Scholzschen Brief vom 25./27.04.1931.

[2]Das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz besagt $(\frac{\alpha}{a}) = (\frac{a}{\alpha})$ für semi-primäre $a \in \mathbb{Z}$ und $\alpha \in \mathbb{Z}[\zeta_\ell]$ (sh. [167]). Es war ein notwendiges Hilfsmittel für sämtliche Beweise der Reziprozitätsgesetze für ℓ-te Potenzreste mit $\ell \geq 5$ durch Kummer, Hilbert, Furtwängler und Takagi (und in gewisser Hinsicht auch für $\ell = 3, 4$, da in diesen Fällen das kubische und biquadratische Reziprozitätsgesetz durch rein formale Rechnungen aus dem spezielleren Eisensteinschen Gesetz folgt). Kummer hätte sein Reziprozitätsgesetz sicher liebend gern bewiesen, ohne auf Eisenstein verweisen zu müssen; Furtwängler hatte einen Beweis des Reziprozitätsgesetzes für ℓ-te Potenzreste ohne Zuhilfenahme des Eisensteinschen Gesetzes versucht, jedoch enthielt der Beweis eine Lücke, die er wenig später mit dem Eisensteinschen Reziprozitätsgesetz schließen konnte.

Erst Artins Zugang zur Klassenkörpertheorie erlaubte es, diese Reziprozitätsgesetze ohne das Eisensteinsche zu beweisen. Dabei hat er allerdings die Hilbert-Tschebotareffsche Technik der abelschen Durchkreuzung verwendet, die in gewisser Hinsicht demselben Ideenkreis entstammt. So wird z.B. der Beweis des Satzes von Kronecker-Weber heute in aller Regel mit Hilberts Idee der abelschen Durchkreuzung geführt, während schon Delaunay (Delone) gesehen hat, dass man denselben auch mittels des Eisensteinschen Reziprozitätsgesetzes und Dichtigkeitssätzen führen kann. Es wäre interessant, der Frage nachzugehen, ob man auch Artins Reziprozitätsgesetz mit dem Eisensteinschen Reziprozitätsgesetz statt mittels abelscher Durchkreuzung beweisen kann.

Jedenfalls entstand nach Artins Beweis die Frage, wie man das Eisensteinsche Gesetz einfach aus dem Formalismus der Klassenkörpertheorie herleiten kann. Mit dieser Frage hat sich Hasse in seiner Arbeit [115] auseinandergesetzt.

[3]Damals unterrichteten in Freiburg Alfred Loewy (1897 habilitiert, Professor 1902–1933), Lothar Heffter (Professor 1911–1931), Heinrich Kapferer (1926 habilitiert, 1932–1937 nichtbeamteter Professor), Wolfgang Krull (Professor 1926–1928) und Ernst Zermelo (Professor 1926–1935).

[4]In Göttingen wirkten damals Emmy Noether, sowie Hilbert, Landau und Courant.

[5]Die Lehrstühle der 1919 gegründeten Hamburger Universität wurden mit Wilhelm Blaschke, Erich Hecke und Johann Radon von Anfang an hervorragend besetzt, und das mathematische Seminar erlangte durch das Wirken von Hecke, und wenig später auch von Schreier und Artin, schnell eine überragende Bedeutung innerhalb der deutschen Zahlentheorie.

[6]In Wien gab es damals drei Ordinarien, nämlich diejenigen von Wilhelm Wirtinger (1935 emeritiert), Hans Hahn (gestorben 1934), und Furtwängler (1938 emeritiert).

Wirtinger wurde am 19.7.1865 in Ybbs an der Donau geboren, studierte ab 1884 Mathematik in Wien, und ging nach seiner Promotion 1887 nach Berlin und Göttingen. 1892 wurde er Assistent an der TH Wien, 1896 Ordinarius in Innsbruck, ab 1903 dann in Wien. Wirtinger starb am 16.1.1945 in Ybbs.

Hans Hahn wurde am 27.9.1879 in Wien geboren, studierte Mathematik in Strassburg, München und Wien, wo er 1902 promovierte und 1905 habilitierte. 1909 wurde er Professor in Czernowitz, wurde 1915 im Krieg schwer verletzt. 1917 wurde er Professor in Bonn, 1921 dann Ordinarius in Wien. Zusammen mit Schlick und Neurath gründete er den Wiener Kreis. Er starb am 24.7.1934 nach einer Krebsoperation in Wien.

[7]Die Theorie der komplexen Multiplikation, wie sie Kronecker, Weber, Fueter und schließlich auch Takagi entwickelt hatten, benutzt elliptische Funktionen, um alle (!) abelschen Erweiterungen imaginär-quadratischer Zahlkörper explizit zu konstruieren. Die Theorie ist weitgehend analog zur Theorie der abelschen Erweiterungen des rationalen Zahlkörpers, welche sich explizit durch Kreiskörper angeben lassen.

[8]Weber verwandte den ganzen Band III seiner Algebra darauf, die Theorie der Komplexen Multiplikation zu entwickeln, und bringt ganz am Schluss seine Definition des Klassenkörpers.

[9]R. Dedekind untersucht in [66] rein kubische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$. Das Manuskript geht auf Untersuchungen aus dem Jahre 1872 zurück. Zu dieser Zeit dachte Dedekind noch, er könne die Hauptergebnisse auf beliebige kubische Zahlkörper übertragen; später stellte sich jedoch heraus, dass das ohne Klassenkörpertheorie nicht zufriedenstellend zu machen war.

Im folgenden geben wir eine kurze Zusammenfassung der Dedekindschen Arbeit.

§ 1 Dedekind betrachtet reine kubische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$.

§ 2 Jeder solche hat die Gestalt $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$ für $m = ab^2$, wo a und b quadratfrei sind.

§ 3 Es ist $3\mathcal{O}_k = \mathfrak{p}^3$ oder $3\mathcal{O}_k = \mathfrak{p}^2\mathfrak{q}$ für Primideale $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, je nachdem $9 \mid (a^2 - b^2)$ ist oder nicht. Dedekind nennt K einen Körper der ersten oder der zweiten Art, je nachdem $9 \nmid (a^2 - b^2)$ oder $9 \mid (a^2 - b^2)$ gilt.

§ 4 Dedekind bestimmt die Diskriminante und eine Ganzheitsbasis er findet $D = \operatorname{disc} K = -3k^2$, wo $k = 3ab$ oder $k = ab$ in Körpern der ersten oder der zweiten Art ist.

§ 5 Zerlegungsverhalten der Primzahlen $p \nmid D$: ist $p \equiv 2 \bmod 3$, dann gilt $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$ für Primideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ vom Grad 1 und 2. Ist $p \equiv 1 \bmod 3$, dann zerfällt p vollständig oder ist träge, je nachdem m ein kubischer Rest modulo p ist oder nicht.

§ 6 Dedekind führt die Zetafunktion ζ_K von K ein und bemerkt

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) = h \cdot \frac{2\pi \log \varepsilon}{k\sqrt{3}}.$$

Hier bezeichnet $\varepsilon > 1$ die Fundamentaleinheit von K.

§ 7 In diesem Abschnitt bespricht Dedekind die Arithmetik des Eisensteinschen Rings $\mathbb{Z}[\rho]$ $(\rho^2 + \rho + 1 = 0)$. Für Primteiler $\pi \in \mathbb{Z}[\rho]$ von p definiert Dedekind eine Funktion ψ wie folgt:

(a) $\psi(\pi) = 0$ falls $\pi \mid k$.

(b) $\psi(\pi) = 1$ falls $\pi \nmid k$ aber $\pi \mid D$. Dies kann nur für $p = 3$ auftreten, und nur wenn K von zweiter Art ist.

(c) $\psi(\pi) = (\frac{ab^2}{\pi})$ falls $\pi \nmid D$. Hier bezeichnet $(\frac{\cdot}{\cdot})$ das kubische Restsymbol.

Es ist jetzt klar, dass $\psi(\upsilon\pi) = \psi(\pi)$ für alle Einheiten $\upsilon \in \mathbb{Z}[\rho]$ gilt, und dass $\psi(\pi') = \psi(\pi)^2$ ist.
Dann zeigt Dedekind, dass der Eulerfaktor der Zetafunktion ζ_K für die Primzahl p wie folgt geschrieben werden kann:

$$F(p) = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \cdot \prod_{\pi \mid p} \frac{1}{1 - \frac{\psi(\pi)}{p^s}}.$$

§ 8 Hier erinnert Dedekind an das kubische Reziprozitätsgesetz.

§ 9 Mittels des kubischen Reziprozitätsgesetzes kann Dedekind die Zetafunktion für K so umformen, dass sich die Bestimmung der Klassenzahl auf die Theorie der komplexen Multiplikation zurückführen lässt.

§ 10 Dedekind formt den Ausdruck für die Zetafunktion von K weiter um. Er setzt $S(k_\nu) = \sum N(\lambda)^{-s}$, wo λ alle Zahlen $\neq 0$ des Moduls k_ν durchläuft, und beweist dann, dass $\zeta_K(s) = \frac{1}{6}\sum \psi(\nu) S(k_\nu)$ gilt, wobei die Summe rechts über alle $\phi''(k)$ verschiedenen Moduln k zu erstrecken ist.

§ 11 In diesem Abschnitt kommt Dedekind auf binäre quadratische Formen zu sprechen; er zeigt, dass $S(k_\nu) = \sum (Ax^2 + Bxy + Cy^2)^{-s}$ ist, wo (A, B, C) die dem Modul k_ν zugeordnete quadratische Form (die Form, nicht aber deren Äquivalenzklasse, hängt von der Wahl einer Basis von k_ν ab) ist, und die Summe über alle Paare $(x, y) \neq (0, 0)$ ganzer Zahlen läuft. Er beweist weiter, dass jedem Tripel von äquivalenten Moduln k_ν, $k_{\nu\rho}$, $k_{\nu\rho^2}$ genau einer Klasse von Formen der Diskriminante $D = -3k^2$ entspricht, und dass es genau $3k''$ solcher Klassen gibt. Die Multiplikation der Moduln entspricht weiter der Komposition der Formen, bzw. der Formenklassen. Dedekinds Hauptsatz lässt sich nun wie folgt formulieren:

> *Seien a, b natürliche Zahlen und $ab > 1$ quadratfrei. Sei weiter $k = ab$ oder $k = 3ab$, je nachdem $a^2 \equiv b^2 \equiv 0 \bmod 9$ ist oder nicht. Dann ist die Anzahl aller quadratischen Formen (A, B, C) der Diskriminante $B^2 - 4AC = -3k^2$ immer ein Vielfaches $3k''$ von 3, und ein Drittel der Formenklassen dieser Diskriminante bildet eine Untergruppe G'' der Klassengruppe, welche durch die folgende Eigenschaft charakterisiert wird: Ist $p \equiv 1 \bmod 3$ eine nicht in D aufgehende Primzahl, so sind durch die k'' Formen der Untergruppe G'' genau die Primzahlen p darstellbar, von denen ab^2 kubischer*

> *Rest ist, während durch die Formen der übrigen $2k''$ Klassen alle und nur die Primzahlen dargestellt werden, von denen ab^2 kubischer Nichtrest ist.*

Danach formuliert Dedekind dieses Ergebnis noch mittels des Zerlegungsverhaltens der Primzahlen p im kubischen Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{ab})$. Schließlich erklärt er den Zusammenhang mit (teilweise damals noch unveröffentlichten) Resultaten von Gauß über das kubische Restverhalten von Primzahlen.

§ 12 Dedekind bemerkt dass es zu einer Diskriminante D unter Umständen viele verschiedene rein kubische Zahlkörper gibt; als Beispiel gibt er $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{6})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{12})$. Es folgen weitere Beispiele.

§ 13 Hier geht Dedekind auf die Bestimmung der Klassenzahl durch komplexe Multiplikation (insbesondere den Kroneckerschen Grenzwertsatz) ein und verweist auf Arbeiten von Weber und Kronecker.

Dedekinds Arbeiten über kubische Zahlkörper gehen auf eine recht frühe Zeit zurück; er spricht bereits in einem undatierten, aber wohl Anfang der 1880er Jahre geschriebenen, Brieffragment an Heinrich Weber von diesen Dingen (vgl. Scheel [277, S. 261]):

> *Meine Beschäftigung mit diesem Gegenstande, zu welcher ich durch das Studium der Körper dritten Grades gedrängt bin, ist immer nur eine vorübergehende, stets unterbrochene gewesen. Meine Bemerkungen werden Dir bunt durcheinander gewürfelt erscheinen; es ist eine ganze Welt von Stoff, und ich habe nicht Zeit, gut zu ordnen.*

Ausgangspunkt waren nach Dedekinds Worten die Dirichletschen Arbeiten zur Darstellung unendlich vieler Primzahlen durch binäre quadratische Formen und dessen (analytischem) Beweis der Existenz der Geschlechter, sowie „eine (ungedruckte?) Induction von Gauß" über den kubischen Restcharakter kleiner Zahlen. Im Laufe seiner Untersuchungen sei er dann auf das Problem gestoßen, den Grenzwert

$$\sum (Ax^2 + Bxy + Cy^2)^{-s} - \frac{1}{s-1} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{-D}}$$

zu bestimmen, wobei er „einen äußerst wichtigen Aufsatz von Kronecker benutzen" konnte, nämlich [155], in welchem dieser die Lösung Pellscher Gleichung mit elliptischen Funktionen und seinem Grenzwertsatz gibt. Dedekind bemerkt noch, dass ihn diese Untersuchungen auf sein η-Funktion geführt haben.

Teile von Dedekinds Ergebnissen über kubische Reste wurden später von Spearman & Williams wiederentdeckt (vgl. [302, 303], sowie Liu [177] und Bernardi [26]), und von Weinberger [337] erweitert. Sun [310] hat kürzlich rechnerische Beweise für Dedekinds Ergebnis gegeben, die elementar, aber recht langwierig sind.

[10]Diese Vermutung geht, ebenso wie ähnliche für den kubischen Restcharakter anderer kleiner Zahlen, auf Euler zurück, der diese Vermutungen in seinem „Tractatus" auflistete. Die ersten Beweise wurden von Gauss, Jacobi und Eisenstein gegeben, und zwar noch bevor Eulers Ergebnisse publiziert worden sind.

[11]Reid [264]; eine englische Übersetzung erschien 1901 im American J. Math. 23, 68–84. Reid war Student Hilberts; 1910 publizierte er ein englischsprachiges Lehrbuch der algebraischen Zahlentheorie, zu dem Hilbert das Vorwort schrieb.

[12]Auch Dedekind musste in seinem Beweis das kubische Reziprozitätsgesetz verwenden; dass er in seiner Arbeit [66] nur reine kubische Zahlkörper behandeln konnte, lag vor allem daran, dass ihm entsprechende kubische Reziprozitätsgesetze in Zahlkörpern, die $\sqrt{-3}$ enthalten, fehlten.

[13]Schon Kummer hat bei seinen Beweisen des Reziprozitätsgesetzes in regulären Kreisteilungskörpern analytische Hilfsmittel zur Konstruktion von „idealen Hilfsprimzahlen" benutzt. Der von Legendre gegebene Beweisversuch krankte daran,

dass dieser die Existenz gewisser Hilfsprimzahlen nicht nachweisen konnte. Gauss gelang ein solcher Nachweis in seinem ersten Induktionsbeweis durch eine elementare, aber geniale Konstruktion; Dirichlet schließlich stellte die analytischen Mittel bereit, mit denen man die Existenz solcher Hilfsprimzahlen relativ einfach sicherstellen konnte.

[14]T. Takagi [312]. Statt S. 302 muss es im Brief also S. 1202 heißen.

Takagis Arbeit legt einen Zahlkörper k von Primzahlgrad ℓ zugrunde, der zusammen mit seinen Konjugierten eine normale Erweiterung vom Grad $n\ell$ erzeugt.

[15]Auf diese Beobachtung hat Bruckner [44] noch einmal hingewiesen.

[16]Scholz ist also vom kubischen Reziprozitätsgesetz ausgehend zur zu seinen Untersuchungen über kubische Zahlkörper gelangt!

[17]Seinem nächsten Brief hat Hasse ein Manuskript über kubische Zahlkörper beigelegt; wann Hasse begonnen hatte, sich damit zu befassen, ist nicht klar. Jedenfalls hatte er den Artikel [27] von Berwick aus dem Jahre 1924 für die Fortschritte besprochen:

> *Die Frage nach den kubischen Zahlkörpern mit gegebener Diskriminante wird durch Erzeugung dieser Körper aus einer geeigneten quadratischen Irrationalität (die dem zugeordneten Galoisschen Körper angehört) behandelt. Abgesehen von der Frage, ob gewisse Typen von Diskriminanten wirklich vorkommen, ergibt sich eine Methode, die endlich vielen zu einer gegebenen Diskriminante gehörigen kubischen Zahlkörper sämtlich zu erhalten.*

Berwicks Methoden beschränken sich auf die klassische Algebra und Dedekinds Idealtheorie; er zitiert die Lehrbücher von Sommer und Bachmann, sowie Dedekinds Arbeit über rein kubische Zahlkörper, ist aber mit den klassenkörpertheoretischen Arbeiten von Hilbert und Furtwängler allem Anschein nach nicht vertraut. Am Schluss der Arbeit erwähnt er, dass die meisten seiner Resultate mit den von Wanda Braun in ihrer Dissertation [37] erzielten übereinzustimmen scheinen. Barrucand [15] hat später einige in der Theorie kubischer Körper auftretende Charaktere nach Berwick benannt.

Ähnliche Fragen hat Hasse in einem Tagebucheintrag vom Oktober 1928 (sh. [172]) diskutiert, das letztlich in seine Arbeit [117] eingeflossen ist (mit Hinweis auf die Arbeiten von Sapolsky [274] und Dedekind [66], nicht aber auf Berwick) und von Scholz im Jahrbuch wie folgt besprochen wurde:

> *Die Klassenkörpertheorie bestätigt die Dedekindsche Vermutung, dass in einem kubischen Körper mit der Diskriminante $D(\neq q^2)$ diejenigen Primzahlen voll zerfallen, die sich in einer bestimmten Untergruppe vom Index 3 der quadratischen Formen der Diskriminante D darstellen lassen. Ausschlaggebend ist, dass der Normalkörper des kubischen Körpers Ringklassenkörper über $P(\sqrt{D})$ ist – was in der Takagischen C. R.-Note (1920; F. d. M. 47, 147) schon durchgeführt ist – und dass $D = df^2$ zugleich Diskriminante des kubischen Körpers als der quadratischen Ordnung $\left[1, \frac{\varepsilon+\sqrt{D}}{2}\right]$ mit dem Führer f und der Körperdiskriminante d ist. Die Anzahl der kubischen Körper mit der Diskriminante $D = df^2$ bestimmt sich dann als Anzahl der Ringklassenuntergruppen vom Index 3 der Diskriminante D, die wirklich f als Führer haben.*

Darüberhinaus erwähnt Tschebotarjeff in seiner Übersicht [319, S. 257] die Dissertation von Voronoi [325], von der einiges, aber anscheinend nicht alles, in das Buch [69] von Delone & Faddeev eingeflossen ist.

[18]Diese Aussage findet sich als Bemerkung in Tschebotarjeffs [319, S. 257]; später haben ihr Jensen [149] und Bruckner [44, 45] Artikel gewidmet.

[19]Artin hatte Hasse in seinem Brief vom 17.07.1927 (sh. [75]) mitgeteilt, dass er nun sein bereits 1923 ausgesprochenes Reziprozitätsgesetz bewiesen habe, wonach das Artinsymbol (also der Frobeniusautomorphismus $\sigma_{\mathfrak{p}}$) nur von der Idealklasse von $\mathfrak{p}$ abhängt.

[20]Dieses hatte Artin 1923 bereits als „Satz“ formuliert und in Spezialfällen durch Anwendung expliziter Reziprozitätsgesetze beweisen können. Der „neue Beweis“ beruht auf Techniken (insbesondere die von Hilbert geborgte abelsche Durchkreuzung), die Chebotarev zum Beweis seines Dichtigkeitssatzes benutzt hatte, und die bereits in Hilberts Beweis des Satzes von Kronecker-Weber aufgetaucht waren.

[21]Scholz bringt diese Reduktion 3 später in seiner Arbeit [S10] über Abgrenzungssätze unter.

3.6 15.09.1927, Scholz an Hasse

Charlottenburg, 15. IX. 1927.

Sehr geehrter Herr Professor!

Für die Zusendung des Manuskripts[1)], Ihres Entwurfes über kubische Körper[2)] und des Artinschen Reziprozitätsgesetzes[3)] meinen besten Dank! Ich bin nun doch schon wieder nach Haus gereist, da die Hochzeit in Schlesien auf ungewisse Zeit verlegt ist; meine Ankunft hat sich allerdings um einige Tage verschoben, sodass ich erst jetzt zur Beantwortung komme.

Zum Manuskript hätte ich folgendes zu bemerken:

1) Beim Beweis des Satzes 2. könnte man vielleicht auf S. 11 Z. 3. v. u. noch deutlicher so schreiben: Da nun Satz 1 ergibt, dass in der Takagischen Definition des Klassenkörpers die Voraussetzung, der Körper sei relativ Galoissch, tatsächlich entbehrlich ist, ist daher K' Klassenkörper zu H' über k . . .

2) Dann wollte ich fragen, ob Ihnen viel daran gelegen ist, dass man auf Seite 4 unten zu: ‚Aus diesen Bemerkungen' hinzufügt: ‚des Jüngeren von uns', ebenso auf S. 14, Fussnote 2: ‚des Älteren von uns'. Sonst müsste man ja eigentlich oben zu unseren Namen die Geburtsdaten hinzufügen, was doch nicht üblich ist. Es lässt sich ja bei einer gemeinsamen Note doch schlecht scheiden. Oder wenn Sie Wert darauflegen, könnten Sie ja zur Einleitung noch hinzufügen, dass ich Ihnen diese Bemerkungen mitgeteilt hätte und Sie diese dann für die ‚Propädeutik' ausgenutzt hätten, dazu auch die Mitteilung von Speiser erhalten hätten[4)]. Ich würde es nicht für nötig halten.

3) Auf S. 15 fehlt noch die Fussnote [1)] (Zitat).

Ihr Manuskript über kubische Körper habe ich mir noch nicht näher ansehen können. Ich darf es wohl noch bis Ende September behalten.

Mit den ergebensten Grüssen.
Ihr

Arnold Scholz

Anmerkungen zum 15.09.1927

[1]Ihre gemeinsame Arbeit [S1] über Klassenkörpertheorie.

[2]Anscheinend als Reaktion auf die Bemerkungen von Scholz bezüglich seiner klassenkörpertheoretischen Untersuchungen kubischer Körper im Brief vom 20.08.1927 hat Hasse ihm sein Manuskript über ebendiese Frage geschickt, welches später als [117] veröffentlicht wurde. Da es sich hierbei um einen „Entwurf“ handelt, ist es durchaus denkbar, dass Hasse durch Scholz zu diesem Manuskript motiviert wurde. In der Folge befasst sich auch Scholz verstärkt mit diesen Fragen, die letztendlich zu seinen Publikationen [S11] über den Spiegelungssatz, [S12] über die Klassenzahlformel für kubische Zahlkörper, und zu seiner gemeinsamen Arbeit [S17] mit Taussky führen.

[3]E. Artin [6]; Chebotarev hatte in seinem Beweis des Dichtigkeitssatzes [316] die Technik der abelschen Durchkreuzung benutzt, die Hilbert im Zusammenhang mit dem Satz von Kronecker-Weber eingeführt hatte. Artin hatte diesen Satz in seiner Arbeit aus dem Jahre 1923 aus dem Artinschen Reziprozitätsgesetz hergeleitet, welches damals noch eine Vermutung war. Beim Anblick von Chebotarevs Arbeit muss ihm dann sofort klar geworden sein, dass sich dessen Techniken umgekehrt zu einem Beweis seines Reziprozitätsgesetzes benutzen lassen. Vgl. hierzu Lenstra & Stevenhagen [174], sowie den Briefwechsel Artin–Hasse [75].

[4]Speiser antwortet am 12. Mai 1927 auf Hasses Anfrage:

> *Es gibt in der Tat nicht-Abelsche Gruppen, deren sämtliche Untergruppen Normalteiler sind. Die einfachsten sind die Quaternionen. Da diese Gruppen immer direkte Produkte der Sylowgruppen sind, so kann man sich auf p-Gruppen beschränken und da muss dann $p = 2$ sein, sonst gibt es nur abelsche Gruppen. Sie finden in Webers Algebra II pg. 129 die volle Aufstellung aller dieser sog. Hamiltonschen Gruppen.*

Zwei Wochen später fragt Hasse Speiser, ob der Untergruppengraph einer Gruppe diese festlegt.

3.7 09.10.1927, Scholz an Hasse

Charlottenburg, 9. Okt 1927.

Sehr geehrter Herr Professor!

Entschuldigen Sie, bitte, dass ich Ihr Manuskript über die kubischen Zahlkörper noch so lange zurückbehalten habe. Meine Arbeit über die auflösbaren Körper hat mich die ganze Zeit doch noch sehr in Anspruch genommen, sodass ich inzwischen wenig dazu kam, mir Ihr Manuskript anzusehen. Ich werde mich wohl vorläufig auf die Konstruktion von solchen Körpern beschränken, die zu einer Gruppe gehören, deren zweite Ableitung schon das Einheitselement ist. Die Betrachtung dieser Gruppen erfordert schon viele Überlegungen. Bei den kubischen Körpern hat mich auch gerade das Kapitel: ‚Kubische Körper mit vorgegebener Discriminante' interessiert. Ich hatte mich eine Zeitlang damit beschäftigt, Fundamentaldiscriminanten (also $f = 1$) aufzusuchen, zu denen mehrere (also 4, 13, ...) kubische Körper gehören, und dann für jeden Körper eine Gleichung aufzustellen. Ich habe aber bisher noch keine Fundamentaldiscriminante gefunden, zu der mehr als 4 Körper gehören.[1] Unter den Discriminanten mit 4 kubischen Körpern eine positive: 217112[2] und zahlreiche negative: $-D = \ldots,$[3] 3299 (27), 4027 (9), 9748 (18), 16627 (18), 19427 (27), 19651 (18), 23683 (18), 34603 (27), 46587 (36), 47224,[4] 48667, 89923 (27), 97555 (72), 114403 (36), 116763 (90), 124771 (99). Die eingeklammerten Zahlen sind die Klassenanzahlen der zugehörigen quadratischen Körper; überall sind nur zwei Basisklassen in bezug auf 3 . Ich suchte mir dann aus 4 passenden (quadr. Formen–)Klassen je eine Primzahl und prüfte die Gleichung jedes kubischen Körpers als Congruenz nach diesen Primzahlen in bezug auf Zerfall.[5]

Mit den besten Grüssen.

Ihr sehr ergebener Arnold Scholz

Anmerkungen zum 09.10.1927

[1]Dies ist genau dann der Fall, wenn der 3-Rang der Idealklassengruppe > 2 ist. Beispiele solcher Körper wurden erst 1972 von Shanks & Weinberger [296] gefunden. Für Diskriminanten, die nicht fundamental sind, ist die entsprechende Aufgabe nahezu trivial.

[2]Hier hat Scholz vermutlich falsch abgeschrieben; meine erste Vermutung, dass die Diskriminante 217012 heißen müsse, hat D. Mayer widerlegt mit dem Hinweis, dass $D = 217012$ wegen $D/4 \equiv 1 \bmod 4$ nicht fundamental ist, und in der Tat ist $h(D/4) = 3$. Stattdessen schlägt Mayer die Korrektur $D = 214712$ vor; in diesem Fall ist die Klassengruppe in der Tat von der Form $(3, 3)$.

Ein einfaches Programm findet die Polynome $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, die in Tabelle 3.3 aufgelistet sind.

disc(f)	a	b	c	i	Cl(k)
-3299	0	-16	27	1	$[9,3]$
	0	2	11	1	
-4027	0	-8	15	1	$[3,3]$
	0	10	1	1	
-9748	0	1	38	1	$[6,3]$
	0	10	36	1	
-16627	0	16	3	1	$[6,3]$
	0	64	24	8	
	2	-2	23	1	
-19427	0	-4	27	1	$[9,3]$
	0	-40	101	1	
	2	-2	25	1	
-19651	0	-2	27	1	$[6,3]$
	0	16	11	1	
-23683	0	10	27	1	$[6,3]$
	0	-26	59	1	
	1	11	30	1	
-34603	0	-2	179	5	$[9,3]$
	0	24	319	9	
	1	17	30	1	
	2	18	-13	1	
-46587	0	-18	375	9	$[6,6]$
	1	13	42	1	
	1	23	8	1	
-47224	1	-26	58	1	$[48]$
-48667	0	-14	47	1	$[12,3]$
	0	22	15	1	
-89923	1	57	-36	9	$[9,3]$
	2	58	93	9	
-97555	0	28	19	1	$[12,6]$
	1	-21	64	1	
-114403	1	-15	64	1	$[12,3]$
	1	17	-54	1	
-116763	1	21	-48	1	$[30,3]$
	1	27	-30	1	
-124771	0	-26	85	1	$[33,3]$
	0	28	37	1	
217012	0	-40	38	1	$[3,3]$
	2	-44	46	1	

Tabelle 3.3. Polynome $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

1935 hat Pall [243] das Beispiel $D = 62501$ mit Klassengruppe vom Typ $(3, 3)$ publiziert.

[3]Für den Körper mit Diskriminante $D = -2891$ ist die Klassengruppe vom Typ $(6, 3)$.

[4]Die Klassengruppe f ür $-D = 47224$ ist zyklisch der Ordnung 48; dagegen hat $-D = 47827$ eine 3-Klassengruppe vom Typ $(3, 3)$, ist aber, wie mir D. Mayer

d	a	b	i
−3299	45	11	1
	101	15	1
−4027	69	13	1
	125	17	1
−9748	60	22	4
	242	29	4
−16627	55	17	1
	179	23	1
−19427	15	17	1
	171	23	1
−19651	1	17	1
	207	25	1
−23683	309	31	1
	423	37	1
−34603	491	41	1
	617	47	1
−46587	395	37	1
	521	43	1

d	a	b	i
−47224	38	23	1
−46587	395	37	1
	521	43	1
−48667	1	23	1
	519	43	1
−89923	171	31	1
	431	41	1
−97555	1	29	1
	147	31	1
−114403	69	31	1
	297	37	1
−124771	279	37	1
	539	47	1
217012	1284	71	1
	13840	363	1
214712	1008	34	4
	1554	73	4

Tabelle 3.4. Darstellungen $d = a^2 - 4b^3$ der Diskriminante d

mitteilte, wegen $D = -283 \cdot 13^2$ ebenfalls nicht fundamental. Es ist aber schwer zu sagen, ob Scholz sich verrechnet oder nur verschrieben hat.

[5]Hat man die Diskriminante D eines solchen Körpers, so ist die Berechnung aller reduzierten Klassen quadratischer Formen der Diskriminante D kein Problem. Ist die Klassengruppe vom Typ $(3, 3)$, so hat die Klassengruppe genau 4 Untergruppen vom Index (und der Ordnung) 3, die nach der Klassenkörpertheorie 4 unverzweigten zyklischen kubischen Erweiterungen des quadratischen Zahlkörpers k der Diskriminante D entsprechen. Hat man nun vier Gleichungen kubischer Körper mit Diskriminante D, und gibt es in jeder Untergruppe eine Primzahl p, die in genau einem dieser Körper zerfällt, so müssen diese Körper unabhängig über k sein und damit den vollen Klassenkörper erzeugen.

3.8 24.10.1927, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) 24. X. 1927.

Lieber Herr Hasse!

Für Ihre Karte vom 15. X. vielen Dank! Prof. Schur besuchte ich am 28. Sept.; er war damals vor kurzem von der Reise zurückgekehrt, erwähnte auch unsere Note und sagte, dass sie natürlich aufgenommen wird. Aber ich kann ihn ja nächstens noch einmal erinnern.

Die Beispiele von Discriminanten, die ich neulich angab, sind alles Discriminanten von quadratischen Zahlkörpern, die genau 2 Basisklassen in bezug auf 3 für die absoluten Idealklassen haben. Davon sind die mit ungerader Klassenanzahl ($-D = 4027$, 3299, 19427, 34603, 89923, 124771) Primzahlen[1]. Das Beispiel $D = -4027$, das ich zuerst gefunden habe, steht auch in der Gauss schen Tabelle als irregulär, was allerdings auch nichts besagt,[2] da D von der Form: $8n + 5$. Es ist aber $D = -4027$ vom Abelschen Typ: $(3, 3)$, in der Gauss schen Tabelle: $(3, 9)$. Dagegen habe ich die Discr.: $D = -9748$ erst aus der Gaussschen Tabelle (dort unter dem Namen[3]: -2437).

Für $D = -4027$ lauten z. B. die quadr. Formenklassen:[4]

4 kub. Körper mit den Gl.:

(1,	1,	1007)					
(19,	± 1,	53)	$\longleftrightarrow$	$x^3 + 43x + 56$	$=$	0	19, 53
(13,	± 9,	79)	$\longleftrightarrow$	$x^3 - 44x + 113$	$=$	0	13, 79
(17,	± 11,	61)	$\longleftrightarrow$	$x^3 - 8x + 15$	$=$	0	17, 61
(29,	± 27,	41)	$\longleftrightarrow$	$x^3 + 10x + 1$	$=$	0	29, 41

In allen 4 kub. Körpern zerfallen nur die in der Hauptklasse (1, 1, 1007) darstellbaren Zahlen; in jedem Körper dann ausserdem nur die Zahlen eines Nebengruppenpaars. 13, 17, 19, 29 : charakteristische Primzahlen für den Zerfall. Discr. gewonnen durch doppelte Darstellbarkeit[5] $D = 69^2 - 4 \cdot \mathbf{13}^3 = 125^2 - 4 \cdot \mathbf{17}^3$ (noch kein sicheres Mittel[6]).

Mit freundlichem Gruss. Ihr Arnold Scholz

Quadr. Körper mit mehr als 2 Basiskl. habe ich noch nicht gefunden.

Anmerkungen zum 24.10.1927

[1]Nach der Gaußschen Geschlechtertheorie ist die Klassenzahl von Formen mit Fundamentaldiskriminante $D < 0$ genau dann ungerade, wenn D eine Primdiskriminante ist, also $D = -4$, $D = -8$, oder $D = -q$ für prime $q \equiv 3 \bmod 4$.

[2]Da Gauss quadratische Formen mit geradem Mittelkoeffizient betrachtet, ist seine Klassengruppe isomorph zur Ringklassengruppe mod 2, was für negative $D \equiv 5 \bmod 8$ einen Extrafaktor 3 in der Klassenzahl zur Folge hat.

Die irregulären Körperdiskriminanten bei Gauss hat Berwick aufgelistet; in [27, S. 375] gibt er die folgenden Beispiele (in Klammern dahinter stehen die Klassengruppen, die sich bei Berwick nicht finden):

m	$\mathrm{Cl}(k)$	m	$\mathrm{Cl}(k)$
-974	$(3,3,4)$	-6226	$(3,3,4,2)$
-2437	$(3,3,2)$	-8242	$(3,3,2,2)$
-5069	$(3,3,4,2)$	-9385	$(3,3,4,2)$
-5857	$(3,3,4)$	-9574	$(9,3,2)$
-6085	$(3,3,2,2)$	-9934	$(3,3,4)$
-6221	$(3,3,2,7)$	-10798	$(3,3,4)$

[3]Gauss betrachtete nur quadratische Formen $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ mit geradem Mittelkoeffizient; für solche Formen definierte er die Determinante $D = B^2 - AC$. Die Determinante -2437 entspricht also der Diskriminante $-4 \cdot (2437) = -9748$.

[4]Die Berechnung aller 9 reduzierten Formen mit Diskriminante $D = -4027$ ist einfach. Nun ist bekannt (Legendre; sh. z.B. Scholz [S22]), dass die kleinsten von einer reduzierten positiv definiten quadratischen Form (A, B, C) dargestellten natürlichen Zahlen $A \le C \le A - |B| + C$ sind. Für die 4 Paare von Formen, die nicht in der Hauptklasse liegen, sind A und C im Falle $D = -4027$ bereits prim, man bekommt die darstellbaren Primzahlen hier also geschenkt.

[5]Die Gleichung $D = -4027 = 69^2 - 4 \cdot 13^3$ kann man auch in der Form $13^3 = \frac{69^2 - D}{4}$ schreiben, aus der hervorgeht, dass das Element $\alpha = \frac{69+\sqrt{D}}{2}$ eine dritte Idealpotenz ist (eine kleine Rechnung zeigt sofort, dass Elemente der Form $\frac{a+\sqrt{D}}{2}$ nie dritte Potenzen sind): $(\alpha) = \mathfrak{a}^3$ für $\mathfrak{a} = (13, \frac{69+\sqrt{D}}{2}) = (13, \frac{-9+\sqrt{D}}{2})$ wegen $69 - 6 \cdot 13 = -9$. Unter der Korrespondenz von Idealen und Formen entspricht dieses Ideal der Form $Q_1 = (13, 9, C)$, wobei sich C aus $-4027 = 9^2 - 4 \cdot 13C$ zu $C = 79$ ergibt. Entsprechend führt $D = 125^2 - 4 \cdot 17^3$ auf die Form $Q_2 = (17, 11, 61)$. Da Q_1 und Q_2 unabhängig sind, kann man die andern Formen daraus durch Komposition gewinnen. Hat man die Diskriminante -4027 erst einmal, ist natürlich die direkte Abzählung der reduzierten Formen ebenfalls kein Problem.

Als nächstes sind die Gleichungen der kubischen Körper zu bestimmen. Hätte er sie, wie man das heute macht, aus der Kenntnis von Einheiten- und Idealklassengruppe des reellquadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-3D})$ bestimmt, dann hätte ihm sofort der Inhalt seiner späteren Arbeit [S11] ins Auge stechen müssen. Stattdessen hat Scholz (sh. [S17, p. 29–30]) einfach nach Lösungen der diophantischen Gleichung $Dm^2 = 4a^3 - 27b^2$ für kleine m gesucht: der Ausdruck $4a^3 - 27b^2$ ist nämlich die Diskriminante des Polynoms $x^3 - ax + b$. Für $D = -4027$ ergibt sich aus $-4027 \equiv 4a^3 \bmod 27$ sofort $a^3 \equiv -1 \bmod 27$, also $a \equiv 8 \bmod 9$. Damit findet man die beiden letzten Gleichungen relativ leicht, und auch die zweite nach nicht allzu langer Rechnung. Falls man für $m = 1$ keine Gleichung findet, versuche man dasselbe für kleine Werte von m; aus $a^3 \equiv -m^2 \bmod 27$ folgt sofort, dass man außer

$m = 1$ erst $m = 8$ und $m = 10$ etc. zu versuchen braucht, und in der Tat wird man dann für $m = 10$ fündig: die Diskriminante der ersten Gleichung ist $10^2 D$.

Scholz beschreibt in [S17, p. 30] eine weitere Möglichkeit, die vier Gleichungen zu bestimmen, wenn man zwei davon bereits kennt: sind nämlich $x^3 - a_1 x + b_1 = 0$ und $x^3 - a_2 x + b_2$ solche Gleichungen mit Diskriminante D und Dq^2 (q rational, $a_1 a_2 \neq 0$, Zerfällungskörper nicht isomorph), so kann man mit den Cardanischen Formeln leicht zeigen, dass die beiden anderen gegeben sind durch $x^3 - a_j x + b_j$ ($j = 3, 4$) mit $a_3 = a_4 = 3a_1 a_2$, sowie $b_3 = -\frac{1}{2}(27 b_1 b_2 + Dq)$ und $b_4 = -\frac{1}{2}(27 b_1 b_2 - Dq)$.

Für $a_1 = 8$, $b_1 = 15$ und $a_2 = -10$, $b_2 = 1$ findet man beispielsweise die beiden Polynome $x^3 + 240x - 1811$ (mit Diskriminante $-4027 \cdot 3^6 \cdot 7^2$) und $x^3 + 240x - 2216$ (mit Diskriminante $-4027 \cdot 2^6 \cdot 3^6$).

[6]Natürlich ist eine Fundamentaldiskriminante, wenn es dazu zwei nicht isomorphe kubische Körper gibt, sicher irregulär. Dagegen ist die Scholzsche Methode, solche Körper zu finden, keine systematische Methode insofern, als es keine Garantie gibt, damit auch alle irregulären Diskriminanten unterhalb einer gewissen Schranke zu finden.

3.9 11.11.1927, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) 11. XI. 1927.

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihren Teil I[a] der Klassenkörpertheorie[1)] und für Ihre letzte Karte! Ich wollte erst noch ausführlicher berichten, wie ich allgemein die Discriminanten mit zwei Basisklassen für 3 aufstelle, komme aber jetzt doch nicht dazu[2)]. Ist es eigentlich bekannt, ob jede Primzahl überhaupt Teiler der Klassenanzahl eines quadratischen Körpers sein kann?[3)] — Die Idealklassengruppe wird man vielleicht daran gerade leichter festlegen können, wenn man die Idealklassen ungerader Ordnung in die Hauptklasse zusammenfasst. Die Anzahl der Basisklassen in bezug auf 2 kann man ja leicht festlegen,[4)] und die Ordnung 2^ν der einzelnen Basiselemente könnte man vielleicht durch biquadratische Reziprozitäten[5)] u. ä. festlegen.

Mit den besten Grüssen.

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 11.11.1927

[1]Hasse hatte Scholz im Juli 1927 die Korrektur des Teils Ia seines Berichts [114] geschickt; vermutlich hat Scholz das Manuskript nun zurückgeschickt.

[2]In der gemeinsamen Arbeit mit Taussky geht Scholz auf diese Frage ganz kurz ein. Auf S. 29 unten erklärt er, dass er Gleichungen $x^3-sx-t=0$ mit Diskriminante $\Delta = m^2D$ sucht, indem er die diophantische Gleichung $4s^3-27t^2=m^2D$ löst. Im Falle $D=-3299$ beispielsweise wählt er $s \equiv 0 \bmod 13, 19$ und t (im Artikel steht hier fälschlicherweise s statt t) als kubischen Rest. Hier sind $p=13$ und $p=19$ die kleinsten Primzahlen $p \equiv 1 \bmod 3$ mit $(\frac{D}{p}) = +1$; die Gleichung $4s^3-27t^2 = m^2D$ liefert dann, wenn man $s \equiv 0 \bmod p$ wählt, $(\frac{-3}{p}) = (\frac{D}{p}) = +1$, und weil $x^3-sx-t \equiv 0 \bmod p$ lösbar ist, wird p in diesem Zahlkörper voll zerlegt sein. Auf S. 30 erklärt Scholz dann, wie er aus zwei unverzweigten kubischen Erweiterungen die beiden andern bestimmt.

[3]Die Antwort lautet: ja. Bereits 1922 hatte Nagell [218] gezeigt, dass es zu jedem $g \in \mathbb{N}$ unendlich viele komplex-quadratische Zahlkörper mit durch g teilbarer Klassenzahl gibt. Dieses Resultat wurde von Humbert [141] und Ankeny & Chowla [2] wiederentdeckt. Max Gut [105] zeigte 1951, dass es unendlich viele komplex-quadratische Zahlkörper mit durch 3 teilbarer Klassenzahl gibt, und gab die dazugehörigen unverzweigten kubischen Erweiterungen explizit an.

[4]Die Anzahl der Basisklassen in bezug auf 2 wird durch die Gaußsche Geschlechtertheorie geliefert. Ist t die Anzahl der in einem quadratischen Zahlkörper K verzweigten Primzahlen, so ist der 2-Rang der Idealklassengruppe im gewöhnlichen Sinne $t-1$, wenn -1 Norm eines Elements aus K ist, und $t-2$ andernfalls.

[5]Für die Klassen der Ordnung 4 hat dies später Rédei (sh. Rédei & Reichardt [258]) gemacht.

Davor scheint es nur vereinzelte Ergebnisse von Dirichlet in dieser Richtung gegeben zu haben. Dirichlet betrachtete prime $a \equiv 1 \bmod 8$. Sei Q eine quadratische Form, welche nur Primzahlen $\equiv 1 \bmod 4$ darstellt; Dirichlet zeigt dann, dass der Ausdruck $\chi_p(Q) = (\frac{a}{p})_4(\frac{p}{a})_4$ (die Symbole sind biquadratische Restsymbole) nicht von p, sondern nur von Q abhängt und wir daher $\chi(Q)$ schreiben dürfen. Für die Hauptform Q_0 ist $\chi(Q_0)=1$.

Die Formen $Q=(2a,b,c)$ und $Q'=(a,b,2c)$ nennt Dirichlet nach Legendre konjugiert. Schreibt man $a=A^2+B^2$, dann ist $\chi(Q') = (\frac{2}{A+B})\chi(Q)$.

Für $a=17$ sind Primzahlen p mit $(\frac{p}{17}) = +1$ von einer der Formen $Q_0 = x^2+17y^2$, $Q_1 = 3x^2+2xy+6y^2$, $Q_2 = 2x^2+2xy+9y^2$, oder $Q_3 = 3x^2+2xy+6y^2$ dargestellt. Nach der Gaußschen Geschlechtertheorie werden Primzahlen $p \equiv 1 \bmod 4$ von Q_0 oder Q_2 darsgestellt. Aus Dirichlet's Ergebnissen folgt (beachte, dass die Konjugierte von $(2,2,9)$ die Form $(1,2,18) \sim Q_0$ ist), dass solche p von Q_0 dargestellt werden, wenn $(\frac{17}{p})_4(\frac{p}{17})_4 = +1$ ist, und andernfalls von Q_2. Dieses Ergebnis wurde 1970 von Brandler [33, 34] wiederentdeckt.

3.10 15.02.1928, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) 15. II. 1928.

Lieber Herr Hasse!

Auf Ihre Karte hin sende ich Ihnen zugleich meine Korrekturen zu. Ich habe bei meinem Namen noch ‚Charlottenburg' durchgestrichen, weil ich hörte, dass man nicht den Wohnort, sondern die Universität angibt, an der man sich aufhält und dann ‚Bln.–Charl.' mit der Techn. Hochschule verwechselt werden könnte.

Dann würde ich noch vorschlagen, auf S. 7. der Korrektur (Z. 28): ‚oben bewiesenen *Punkt* 2' oder so ähnlich statt ‚*Satz* 2' zu schreiben, da man sonst an den formulierten Satz 2 auf S. 2 denken könnte. Wenn Sie damit einverstanden sind, verbessern Sie es, bitte, auch an meiner Korrektur. Sonst glaube ich's richtig mit dem Korrigieren gemacht zu haben.

Die Separataversendungsliste würde ich gern mal kennen lernen. Ich möchte mir aber doch noch 40 Exemplare auf eigene Kosten überher bestellen, da ich doch eine ganze Anzahl Bekannte habe und nachher die Exemplare knapp werden; ich notiere darum noch 40 Separata extra auf meinem Bestellzettel. Hoffentlich gibt das nachher beim Verlag keine Confusion!

Mit meiner Dissertation[1)] bin ich jetzt fertig. Die Hauptsache ist hierbei eine Übersicht über die Gruppen mit Abelscher Kommutatorgruppe[2)] und Reduktion der Körperkonstruktion auf zwei Fälle deutlich gebauter Gruppen, von denen ich die Erledigung des zweiten Falls, von Primzahlpotenzordnung, noch aufschieben[3)] muss.

Mit freundlichem Gruss. Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 15.02.1928

[1]A. Scholz [S2].

[2]Scholz betrachtete endliche Gruppen G, deren Kommutatorgruppe G' abelsch ist. Zu jeder solchen Gruppe gibt es eine Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = G$, wenn man dies für zwei spezielle Arten von Gruppen zeigen kann, nämlich für Dispositionsgruppen und für p-Gruppen; dabei kann man die Konstruktion von Erweiterungen zu gegebener p-Gruppe auf solche von einem gewissen Maximaltyp beschränken, die Scholz „Zweiggruppen" genannt hat.

[3]Die Konstruktion in diesem Falle gelang Scholz erst später unter Benutzung des Richterschen Einbettungssatzes.

3.11 26.02.1928, Scholz an Hasse

Charlottenburg, 26. II. 1928.

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für die Separataliste! Ich will also gleich angeben, an wen ich noch dachte:

1)	*Math.*	*Seminar*	Berlin Univ.
2)	*E.*	*Schmidt*	Berlin Univ.
3)	*v.*	*Mises*	Berlin Univ.
4)	*v.*	*Neumann*	Berlin Univ.
5)		*Feigl*	Berlin Univ.
6)		*Löwner*	Berlin Univ.
7)		*Hammerstein*	Berlin Univ.
8)		*Remak*	Berlin Univ.
9)		*Neiss*	Berlin Univ.
10)	*A.*	*Brauer*	Berlin Univ.
11)	*E.*	*Rothe* (*Breslau T. H.*)	Berlin Univ.

Dann sind immer noch private Bekannte, und etwas Reserve muss man ja auch behalten. Den hier Angeführten könnte ich ja die Separata selbst überreichen, ebenso I. Schur, Bieberbach und Strassmann, die Sie in Ihrer Liste anführten.

Die Versendung der Exemplare liegt ja vorläufig noch weit hin. Von Neiss wollte ich Ihnen überhaupt noch die Adresse mitteilen, da er auf dem Gebiete der Klassenkörpertheorie arbeitet:

Oberstudienrat Dr. F. Neiss, Berlin N. W., Paulstr. 17.*)

Ich besuchte ihn neulich mal wieder; er scheint jetzt endlich von ‚Amtsplagen' etwas los– und zu sich, d. h. zur Klassenkörpertheorie, wieder zu kommen. Bisher hat er ja in dieser Richtung nur eine Note über Relativ–Abelsche Körper veröffentlicht (1920). Ich bin meinesteils jedenfalls froh, dass ich es schon längst aufgegeben habe, Staatsexamen zu machen; die Oberlehrerlaufbahn wäre nichts für mich.

Prof. Schur meinte noch, es wäre ganz gut, wenn ich den Akten für die Einreichung meiner Dissertation ein Exemplar unserer Note beilegen könnte. Ob bis Mitte März noch eine zweite Korrektur kommt, von denen ich ein

*) für den Fall, dass Sie sonst mal an ihn Separata senden wollen; er hatte vorigen Winter mit mir unsern Klassenkörperarbeitszirkel geleitet.

Exemplar verwenden könnte? Sonst möchte ich Sie bitten, wenn es geht, mir dann das eine Exemplar von der jetzigen Korrektur zurückzuschicken. Da Sie mir damals schrieben, dass ich Ihnen die Korrekturen senden möchte, dachte ich, dass Sie beide Exemplare benötigten.

Dass ich wohl vergessen hatte, die 40 besonderen Exemplare und meinen Namen auf dem Bestellzettel zu vermerken, fiel mir ein, als ich den Brief in den Kasten geworfen hatte.

Ich muss mich jetzt für meine Arbeit immer noch nach etwa vorhandener Literatur über Körperkonstruktion für auflösbare Gruppen umsehen. Über den Abelschen Fall hinaus scheinen da nur einzelne Arbeiten von Mertens[1)] (Quaternionengruppe ...) vorzuliegen. Es gibt zwar systematische Arbeiten von Mertens und G. Bucht[2)] (u. Wiman)[3)] über Aufsuchen aller Körper gegebener Gruppe; doch ist, so viel ich weiss, in keiner dieser Arbeiten angegeben, ob die dort gefundenen Parameterdarstellungen wirklich Körper[4)] liefern. Wissen Sie darüber noch näher Bescheid?

Ich möchte auch gleich noch mal meine gruppentheoretischen Ergebnisse näher angeben. Ich operiere da hauptsächlich mit folgenden Begriffen:

Ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ ein direktes Produkt der Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so nenne ich $\mathfrak{G}$ auch das absolute Produkt von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}}$ und $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$. Allgemein nenne ich $\mathfrak{G}$ das relative Produkt[5)] der Gruppen $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}'_1}$, $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}'_2}$, ... $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}'_r}$ über $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, ... $\mathfrak{A}_r$ invariante Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind und $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_r$ und $\mathfrak{A}'_\rho = \prod_{\nu \neq \rho} \mathfrak{A}_\nu$. Der Begriff des relativen Produkts entspricht dem Begriff des Produktes mehrerer Körper mit gemeinsamem Unterkörper, über dem Sie voneinander unabhängig sind (wenn man an die Bildung der Galoisschen Gruppe denkt.). Weiter schreibe ich für Transformation: $S^{-1}AS = A^S$; $\{A\}_\mathfrak{S}$ bezeichne die aus allen Conjugierten A^S $(S < \mathfrak{G})$ erzeugte Gruppe. Ich rechne in einer Abelschen (inv[arianten] Unter–)Gruppe $\mathfrak{A}$ dann mit symbolischen Potenzen: $A_1^{F_1(S)} A_2^{F_2(S)} \cdots$. Diejenigen $H(S)$, für die $A^{H(S)} = \mathcal{E}$, bilden einen (Ideal–)Modul, den ich die symbol. Ordg. von A nenne.

Über die ‚zweistufigen' Gruppen $\mathfrak{G}$ (mit Abelscher Kommutatorgr. $\mathfrak{A}$) erhalte ich dann folgende Resultate:

$\mathfrak{G}$ lässt sich allgemein über dem ‚Kommutatorfaktor' $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ in ein relatives Produkt von (zweistufigen) Gruppen zerspalten, deren Kommutatorgruppe von Primzahlpotenzordnung ℓ^a ist. Beschränkt man sich gleich auf solche Gruppen $\mathfrak{G}$, dann kann man für $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ eine Basis: $\{S_1\mathfrak{A}, \dots S_m\mathfrak{A}, T_1\mathfrak{A}, \dots T_n\mathfrak{A}\}$, wo Ord $(S_\mu\mathfrak{A}) = \ell_\mu^{h_\mu}$; $\ell_\mu \neq \ell$; Ord $(T_\nu\mathfrak{A}) = \ell^{k_\nu}$, so wählen, dass Ord $(S_\mu) =$ Ord $(S_\mu\mathfrak{A})$ und alle S_μ untereinander und mit allen T_ν vertauschbar sind. (Die S_μ, T_ν sind El. aus $\mathfrak{G}$.) Für die T_ν gilt im allg. nur: Ord $(T_\nu\mathfrak{A})|$Ord T_ν und sie können Kommutatoren: $C_{\mu\nu} = T_\nu^{-1}T_\mu^{-1}T_\nu T_\mu = T_\nu^{-1}T_\nu^{T_\mu}$ besitzen. Die aus allen $C_{\mu\nu}$ symbolisch erzeugte Gruppe: $\{C_{\mu\nu}\}_{\mathfrak{S}\mathfrak{T}}$ ist eine an sich festliegende (von der Basiswahl unabhängige) Untergruppe der Kommutatorgruppe, die Untergruppe derjenigen Elemente von $\mathfrak{A}$, die gegenüber allen S_μ invariant sind, d. h. also $\{C_{\mu\nu}\}_\mathfrak{T} = \mathfrak{A}$, wenn keine S_μ existieren, wenn also

$\mathfrak{G}$ selbst von Primzahlpotenzordnung. Weiter ergibt sich, dass $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{C}$ darstellbar ist, wo $\mathfrak{C} = \{C_{\mu\nu}\}_{\mathfrak{T}}$. $\mathfrak{G}$ wird dann über $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ das relative Produkt von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}}$ und $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}'}$. $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}}$ kann man als Faktorgruppe eines relativen Produkts von solchen Gruppen $\mathfrak{G}_0$ auffassen, deren Kommutatorgruppe aus einem Element A symbolisch erzeugt wird, das eine Ordnung (symbolische) besitzt, die ein Teiler des Moduls:

$$\mathfrak{N} = \left(\ell^f,\, S_\mu^{\ell_\mu^{k_\mu}} - 1,\, T_\nu^{\ell^{k_\nu}} - 1,\, \left(\frac{\mu = 1, \ldots, m}{\nu = 1, \ldots, n}\right),\, N(S)\right),$$

$$N(S) = \prod_\mu \frac{S_\mu^{\ell_\mu^{k_\mu}} - 1}{S_\mu - 1}$$

ist, wenn $A^{\ell^f} = \mathcal{E}$. Die ‚Basisrepräsentanten' $S_1, \ldots, S_m$ $T_1, \ldots, T_n$ können in $\mathfrak{G}_0$ genauso, wie es in $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}}$ der Fall ist, so gewählt werden, dass sie alle untereinander vertauschbar sind (auch die T_ν). Die Gruppen $\mathfrak{G}_0$ können körperkonstruktiv leicht erledigt werden.

Für die Gruppen $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}'}$ von Primzahlpotenzordnung lassen sich entsprechende Maximaltypen[6)] (von symbolischer Maximalordg.) aufstellen, sodass die Körperkonstruktion auf diese zurückführt (aber nicht erledigt) wird.

Wissen Sie, ob ähnliche Betrachtungen, vielleicht ohne Symbolik, sonst in grösserem Umfang angestellt sind, also z. B. über das Mass hinaus wie K. Reidemeister in Hambg. Sem. Abh. **V** 1 ?

Wenn Sie mir einige Literaturmitteilungen machen könnten, wäre ich Ihnen sehr dankbar.

Mit herzlichen Grüssen!

Ihr Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 26.02.1928

[1]F. Mertens [196, 198]. Ore hat diese Arbeiten von Mertens in Dedekinds Gesammelten Werken II, S. 102, in seinem Kommentar zu Dedekinds [63] erwähnt, ebenso wie die untenstehende von Bucht.

[2]Gösta Bucht gab in [46] eine Parameterdarstellung von Gleichungen 8ten Grades mit Quaternionengruppe an. Es wurde anscheinend erst 1987 von Jensen und Yui [150] bemerkt, dass Buchts Resultat äquivalent zu demjenigen von Witt [343] über die Charakterisierung von Quaternionenerweiterungen ist.

Weitere Arbeiten zu Quaternionenerweiterungen von Zahlkörpern sind Rosenblüth [273], Reichardt [260], Witt [343], Damey & Martinet [60], Massy [186], Fujisaki [81], Minac [201], Vaughan [324], Ware [330], sowie (für unverzweigte Quaternionenerweiterungen von quadratischen Zahlkörpern) Lemmermeyer [165, 166] und Nomura [229].

Bisher unbemerkt scheint die Arbeit von Glage [97] geblieben zu sein, der Gleichungen sechsten Grades studiert, deren Zerfällungskörper vorgegebene Galoisgruppe besitzen.

[3]Sh. etwa Wiman [339, 340, 341].

[4]In seinem Kommentar zu Dedekinds Konstruktion einer Quaternionenerweiterung [64] in Dedekinds Gesammelten Werken schreibt Weber auf S. 384: „Die [...] erwähnte Arbeit von Mertens über denselben Gegenstand geht von der Gleichung und nicht vom Körper aus und beschränkt sich auf die Aufstellung einer notwendigen Bedingung.“

[5]Dieser Scholzsche Begriff lässt sich relativ einfach an einem Beispiel erklären: sei k ein quadratischer Zahlkörper mit zyklischer Klassengruppe der Ordnung 12, und K sein Hilbert-Klassenkörper. Dann ist $K/\mathbb{Q}$ normal mit Galoisgruppe D_{12}: hier bezeichnet D_n die verallgemeinerte Diedergruppe der Ordnung $2n$ mit den Relationen

$$D_n = \langle \sigma, \tau : \sigma^2 = \tau^n = 1, \sigma\tau\sigma = \tau^{-1} \rangle.$$

Der 2-Hilbertklassenkörper k_2 von k hat Galoisgruppe D_8, der 3-Klassenkörper k_3 Galoisgruppe $D_3 = S_3$. Über dem gemeinsamen Grundkörper k ist K das Kompositum von k_2 und k_3; gruppentheoretisch bedeutet dies

$$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq (\mathrm{Gal}(k_2/\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(k_3/\mathbb{Q}))/\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q}),$$

und in der Scholzschen Terminologie heißt das, dass D_{12} das relative Produkt von D_8 und D_6 über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.

[6]Das sind die Scholzschen Zweigggruppen.

3.12 18.03.1928, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) 18. III. 1928.

Lieber Herr Hasse!

Für Ihren freundlichen Brief und die Korrektur besten Dank! Ich habe meine Dissertation glücklich am 16. III. eingereicht. An Dr. Neiss habe ich kürzlich geschrieben, dass er Ihnen ein Separatum seiner Note zusenden möchte, die in den Sitzb. der B. M. G. 1920 erschienen[1)] ist. Gesprochen habe ich ihn nicht, da er gerade beim Umzug ist. Aber ich glaube, er wird sicher gern mit Ihnen correspondieren, sobald er wieder etwas zur Ruhe kommt, und hoffe, dass er bald dazu kommt, seine am Schluss der genannten Note in Aussicht gestellten Ergebnisse zu veröffentlichen.

Die Mertens sche Abhandlg. über Körper mit Quaternionengruppe steht in den Berichten der Wiener Akademie **125**; ähnliche Arbeiten in **123**, **125**, **127**[2)]. Noch spätere weisen schon eine gewisse Altersschwäche auf. — Klassenkörpertheoretisch arbeitet Mertens wohl noch garnicht, in der Hauptsache mit algebraischen und elementar–zahlentheoretischen Hilfsmitteln.

Mit freundlichen Grüssen.

Ihr Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 18.03.1928

[1]F. Neiß [224].
[2]Vgl. [196, 197].

3.13 21.04.1928, Scholz an Hasse

Charlottenburg, 21. IV. 1928.

Lieber Herr Hasse!

Letzten Sonntag erhielt ich die neuen Korrekturen, von denen ich Ihnen die eine wieder zusende. Ich habe keine Druckfehler mehr bemerkt, bin allerdings bei meinen augenblicklichen Examensvorbereitungen nicht sehr scharfsichtig, hoffe daher, dass Sie um so schärfer nach Druckfehlern ausgespäht haben. Zur Abschätzung auf S. 5:

$$\frac{n^*-1}{n^*} \cdot \frac{1}{n-1} \geqq \frac{1}{n-\frac{1}{n^*-1}}$$

hätte ich eigentlich früher schon bemerken können, dass man das sofort sieht, dass $\frac{n^*-1}{n^*} \cdot \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$, wenn $n^* > n$ — was man ja nur braucht.[1] Jetzt würde es jedoch für eine Kürzung wohl schon zu spät sein? — Vielleicht könnte man noch das Zitat 7) (Speisers Satz 27) fortlassen, da dieser Satz 27 wohl allgemein bekannt ist.

Meine Dissertation habe ich also am 16. III. eingereicht. Neulich erhielt ich noch Literaturangaben von Prof. Furtwängler: zwei Arbeiten[2] von Schreier über 'Erweiterungen von Gruppen', davon die zweite im ‚Hamburger Seminar', 1926. Er braucht sogar ähnliche Symbolik wie ich; ich muss ihn auch öfters zitieren, jedoch bringt er keine eigentliche Übersicht über zweistufige (metabelsche) Gruppen, die er auch behandelt. Ich kam vor Abgabe meiner Arbeit nicht mehr dazu, mich an Schreier zu wenden und werde jetzt erst auf Prof. Schurs Angaben warten. Hoffentlich liest er nicht zu lange an meiner Arbeit. Ich habe als Referenten und Examinatoren Prof. Schur und Prof. Schmidt, in Philosophie Prof. Köhler, in Musikwissenschaft Prof. Schering, den Sie vielleicht kennen; er kommt ja jetzt von Halle erst nach Berlin. Hoffentlich gehört er nicht zu den Menschen, die ihr Regiment rigoros beginnen, sondern vielmehr zu denen, die anfangs etwas schüchtern sind und dem Gedächtnis eines Mathematikers nicht zu viel zumuten. Dass ich während des Studiums die Physik mit der Musikwissenschaft eingetauscht habe, erzählte ich wohl schon mal; ich bin jedenfalls mit dem Tausch sehr zufrieden; es ist eine grosse Arbeitsentlastung, und man verdirbt sich nicht erst den mathematischen Magen.

Zu berichten habe ich noch, dass ich seit 1. April Assistent von Prof. Schmidt bin. Assistent bei Prof. Schur ist jetzt Alfred Brauer. Dr. Löwner

ist jetzt nach Köln gegangen, hat Lehrauftrag. Dr. Feigl hat seine Assistentenstelle bei Prof. Schmidt aufgegeben, da er Schriftleiter der ‚Fortschritte d. Math.' geworden ist. Für das Examen ist das jedenfalls, von aussen gesehen, sehr günstig, dass ich jetzt schon die Assistentenstelle habe; nur komme ich dadurch desto weniger zur Examensvorbereitung.

Die Tabellen[3)] von Schaffstein der positiven Primzahldiskriminanten in Ann. **98** habe ich mir kürzlich angesehn. Die Diskriminanten mit der Klassenanzahl 1 scheinen darunter sogar eine gewisse Dichtigkeit[4)] zu bewahren. Unter den Diskriminanten bis 12000 befindet sich keine irreguläre (d. h. mit nichtzykl. Klassengruppe).

Mit den besten Grüssen

Ihr

Arnold Scholz

Anmerkungen zum 21.04.1928

[1]Die Ungleichung $\frac{n^*-1}{n^*} \cdot \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$ ist äquivalent zu $\frac{n^*-1}{n^*} > \frac{n-1}{n}$, was für $n^* > n$ in der Tat offensichtlich ist.

[2]O. Schreier [282, 283]. Schreier hatte bei Furtwängler über die Erweiterung von Gruppen promoviert.

[3]Sh. Schaffstein [276].

[4]Diese Frage nach der Dichtigkeit reell-quadratischer Zahlkörper mit Klassenzahl 1 ist in jüngster Zeit von H. Cohen und H. Lenstra präzisiert [56] worden.

3.14 01.05.1928, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) 1. Mai 1928.

Lieber Herr Hasse!

Für Ihren Brief meinen herzlichen Dank! Den Preis der überzähligen Separata hatte ich richtig eintaxiert. 3 M ist jedenfalls eine Ausgabe, die sich lohnt.

Die Schaffsteinsche Tabelle habe [ich] neulich noch einmal durchgesehen. Es haben dort alle Discriminanten quadratfreie Klassenanzahl ausser dreien:

$$D = 3137,\ 4409,\ 8761\ (h = 9,\ 9,\ 27)\,,$$

die aber zyklische Klassengruppen besitzen. (Hoffentlich hab ich sie richtig im Gedächtnis.) Ich habe jetzt aber eine pos. Primzahldiskr. gefunden: $\boldsymbol{D = 153949}$, die mindestens 2 Basisklassen in bezug auf 3 (wahrscheinlich[1]) auch nur die Klassenanzahl 9) besitzt, indem ich zwei kubische Körper mit der Diskr.: D aufstellte, deren Gleichungen:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= x^3 - 52x - 123 = 0 \\ F_2(x) &= x^3 - 34x - 11 \ = 0 \end{aligned}$$

beide D als Diskriminante haben und deswegen verschiedene Körper bestimmen, weil $F_1(x) \equiv \prod_{\rho=0,\pm 1}(x - \rho) \pmod 3$, während $F_2 \pmod 3$ nicht zerfällt.

Die Gauss sche Tabelle enthält übrigens doch eine irreguläre neg. Primzahldiscr. (entweder 4027, oder 3299), deren Klassengr. (mod 2) vom Typ: (3, 9), absolut[2]) ist vom Typ: (3, 3) ist.

Eben erhielt ich Ihre letzte Karte. Sie schrieben in Ihrem Brief nur, dass wir uns über die Versendung später noch verständigen könnten.

Mit bestem Gruss.

Ihr Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 01.05.1928

[1]Tatsächlich ist die Klassengruppe vom Typ $(3,3)$.

[2]Mit der Klassengruppe modulo (2) ist die Strahlklassengruppe modulo (2) gemeint, mit der absoluten Klassengruppe die gewöhnliche. Da Gauss quadratische Formen (A,B,C) mit geradem mittleren Koeffizienten betrachtet hat, sind seine Klassengruppen von Formen der Determinante $4D$ für prime und quadratfrei $D \equiv 5 \bmod 8$ isomorph zur Strahlklassengruppe modulo 2 des quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-D}\,)$. Im vorliegenden Falle ist die Klassengruppe von Formen der Diskriminante -4027 vom Typ $(3,3)$, diejenige der Diskriminante $-4 \cdot 4027$ vom Typ $(3,9)$. Dagegen ist für die Diskriminante $D = -3299$ bereits die Klassengruppe der Diskriminante D vom Typ $(3,9)$, diejenige der Diskriminante $-4 \cdot 3299$ dagegen von Typ $(9,9)$.

3.15 25.08.1928, Scholz an Hasse

Charlottenburg, 25. 8. 28.

Lieber Herr Hasse!

Zu Ihrem 30. Geburtstag meinen herzlichen Glückwunsch! Ich habe neulich 41 Separate von Brandstetter erhalten. Hat er Ihnen wohl dann 100 zugeschickt? Wenn Sie dann an alle 84 Ihrer Separatenliste, die Sie mir damals sandten, mit Ausnahme von Bieberbach und Schur Separate unserer Arbeit schicken, dann wird die Verteilung: $^{100}/_{40}$ wohl ungefähr stimmen. Eine Rechnung habe ich von Lichtenstein noch nicht erhalten.

Ich bin neulich auf eine merkwürdige Art von Klassenkörpern gestossen: Es ist doch bekannt, dass wenn ein Körper K_2 Klassenkörper über K_0 ist und K_1 ein Zwischenkörper ist, die zu K_2 gehörige Idealgruppe in K_1 durch Kongruenzbedingungen für die Normen: $N_{K_0}^{K_1}$ von Idealen bestimmbar ist, und umgekehrt: ist die Idealgruppe für K_2/K_1 durch solche Normbedingungen bestimmbar, so ist K_2 noch Abelsch über K_0[1]. Ist nun die absolute Klassenzahl von K_1 zum Grad von K_2/K_1 teilerfremd, so ist allgemein die Idealgruppe von K_2/K_1 durch Congruenzbedingungen für *Zahlen* aus K_1 angebbar. Ist sie nun speziell dadurch bestimmbar, dass die Normen: $N_{K_0}^{K_1}$ von Zahlen bestimmten Kongruenzbedingungen (in K_0) genügen (K_1 soll wieder Abelsch über K_0 sein), so kann man hier noch nicht folgern, dass K_2/K_0 Abelsch ist. Es kann nämlich sein, dass Zahlkongruenzbedingungen in K_0 keine Idealkongruenzbed. sind dadurch, dass sich alle Einheiten in K_0 auf mehr Restklassen $\pmod f$ verteilen als diejenigen Einheiten, die Normen von Einheiten aus K_1 sind; und dann ist denkbar, dass K_2 keine Idealgruppe in K_0 besitzt.

Ein Beispiel ist folgendes:

K_0 sei der Körper der rat. Zahlen. Es sei $K_1 = K_0(\sqrt{p}, \sqrt{q})$, wo die Primzahlen: $p \equiv q \equiv 1 \ (4)$ und $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$.

Dann hat auch die Grundeinheit: ε_{pq} von $K_0(\sqrt{pq})$ negative Norm. Sind ε_p, ε_q die Grundeinheiten von $K_0(\sqrt{p})$, $K_0(\sqrt{q})$, so ist dann ε_p, ε_q, ε_{pq} ein System von Grundeinheiten in K_1. (Allgemein sonst:

$$\begin{cases} \varepsilon_p\,, \quad \varepsilon_q\,, \quad \varepsilon_{pq} \quad \text{oder} \\ \varepsilon_p\,, \quad \varepsilon_q\,, \quad \sqrt{\varepsilon_{pq}}\,, \end{cases}$$

je nachdem ε_{pq} in $K_0(\sqrt{pq})$ negative oder positive Norm hat.)[2]

Jedenfalls ist die Totalnorm jeder Einheit in K_1 positiv.[3] $(N(\varepsilon) = +1.)$ Ist nun die Primzahl $r \equiv 3\ (4)$; $(\frac{r}{p}) = (\frac{r}{q}) = 1$ (Beispiel: $p = 5$; $q = 13$; $r = 79$), so kann ich in K_1, dessen Klassenzahl ungerade ist [*)], für einen relativquadratischen Körper K_2 eine Idealgruppe so bestimmen, dass für ihre Zahlen (α) gelten soll: $(\frac{N(\alpha)}{r}) = 1$; es ist zugleich: $\left(\frac{N(\varepsilon\alpha)}{r}\right) = 1$.
Der so konstruierte Körper K_2 ist aber sicher nicht mehr absolut Abelsch, denn sonst könnte er nur ein Produkt dreier quadratischer Körper sein, da der Führer von K_2/K_1 teilerfremd zu dem von K_1 istEs bliebe: $K_2 = K_0(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{-r})$. Anderseits ist K_2 reell. (Die Quaternionengruppe scheidet auch leicht aus, sodass nur der gewöhnlichste Typ[5] 8ter Ordnung bleibt.)

Ich bin durch die Zusammenhänge von Idealgruppen und Galoisschen Gruppen auch auf manche andere Einzelheiten über Beschaffenheit von Einheiten und Idealklassen in Körpern etc. gekommen, weiss jedoch nicht, wieviel davon bekannt ist.

Montag reise ich nach Sassnitz, bin dann ab 16. September in Hamburg.[6]

Mit den besten Grüssen.

Ihr

Arnold Scholz

[*)] Die Klassenzahl von $K(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ ist dann und nur dann gerade, wenn $(\frac{p}{q}) = 1$ und ε_p quadratischer Rest (mod q), d. h. nach beiden Primteilern q in $K(\sqrt{p})$ ist. Es folgt dann natürlich auch[4], dass ε_q quadratischer Rest (mod p) ist.

Anmerkungen zum 25.08.1928

[1]Dies ist ein Spezialfall der Abgrenzungssätze in [S10].

[2]Das ist nicht richtig: haben alle Einheiten negative Norm, so wird $\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_{pq}$ ein Quadrat in K_1; in der schließlich veröffentlichten Arbeit über die Lösbarkeit von $t^2 - Du^2 = -1$ ist dieser Fehler korrigiert.

[3]Diese Behauptung ist i.a. falsch; der Fehler ist eine Folge aus dem obigen Versehen.

[4]Hier taucht zum ersten mal das Scholzsche Reziprozitätsgesetz auf: sind p und q Primzahlen $\equiv 1 \bmod 4$ mit $(\frac{p}{q}) = 1$, und bezeichnen ε_p und ε_q die beiden Fundamentaleinheiten in $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, bzw. $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, so gilt $(\frac{\varepsilon_p}{q}) = (\frac{\varepsilon_q}{p})$, wobei $(\frac{\varepsilon_p}{q})$ gleich $+1$ oder gleich -1 ist, je nachdem ε_p quadratischer Rest modulo den beiden Primidealen über q in $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ oder nicht. Dieses Reziprozitätsgesetz hatte bereits Schoenemann [281] durch elementare Rechnungen à la Dirichlet (dieser hatte das quadratische Reziprozitätsgesetz in $\mathbb{Z}[i]$ durch Rückführung aus dasjenige in $\mathbb{Z}$ hergeleitet) gefunden.

[5]Nämlich die Diedergruppe der Ordnung 8. Es gibt drei abelsche Gruppen der Ordnung 8, nämlich $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sowie die beiden nichtableschen Gruppen D_4 (Diedergruppe der Ordnung 8) und H_8 (Quaternionengruppe der Ordnung 8). Eine Quaternionenerweiterung ist zyklisch über jedem quadratischen Teilkörper, sodass jedes Primideal, das beim Übergang vom quadratischen zum Teilkörper 4. Grades verzweigt, auch im nächsten Schritt verzweigen muss.

[6]Zur Jahrestagung der DMV.

3.16 15.10.1928, Scholz an Hasse

15. X. 1928.

Lieber Herr Hasse!

Schon längst hatte ich vor, mal wieder etwas aus Berlin hören zu lassen und komme nun heute wirklich dazu. Ich verteile also, wie verabredet, Separata von unserer Note an alle in Berlin ansässigen Mathematiker. Ausserdem hatte ich in Hamburg[1)] schon Richard Brauer ein Separat gegeben (das sagte ich Ihnen ja schon damals). Von Ihrer Liste blieben Ihnen also alle ausser Schur, Bieberbach und R. Brauer. Die auswärtigen Mathematiker ausserhalb der Liste, an die ich Separata gegeben habe, sind Hamburger[2)] und Vietoris. Ich werde auch an Löwner (Köln) eins schicken. Dass Steinitz inzwischen gestorben ist, haben Sie wohl gehört? Von Berlin wäre zu erwähnen, dass Heinz Hopf morgen heiratet.

Ich habe mich jetzt noch viel mit dem Hauptidealproblem in Klassenkörpern beschäftigt. Ich dachte erst folgendes schliessen zu können:

Liesse sich der Hauptidealsatz[3)] so präzisieren, dass weder im Klassenkörper,[4)] noch in keinem Unterkörper des Klassenkörpers, alle Ideale des Grundkörpers zu Hauptidealen werden (was wahrscheinlich nicht stimmt;[5)] der von Furtwängler vermutete verschärfte Hauptidealsatz[6)] behauptet doch wohl ungefähr das Gegenteil ?), dann käme man schon immer auf einen unendlichen Klassenkörperturm, wenn die Klassengruppe des Grundkörpers nichtzyklisch ist (alle Grad– und Ordnungsbeziehungen auf eine ungerade Primzahl ℓ bezogen). Das stimmt nun nicht ganz; es bliebe immer noch folgende Möglichkeit: K_2 ist ein einklassiger zweiter Klassenkörper über K_0 mit der metabelschen Gruppe der Ordnung ℓ^3:

$$S_1^\ell = E;\; S_2^\ell = A = S_2^{-1} S_2^{S_1};\; A^\ell = E;\; A^{S_1} = A^{S_2} = A$$

Ist K_1 der (erste) Klassenkörper von K_0, vom Grade ℓ^2, so würde in allen $(\ell{+}1)$ Unterkörpern von K_1 die zu $S_1\{A\},\ S_1^2\{A\},\ldots$ gehörigen Klassen von K_0 zu Hauptidealklassen werden, die andern, von S_2 abhängigen, nicht[7)].

Führte dann ein Körper K_0 auf einen endlichen Klassenkörperturm:

$$K_0 < K_1 < K_2 < \cdots < K_{n-1} < K_n \quad (n \geqq 2)\,,$$

so müsste die ebengenannte Gruppe als Untergruppe der Gal. Gr. von K_n/K_0 auftreten, und es müsste K_n/K_{n-1} zyklisch und K_{n-1}/K_{n-2} ein Produkt von zwei zyklischen Körpern sein.

Ist nun der Grundkörper K_0 ein imaginär–quadratischer Zahlkörper, so wird wegen Fehlens von Einheiten in K_0 in einem Unterkörper ℓ^{ten} Grades des Klassenkörpers K_1 von K_0 nur eine Untergruppe ℓ^{ter} Ordnung von Idealklassen aus K_0 zum Hauptideal. Daraus kann man z. B. folgern, dass die Klassenzahl von K_1 noch durch ℓ teilbar ist, wenn K_0 eine nichtzyklische Klassengruppe in bezug auf ℓ besitzt[8]. Für $K_0 = P(\sqrt{-4027})$, wo die Klassengruppe vom Typ: (3, 3) ist, habe ich die ‚Hauptidealisierung' in den vier Unterkörpern des Klassenkörpers: K_{13}, K_{17}, K_{19}, K_{29}, in denen Primidealteiler $\mathfrak{p}_{13}$, $\mathfrak{p}_{17}$, $\mathfrak{p}_{19}$, $\mathfrak{p}_{29}$ von 13, 17, 19, 29 zerfallen, z. T. durchgerechnet:

In	K_{17}	wird	$\mathfrak{p}_{29}$	Hauptideal.	(In K_{19} habe ich
„	K_{29}	„	$\mathfrak{p}_{13}$	„	noch keine Einheit
„	K_{13}	„	$\mathfrak{p}_{19}$	„	gefunden[9].)

Man wird nicht ohne weiteres schliessen können, dass in K_{19} dann $\mathfrak{p}_{17}$ Hauptideal wird. Selbst in diesem Falle würde sich die symmetrische Automorphismengruppe der aus $\mathfrak{p}_{13}$, $\mathfrak{p}_{17}$, $\mathfrak{p}_{19}$, $\mathfrak{p}_{29}$ erzeugten vier Klassenzyklen mindestens auf eine zyklische reduzieren, wenn man zum zweiten Klassenkörper K_2 und dessen Gruppe über K_0 übergeht.

Weiter habe ich mir überlegt, dass es beliebig hohe Klassenkörpertürme[10] für jede Primzahl ℓ gibt, d. h. man kann Körper K_0 angeben, für die die Klassenkörperturmentwicklung: $K_0 < K_1 < K_2 < \cdots$ frühestens mit dem Körper K_n abbricht, der also dann über K_0 eine n–stufige Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt, d. h. eine auflösbare Gruppe, deren Kommutatorreihe $\mathfrak{G} > \mathfrak{G}' > \mathfrak{G}'' > \cdots > \mathfrak{G}^{(n-1)} > \mathfrak{G}^{(n)} = E$ lautet. (Die Ordnung von $\mathfrak{G}$ soll eine Potenz von ℓ sein; ℓ und n sind vorgeschrieben). Als Grundkörper K_0 kann man z. B. den Körper: $K^{\ell}_{p_1} \cdot K^{\ell}_{p_2} \cdots K^{\ell}_{p_{n+1}}$ wählen, wo K^{ℓ}_p den Unterkörper ℓ–ten Grades der p–ten Einheitswurzeln bedeutet und die Primzahlen p_1, $p_2, \ldots p_{n+1}$ von der Form: $\ell x + 1$ (bzw. $4n + 1$, wenn $\ell = 2$) der Reihe nach so gewonnen werden: p_1 sei eine beliebige Primzahl der Form: $\ell x+1$; p_2 zerfalle in $K^{\ell}_{p_1}$, primär (mod ℓ), d. h. in lauter verschiedene Primfaktoren $\mathfrak{p}_2$ ersten Grades, für die $\alpha < K^{\ell}_{p_1}$ ℓ^{ter} Potenzrest ist, sobald α eine ℓ^{te} Idealpotenz ist. Zum Führer p_2 kann man dann in $K^{\ell}_{p_1} = K'_1$ einen Körper K'_2 bilden, der ein Produkt von ℓ konjugierten Körpern ℓ^{ten} Grades über K'_1 und teilerfremd zum absoluten Klassenkörper von K'_1 ist. (Der Körper K'_2 hat dann im absoluten Sinne meine 'Hamburger'[11] metabelsche Gruppe.) Die Primzahl p_3 soll dann wieder in K'_2 primär zerfallen. Allgemein soll die Primzahl p_ν in dem zuletzt gebildeten Körper $K'_{\nu-1}$ primär zerfallen, und der Körper K'_ν soll Klassenkörper zum Führer p_ν über $K'_{\nu-1}$ sein, und zwar ein Produkt von $N_{\nu-1}$ konjugierten Körpern ℓ^{ten} Grades, teilerfremd zum absoluten Klassenkörper, über $K'_{\nu-1}$; wo N_ν der absolute Grad von $K'_{\nu-1}$ ist. (N_ν ist die mögliche Maximalzahl, die durch den primären Zerfall gerade erreicht werden kann.)

So gelangt man der Reihe nach zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots p_{n+1}$ und zum Körper K'_{n+1}, der selbst eine $(n+1)$–stufige Gruppe besitzt (der Nachweis ist nicht schwer). K'_{n+1}/K_0 $(K_0 = K^{\ell}_{p_1} K^{\ell}_{p_2} \cdots K_{p_{n+1}})$ besitzt dann eine

n–stufige Gruppe und ist unverzweigt, da sowohl K_0 als K'_{n+1} die Differente: $(p_1 \cdot p_2 \cdots p_{n+1})^{1-\frac{1}{\ell}}$ besitzt.

Damit ist der Nachweis erbracht. Natürlich ist der Körper K'_{n+1} nur eine untere Schranke für den Klassenkörperturm von K_0.

Ich weiss nicht, ob es sich lohnt, einen Beweis für die Unbeschränkbarkeit des Klassenkörperturms zu veröffentlichen.[12)] Es ist ja immerhin ganz interessant, und es ist ja heute Mode, kleine Noten zu schreiben, und schliesslich häufen sich die kleinen Sachen, und ich kann sie doch nicht alle unter einen Hut bringen. Vielleicht wissen Sie wieder noch einige Folgerungen daraus zu ziehen?

Während des Schreibens ist mir eingefallen, dass man wahrscheinlich schon einen Unterkörper ℓ^{ten} Grades von $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln, der ja zwei Basisklassen in bezug auf ℓ besitzt, so wählen kann, dass schon in einem Unterkörper seines Klassenkörpers alle seine Ideale zu Hauptidealen werden.[13)]

Ein Separat unserer Note habe ich im Seminar unter $\mathsf{S}\frac{1000}{2211}$ eingeordnet.

Mit den besten Grüssen.

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 15.10.1928

[1]Scholz hatte in seinem letzten Brief angekündigt, am 15.9. nach Hamburg zu reisen.

[2]Scholz hatte auf der DMV-Tagung in Hamburg vorgetragen und dabei Sonderdrucke an die anwesenden Mathematiker aus Hamburg verteilt.

[3]Scholz hatte im September in Hamburg vorgetragen und dabei sicherlich von Furtwänglers Beweis des gruppentheoretischen Hauptidealsatzes erfahren. Auch die Verlagerungsabbildung ist ihm inzwischen bekannt, da er sie in seinem Beispiel weiter unten anscheinend benutzt.

[4]Im Klassenkörper werden natürlich alle Ideale Hauptideale; Artin hatte dies mit seinem Reziprozitätsgesetz bereits im August 1927 auf ein gruppentheoretisches Problem reduziert: ist G eine endliche p-Gruppe mit Kommutatorgruppe G', dann ist die Verlagerungsabbildung $G/G' \longrightarrow G'/G''$ trivial. Furtwängler hatte diesen dann durch ziemlich verwickelte gruppentheoretische Rechnungen bewiesen.

[5]Das stimmt in der Tat nicht. Bereits 1916 hatte Furtwängler [86] Beispiele von Körpern mit 2-Klassengruppe vom Typ $(2,2)$ angegeben, für welche die ganze 2-Klassengruppe bereits in jedem der drei unverzweigten quadratischen Teilkörper des Hilbertklassenkörpers kapituliert. Dies ist genau dann der Fall, wenn der 2-Klassenkörper ungerade Klassenzahl besitzt.

[6]Es gibt verschiedene Vermutungen Furtwänglers, die auf einen verschärften Hauptidealsatz hinauslaufen (vgl. [76]). Hier ist wohl die viel später von Suzuki [311] bewiesene Vermutung gemeint, dass in jeder Teilerweiterung L/K des Hilbertklassenkörpers K^1/K mindestens eine Untergruppe der Ordnung $(L:K)$ der Idealklassengruppe von K kapituliert.

[7]Dies ist ein Gegenbeispiel zu Furtwänglers „verschärftem Hauptidealsatz“: dieser hatte 1930 bewiesen, dass die 2-Klassengruppe eines Zahlkörpers mit elementarabelscher 2-Klassengruppe eine Basis besitzt, sodass jedes Basiselement in einer quadratischen unverzweigten Erweiterung kapituliert. Taussky hat in ihrer Dissertation die Verallgemeinerung auf ungerade Primzahlen p untersucht.

[8]Hat ein Zahlkörper K eine ℓ-Klassengruppe vom Typ (ℓ,ℓ), und bricht der ℓ-Klassenkörperturm mit dem ersten Klassenkörper ab, dann muss in jeder zyklischen Teilerweiterung schon die ganze ℓ-Klassengruppe kapitulieren.

[9]In der Arbeit bestimmt Scholz eine Einheit mit einer Methode, die auch heute noch zu den schnellsten gehört: man sucht hinreichend viele Elemente mit kleinen Normen und bastelt sich eine Einheit, indem man geeignete Produkte und Quotienten solcher Elemente betrachtet.

[10]Artin hat Hasse im Februar 1934 einen sehr einfachen Beweis des Scholzschen Satzes skizziert; vgl. [76, 15.1]. Golod und Schafarewitsch haben später mit gruppentheoretischen Hilfsmitteln Zahlkörper mit unendlichem Klassenkörperturm konstruiert.

[11]Hier bezieht sich Scholz auf seinen DMV-Vortrag in Hamburg [S4].

[12]Hasse war sehr wohl der Meinung, dass sich eine Publikation lohne, und hat die entsprechende Note [S5] für Crelle angenommen.

[13]Dies wird sicherlich dann der Fall sein, wenn das Kompositum der drei Zahlkörper $LL = K_{p_1}^{(\ell)} K_{p_2}^{(\ell)} K_{p_3}^{(\ell)}$ eine nicht durch ℓ teilbare Klassenzahl besitzt, weil dann L der Klassenkörper des Unterkörpers ℓ^{ten} Grades von $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln

ist und der ℓ-Klassenkörperturm dann mit L abbricht; vgl. auch [79, Thm. 5.2] und die Anmerkungen zum nächsten Brief.

3.17 24.10.1928, Scholz an Hasse

Charlottenburg, 24. X. 1928.

Lieber Herr Hasse!

Für die reiche Lektüre Ihrer letzten drei Briefe meinen herzlichen Dank! Ich möchte sie in umgekehrter Reihenfolge beantworten: Meine Vermutung war ja auch die, dass oft schon in einem Teilkörper des Klassenkörpers die Hauptidealisierung stattfindet. Ich suchte noch nach einem kubischen Körper[1)] $K^3_{p_1p_2p_3}$, dessen Klassenkörper: $K^3_{p_1}K^3_{p_2}K^3_{p_3}$ die Klassenzahl 1 (in bezug auf 3) hat. Mit den Gleichungen: $S_1^{1+S_2+\cdots+S_2^{\ell-1}} < \mathfrak{C}_1$; $S_2^\ell < \mathfrak{C}_1$ operierte ich damals schon. Dass solche Körper $K^3_{p_1p_2p_3}$ existieren (also Unterkörper 3ten Grades der $p_1p_2p_3^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln), ist mir schon den Tag nach meinem letzten Brief eingefallen;[2)]

Sie fragten mich ja auch in Ihrem vorletzten Brief, ob ich schon ein Beispiel gefunden habe. Damit $K^3_{p_1}K^3_{p_2}K^3_{p_3}$ einklassig wird, wähle ich p_1 beliebig (natürlich immer $\equiv 1 \pmod 3$) und p_2 als nichtkubischen Rest $\pmod{p_1}$. Dann ist $K^3_{p_1}K^3_{p_2}$ einklassig;[3)] denn im (einklassigen!) Körper $K^3_{p_1}$ steht mod p_2 nur *eine* Basisklasse zur Verfügung, da p_2 Primideal bleibt. Ein Abelscher Körper: $K'/K^3_{p_1}$ muss daher zyklisch sein, und zwar hier auch nur kubisch, da sonst $p_2^{8/9}$ in der Relativdifferente aufginge, während wir verlangen, dass K' im Klassenkörper $\overline{K}$ von $K^3_{p_1}K^3_{p_2}$ liegt. Demnach hat $\overline{K}/K^3_{p_1}$ als maximalen Abelschen Unterkörper: $K^3_{p_1}K^3_{p_2}/K^3_{p_1}$, woraus $\overline{K} = K^3_{p_1}K^3_{p_2}$ folgt.

(Zur Einklassigkeit von $K^3_{p_1}K^3_{p_2}$ dürfte man sogar noch zulassen, dass p_1 und p_2 gegenseitig kubische Reste sind;nur dürfte die Grundeinheit in $K^3_{p_1}$ kein $(S-1)^2$–ter Potenzrest (mod p_2) sein.) p_3 wähle ich jetzt so, dass sein Zerlegungskörper in bezug auf $K^3_{p_1}K^3_{p_2}$ der Körper $K^3_{p_1}$ wird und dort die Grundeinheit ε_1 kein $(S-1)^2$–ter Potenzrest $\pmod{p_3}$ wird (im ganzen eine erfüllbare Bedingung für den Zerlegungskörper von p_3 in bezug auf $K^3_{p_1}K^3_{p_2}(\zeta_3, \sqrt[3]{\varepsilon_1^{S-1}})$.). Da wegen der Einklassigkeit von $K^3_{p_1}$ ε_1 Norm einer Einheit aus $K^3_{p_1}K^3_{p_2}$ wird, werden dort, ebenso wie in $K^3_{p_1}$ selbst, von den an sich vorhandenen 3 Zahlrestbasisklassen zwei durch die Einheiten aufgezehrt, sodass die Strahlklassengruppe mod p_3 in $K^3_{p_1}K^3_{p_2}$ zyklisch wird. Jetzt schliesst man genau wie oben, dass dann auch $K^3_{p_1}K^3_{p_2}K^3_{p^3}$ einklassig ist. — Dass allgemein ein Körper $K^\ell_{p_1p_2\cdots p_r}$ den Körper: $\prod_{\rho=1}^r K^\ell_{p_\rho}$ zum genauen Klassenkörper hat, kann man wohl als bekannt annehmen[4)]. Ist folgende allgemeinere Tatsache eigentlich bekannt: Ist K_1 ein Kongruenzklassenkörper über dem einklassigen Körper K_0 zum Führer $\mathfrak{f}$, der ein Produkt

von r primären Primidealen ist, so hat K_1 genau $r-1$ absolute Basisidealklassen (überall Grad und Ordnung auf die Primzahl ℓ bezogen)[5)], während $r-1$ nur eine obere Schranke ist, wenn man auf das primäre Verhalten der Teiler von $\mathfrak{f}$ verzichtet, nur $(\mathfrak{f}, \ell) = 1$ verlangt?

Von den beiden Differentenrelationen, die Sie im vorletzten Brief erwähnten, gilt die erste:[1]

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \quad \text{für} \quad (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = 1$$

sicher, wenn die eine der beiden Differenten: $\mathfrak{D}_2$ zum Grad n_2 von K_2 teilerfremd ist; denn dann ist die Verzweigungsgruppe des Teilers $\mathfrak{p}_2^{m/n}$ (wo $\mathfrak{p}_2 < k$) von $\mathfrak{D}_2$ in $K = K_1 K_2$ das Einheitselement, und $\mathfrak{p}_2$ wird von K_1 auf K eine genauso starke Potenz als von k auf K_2 (ich habe natürlich K_1/k und K_2/k als Normalkörper angenommen; sonst gilt die Relation in gewissen Fällen sicher nicht.) Die Relation **I** gilt also sicher, wenn K von Primzahlpotenzgrad. Die Relation

II $$\mathfrak{D}_{K_0 k_0} = N_{K K_0}(\mathfrak{D}_{Kk})$$

wollten Sie sicher für die Diskriminanten statt für die Differenten aufstellen. Ist K_0/k_0 Normalkörper vom Grade n, so könnte **II** höchstens durch $\mathfrak{D}_{K_0 k_0} = \mathfrak{D}^n_{Kk}$ erfüllt sein, wenn man an Differenten denkt; denn die Differente eines Normalkörpers muss ja eine ganze oder gebrochene Potenz eines Ideals des Grundkörpers sein (was ich zu **I** benutzt habe)

Jetzt zum **Klassenkörperturm**:

Ich werde also einen ausführlichen Beweis der Unbeschränkbarkeit aufsetzen; ich hoffe recht bald dazu zu kommen und werde in dieser Sendung dann Ihre Aufzeichnungen über die biquadratische Klassengruppe einlegen.[6)]

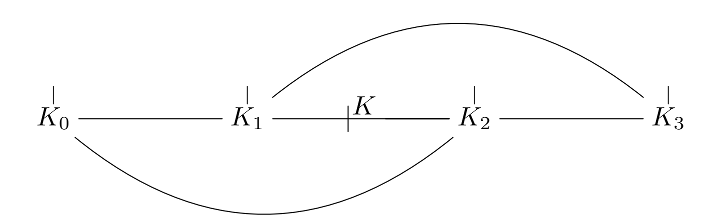
Was ich neulich über den Klassenkörperturm schrieb, sollte natürlich erst eine Skizze sein; ich hatte mir selbst wieder nichts aufgeschrieben. Über das Enthaltensein der Körper $K^\ell_{p_1}, K^\ell_{p_2}, K^\ell_{p_3}, \ldots$ in den nacheinandergebauten Körpern: $K'_1, K'_2, K'_3, \ldots$ muss ich folgendes sagen:

Die Körper K'_ν sollen ja alle absolut Galoissch werden; die Invarianz der zugehörigen Idealgruppe in $K'_{\nu-1}$ erreichte ich dadurch — das schrieb ich wohl auch — dass ich erst eine Idealgruppe H nach einem Primideal: $\mathfrak{p}_{\nu-1} < K_{\nu-1}$; $N(\mathfrak{p}_{\nu-1}) = p_{\nu-1}$ bildete und dann die gewünschte Idealgruppe $\overline{H}$ $\pmod{p_{\nu-1}}$ als Durchschnitt der konjugierten Idealgruppen zu H erhielt. Diese notwendige Normierung von $\overline{H}$ hatten Sie neulich noch nicht mit einbezogen; ihr zufolge liegt $K^\ell_{p_\nu}$ tatsächlich in K'_ν (und auch nur soweit scheint mir der Körper K'_ν im allgemeinen festzuliegen). An K'_2 sieht man es deutlich: K'_2 ist sicher nicht mehr Abelsch; demnach kann der maximale Abelsche Unterkörper von K'_2 nicht zyklisch sein, muss also auch $K^\ell_{p_2}$ enthalten.

[1] Relation '**I**'?

Die Relation $K^{\ell}_{p_\nu} < K'_\nu$ sieht man allerdings für $\nu > 2$ nicht so unmittelbar. Ich muss das näher ausführen. Dass für $\prod_{\nu=1}^{n+1} K^{\ell}_{p_\nu} = K_1$ die Körper K_1, $K_2 = K_1 K'_2$, $K_3 = K_1 K'_3, \ldots$ die maximal–Abelsche Körperkette für K'_{n+1} bilden, ist wahrscheinlich richtig, benutze ich aber nicht zum Beweis. Ich liefre den Beweis so, dass ich in der Gruppe von K'_{n+1} einen Kommutator $\neq E$ bilde, dann einen Kommutator zweier Kommutatoren, der $\neq E$, u. s. w., bis man zu einem n^{ten} Kommutator gelangt, der auch noch $\neq E$.

Aus der Zweistufigkeit von K_2/K_0 und K_3/K_1, $(K_2 > K_1)$ kann man übrigens noch nicht auf die Dreistufigkeit von K_3/K_0 schliessen. Man kann z. B. eine zweistufige Gruppe nehmen und vor und hinter der Kommutatorgruppe je eine Gruppe abstecken; die zugehörigen Körper ergeben folgendes Bild:



wobei K der maximale Abelsche Unterkörper von K_3/K_0 sei.

Vielleicht kann ich der Note über den Klassenkörperturm den oben skizzierten Beweis beifügen, dass es auch Körper gibt, deren Hauptidealisierung schon in einem Unterkörper des Klassenkörpers stattfindet, und dann das ganze: 'Über den Klassenkörperturm' oder 'Zwei Bemerkungen über den ...' nennen[7)].

Mit dem Körper: $P(\sqrt{-4027})$ bin ich noch nicht weiter gekommen; die Einheitensuche in K_{19} muss ich auf eine Mussezeit verschieben; ich brauche übrigens bloss eine Einheit aus einem absolut–kubischen Unterkörper von K_{19}. Mit der symmetrischen Automorphismengruppe der vier Zyklen der Abelschen Gruppe: $\mathfrak{A} = \{S_1, S_2\}$ vom Typ: (3, 3) mein' ich's so: Ist $\mathfrak{V}$ die vollständige Automorphismengruppe von $\mathfrak{A}$ (der Elemente von $\mathfrak{A}$), so betrachte ich ihre Wirkung auf die vier Zyklen: $\{S_1\}$, $\{S_1 S_2\}$, $\{S_1 S_2^2\}$, $\{S_2\}$. Ist $\mathfrak{C}$ die Untergruppe von $\mathfrak{V}$, die jeden Zyklus in sich überführt, so ist $\overline{\mathfrak{V}} = \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{C}}$ die Automorphismengruppe der vier Zyklen, eine Permutationsgruppe in vier Symbolen, und zwar die symmetrische: Ich kann einen beliebigen der Zyklen $\{S_1\}$ nennen; behalte mir dabei noch vor, welches Element von $\mathfrak{A}$ ich S_1, und welches S_1^2 nenne; ebenso kann ich mir $\{S_2\}$ aus den Übriggebliebenen aussuchen; die übrigen beiden Zyklen können sich aber auch noch vertauschen; denn ich kann S_2 festhalten und S_1 mit S_1^2 vertauschen. Im allgemeinen ist für eine Abelsche Gruppe vom Typ: (ℓ, ℓ) die Automorphismengruppe der $(\ell + 1)$ Zyklen eine genau dreifach transitive Gruppe; man kann drei Zyklen beliebig benennen; die übrigen sind dann bestimmt.

Macht man aus $\mathfrak{A}$ eine Faktorgruppe einer Gruppe $\mathfrak{H}$, indem man in unserm Beispiel: $k = P(\sqrt{-4027})$ vom ersten zum zweiten Klassenkörper übergeht, und betrachtet die Wirkung der Automorphismen W von $\mathfrak{H}$ auf die Faktorgruppe, so gelangt man zu einer Untergruppe $\mathfrak{V}'$ von $\mathfrak{V}$, die zugleich Faktorgruppe von $\mathfrak{V} = \{W\}$ ist. Ebenso reduziert sich die Gruppe $\overline{\mathfrak{V}}$ der Zyklen auf eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{V}}'$, innerhalb $\mathfrak{H}$. Hier ist $\overline{\mathfrak{V}}'$ höchstens die aus der zyklischen Permutation: $(\mathfrak{p}_{17}, \mathfrak{p}_{29}, \mathfrak{p}_{13}, \mathfrak{p}_{19})$ erzeugte Gruppe, falls in K_{19} wirklich $\mathfrak{p}_{19}$ Hauptideal wird, was mir durch einen augenblicklichen Einfall als gruppentheoretische Notwendigkeit vorschwebt. Bezeichnen $S_{13,17,19,29}$ die Substitutionen der Primideale $\mathfrak{p}_{13,17,19,29}$, $\mathfrak{C}_{13,17,19,29}$ die zugehörigen 'Unter–Kommutatorgruppen', so gilt

$$N_k^{K_\sigma}(S_\alpha) < \mathfrak{C}_\sigma \quad \text{nur für die Paare:}$$
$$(\sigma, \alpha) = (17, 29)\,;\ (29, 13)\,;\ (13, 19)\,;\ (19, 17)\,.$$

(Ich hoffe, die Bezeichnungsweise mit den Normen von Gruppenelementen ist verständlich; ich meine: $S_\alpha^{\sum_\lambda S_\sigma^\lambda}$.)

Lässt man z. B. $\{S_{17}\}$ in $\{S_{19}\}$ übergehn, so muss $\{S_{19}\}$ in $\{S_{13}\}$ u. s. w. übergehn, damit alle Relationen erhalten bleiben. Es könnte aber selbst diese Permutation keinen Automorphismus in $\mathfrak{H}$ ergeben, wenn nämlich $\mathfrak{H}$ noch weitere Ungleichmässigkeiten aufweist, die aus den Hauptidealrelationen: $S_\alpha^{\sum_\lambda S_\sigma^\lambda} < \mathfrak{C}_\sigma$ noch nicht hervorgehn.

Mit der Frage, wann ein Automorphismus bei Erweiterung einer Gruppe erhalten bleibt, habe ich mich auch in meiner Dissertation beschäftigt.

Nun noch zur **Zusammensetzung der Klassengruppe** eines Abelschen **Körpers vom Typ: (ℓ, ℓ)** aus den Komponenten:

Mein Beweis stimmt nur in einer Schlussweise, die Sie auf der vorletzten Seite Ihres Manuskripts anwandten, mit dem Ihrigen für den Typ: (2, 2) überein. Ich verfahre *rein gruppentheoretisch*, benutze nur die Tatsache, dass die absolute Norm überall das Einheitselement (die Hauptidealklasse; bei der Einheitengruppe die Zahl: ± 1) ergibt. Sind $K_0, K_1, \dots K_\ell$ die Komponenten des Körpers $K = K_0 K_\ell$ vom Typ: (ℓ, ℓ); bezeichnet $\mathfrak{C}_\lambda$ das Klassensystem von K_λ $(\lambda = 0, 1, \dots \ell)$, N die absolute Norm, N_λ die Relativnorm in bezug auf K_λ, so betrachte man in K das Klassensystem:

$$\mathfrak{C} = \{\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \dots \mathfrak{C}_k\}\,.$$

Ist $C = C_0 C_1 \cdot C_2 \dots C_\ell = E$, wo $C_\lambda < \mathfrak{C}_\lambda$, so folgt:

$$N_\lambda(C) = C_\lambda^\ell = E\,. \tag{I}$$

Es können demnach höchstens Elemente der Ordnung ℓ voneinander abhängig sein[8]. Demnach erhält man für den Körper K ein System von unabhängigen Einheiten durch Kombination je eines Systems von Fundamentaleinheiten der Komponentenkörper. — Betrachtet man Idealklassen, und

zwar so, dass man die Hauptklasse aus allen Idealen bildet, von denen eine ℓ^m–te Potenz ein Zahlideal ergibt, so multiplizieren sich die Klassengruppen $\mathfrak{C}_\lambda$ direkt.

II) Das direkte Produkt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 \times \mathfrak{C}_1 \times \cdots \times \mathfrak{C}_\ell$ ergibt schon die volle Klassengruppe von K: (Damit fängt man vielleicht besser an.)

Ist C irgend eine Klasse aus K, so gilt etwa:

$$\begin{array}{lcll}
N_0(C) & = & C^{1+S_1+S_1^2+\cdots+S_1^{\ell-1}} & < \ \mathfrak{C} \\
N_1(C) & = & C^{1+S_1S_2+S_1^2S_2^2+\cdots+S_1^{\ell-1}S_2^{\ell-1}} & < \ \mathfrak{C} \\
N_2(C) & = & C^{1+S_1S_2^2+(S_1S_2^2)^2+\cdots+(S_1S_2^2)^{\ell-1}} & < \ \mathfrak{C} \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\
N_{\ell-1}(C) & = & C^{1+S_1S_2^{-1}+(S_1S_2^{-1})^2+\cdots+(S_1S_2^{-1})^{\ell-1}} & < \ \mathfrak{C} \\
N_\ell(C) & = & C^{1+S_2+S_2^2+\cdots+S_2^{\ell-1}} & < \ \mathfrak{C} \\
\hline
N_0 \cdot N_1 \cdots N_\ell & = & C^{\ell+\sum_{a,b\,0}^{\ell-1} S_1^a S_2^b} = C^\ell \cdot N(C) & < \ \mathfrak{C}
\end{array}$$

Da $N(C) = 1$, gilt $C^\ell < \mathfrak{C}$.

Damit ist **II)** bewiesen. Für das Einheitensystem in K erhält man speziell, dass die ℓ^{ten} Potenzen von Einheiten eine Zwischengruppe zwischen $\{\varepsilon_0^{F(S)}\} \times \{\varepsilon_1^{F(S)}\} \times \cdots \times \{\varepsilon_\ell^{F(S)}\}$ und $\{\varepsilon_0^{\ell\cdot F(S)}\} \times \cdots \times \{\varepsilon_\ell^{\ell\cdot F(S)}\}$ bilden. Der Spielraum von $(\ell+1)(\ell-1)$ Basisklassen der Ordnung ℓ kann von oben und unten noch um je $(\ell-1)$ eingeengt werden. ($\ell > 2$; für $\ell = 2$ vgl. meinen Brief vom August.) Im übrigen scheint mir die Lage der Zwischengruppe in der Idealklassengruppe von K in bezug auf die Primzahl ℓ abzuhängen. Charakteristisch ist jedenfalls, dass (höchstens) $(\ell-1)^2$ 'Freiheitsgrade' bleiben.

Ich habe inzwischen gemerkt, dass man den Satz über die Klassengruppe ebenso leicht auf ein Produkt von n unabhängigen zykl. Körpern ℓ^{ten} Grades erweitern kann. Hier stellt sich die Klassengruppe als das direkte Produkt der Klassen der $\frac{\ell^n-1}{\ell-1}$ Unterkörper ℓ^{ten} Grades dar. Man stösst hier auf die Relationen:

$$\left\{\begin{array}{llcll}
\text{I)} & N_\lambda(C) & = & C_\lambda^{\ell^{n-1}} & = \ \varepsilon\,. \\
\text{II)} & & & C^{\ell^{n-1}} & < \ \mathfrak{C}\,.
\end{array}\right.$$

Ich habe vor, für die Beschaffenheit der Klassengruppe der Körper vom Typ: (ℓ, ℓ) und allgemeiner: $(\ell, \ell, \ldots)$ ebenfalls ein Manuskript aufzusetzen, das ich Ihnen für das Crellesche Journal zusenden darf.

Mit den besten Grüssen,

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 24.10.1928

[1]Wie bisher bezeichnet K_f^ℓ einen Teilkörper ℓ-ten Grades des Körpers $\mathbb{Q}(\zeta_f)$ der f-ten Einheitswurzeln.

[2]Am Ende seines letzten Briefes bemerkte Scholz, dass ihm während des Schreibens eingefallen sei, dass man einen Körper $K_{p_1p_2p_3}^\ell$ so wählen kann, dass in einem Unterkörper bereits alle Ideale zu Hauptidealen werden (gemeint sind hier nur Klassen in der ℓ-Klassengruppe). Ist $K = K_{p_1p_2p_3}^\ell$ ein Körper mit der Eigenschaft, dass $L = K_{p_1}^\ell K_{p_2}^\ell K_{p_3}^\ell$ die ℓ-Klassenzahl 1 besitzt, so kapitulieren in jeder echten Teilerweiterung bereits ganz $\mathrm{Cl}_\ell(K)$. Dies sieht man am einfachsten so ein: Wegen $\ell \nmid h_L$ haben die $\ell+1$ echten Teilerweiterung ℓ-Klassenzahl ℓ, und es ist $\mathrm{Cl}_\ell(K)$ vom Typ (ℓ,ℓ). Jetzt gilt ganz allgemein

Sei K ein Zahlkörper mit $\mathrm{Cl}_\ell(K) \simeq (\ell,\ell)$, und L sein ℓ-Klassenkörper. Ist $\ell \nmid h_L$, so kapituliert $Cl_\ell(K)$ in jeder echten Teilerweiterung von L/K.

Wäre nämlich K_1 eine Teilerweiterung, in welcher eine Idealklasse $c \in \mathrm{Cl}_\ell(K)$ überlebt, so folgt wegen $\mathrm{Cl}_\ell(K_1) \simeq \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, dass $\mathrm{Cl}_\ell(K_1) = \langle c\rangle$. Aber dann ist $N_{K_1/K}c = c^\ell = 1$, folglich $N_{K_1/K}\mathrm{Cl}_\ell(K_1)$ trivial, während dies doch nach der Klassenkörpertheorie eine Untergruppe vom Index ℓ in $\mathrm{Cl}_\ell(K)$ sein müsste.

[3]Das Argument ist folgendes: betrachte einen Körper $K_{p_1p_2}^\ell$ vom Führer p_1p_2. Die unverzweigte Erweiterung $\overline{K} = K_{p_1}^\ell K_{p_2}^\ell$ ist dann Klassenkörper zum Führer p_2 über $k = K_{p_1}^\ell$. Die Strahlklassengruppe von k modulo p_2 ist eine Faktorgruppe der Restklassengruppe von $(\mathcal{O}_k/p_2)^\times$, und diese ist als multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers zyklisch. Also ist der Strahlklassenkörper modulo p_2 über k zyklisch.

Sei nun K' der maximale über k abelsche Teilkörper des ℓ-Klassenkörpers von $\overline{K}$. Da $K'/\overline{K}$ unverzweigt ist, hat K'/k den Führer p_2. Also ist K'/k nach der obigen Bemerkung zyklisch. Da aber $\overline{K}/k$ verzweigt, muss dann auch $K'/\overline{K}$ verzweigen (Trägheitskörper ist hier notwendig der Grundkörper), was aber $K' = \overline{K}$ impliziert.

Hätte $\overline{K}$ eine durch ℓ teilbare Klassenzahl, so müsste es aber eine über k normale Erweiterung vom Grad ℓ^2 geben, die dann aber automatisch abelsch wäre. Jetzt folgt die Behauptung.

Leichter folgt die Behauptung aus der ambigen Klassenzahlformel: ist L/K zyklisch vom Primzahlgrad, und bezeichnet $\mathrm{Am}_{\mathrm{st}}(L/K)$ die Untergruppe von $\mathrm{Cl}(L)$, die von unter $\mathrm{Gal}(L/K)$ invarianten Idealen erzeugt werden (die Gruppe der stark ambigen Idealklassen), dann gilt

$$\#\mathrm{Am}_{\mathrm{st}}(L/K) = h_K \cdot \frac{\prod e(\mathfrak{p})}{(L:K)(E_K:NE_L)},$$

wo $\prod e(\mathfrak{p})$ das Produkt der Verzweigungsindizes aller Primstellen bezeichnet. Im vorliegenden Fall ist $\ell \nmid h$, $\prod e(\mathfrak{p}) = \ell$ und $(L:K) = \ell$, sodass aus der Ganzzahligkeit von $\#\mathrm{Am}_{\mathrm{st}}(L/K)$ sofort $\ell \nmid (E_K : NE_L)$ und damit $E_K = NE_L$ folgt.

[4]Das ist so falsch. Richtig ist, dass $\prod_{\rho=1}^r K_{p_\rho}^\ell$ der Geschlechterklassenkörper von $K_{p_1p_2\cdots p_r}^\ell$ ist.

[5]Ein Primideal $\mathfrak{p}$ heißt primär (in Bezug auf ℓ), wenn $N\mathfrak{p} \equiv 1 \bmod \ell$ und $(E/\mathfrak{p})_\ell = 1$, als jede Einheit ein ℓ-ter Potenzrest modulo $\mathfrak{p}$ ist. Nun gilt

- Ist $\ell \nmid h_K$, so existiert genau dann eine zyklische Erweiterung vom Grad ℓ, in der genau $\mathfrak{p}$ verzweigt, wenn $\mathfrak{p}$ primär ist.
- Bezeichnet K_j den zyklischen Teilkörper vom Grad ℓ des Strahklassenkörpers modulo $\mathfrak{p}_j$, so sind die Erweiterungen K_iL des Klassenkörpers zum Führer $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$ unabhängig (für $i = 1, \ldots, r-1$) und unverzweigt.

Alternativ kann man zeigen, dass die ambige Idealklassengruppe Rang $r-1$ besitzt. Allerdings ist $r-1$ keine obere Schranke für den Rang der ℓ-Klassengruppe von L: so hat die zyklische Erweiterung von $\mathbb{Q}$ mit Führer $19 \cdot 487$ eine Idealklassengruppe vom Typ $(3, 3)$.

[6]Anscheinend geht es hier um Hassesche Überlegungen zur Struktur der Idealklassengruppe eines biquadratischen Zahlkörpers.

[7]Die Scholzsche Arbeit [S5].

[8]Vgl. Nehrkorn [223], Pollaczek [250], Reichardt [262].

3.18 05.01.1929, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) Charlottenburg, 5. I. 1929.

Lieber Herr Hasse!

Bin Donnerstag abend[1)] noch in munterer Laune zu Haus angekommen. Ich bekam noch bequem den 19^{32}, der 40 Min. Verspätung hatte. Zum Fragezeichen auf S. 5 meines Manuskripts[2)] bemerke ich, dass die $\overline{S}_\nu^T$ wirklich absolut voneinander unabh. sind; denn $\overline{S}_\nu$ ist selbst nur von der Ordnung ℓ wegen der Festsetzung: $\mathfrak{j} \sim 1$, wenn $\mathfrak{j}^r \equiv \alpha^\ell \ (p_\nu)$. Ich will ja auch nur die Körper $K^\ell_{p_\nu}$ in K_{n+1} drin haben, nicht irgendwelche $K^{\ell^2}_{p_\nu}$. Natürlich kann, weil ich die jeweiligen absoluten Klassk. mitschleppe, $\overline{S}_\nu$ ℓ^{te} Potenz eines Gruppenel. von $\mathfrak{G}_\nu$ sein, das mich aber gar nicht interessiert. Der Körper K_{n+1} erhält dadurch ein gruppttheoretisch überflüssiges 'Korsett', das ihn aber gut kleidet, weil man dann sofort sieht, dass er den Körper $\prod K^\ell_{p_\nu}$ enthält. (Durchsichtigkeit ist moderner Geschmack, sowohl in der Math. als in der Kleidung.) Bei der zweiten Bemerkung ist unter 1) die Einklassigkeit von K^ℓ_p wirklich auf rel. zykl. Körper K/K_0 übertragbar, wenn K_0 *einklassig*, und die Übertragung 'dieselbe'.

— Der angegebene (bald darauf kommende) verkleinerte Druck geht natürl. nur bis Punkt b) einschl.; also 2) wieder normal.

— Richard Brauer ist augenblicklich nach Greifswald zur Vertretung von Reinhardt, der erkrankt ist.

Mit den besten Grüssen und einer Empfehlung an Ihre Frau Gemahlin

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 05.01.1929

[1]Scholz und Hasse haben sich am 3. Januar 1929 getroffen, vermutlich in Halle, und Scholz hat Hasse dabei sein Manuskript für [S5] überreicht; vgl. den Brief vom 8.07.1929.

[2]Die „Zwei Bemerkungen zum Klassenkörperturm“ [S5].

3.19 10.01.1929, Scholz an Hasse

Charlottenburg, 10. I. 1929.

Lieber Herr Hasse!

Für Ihren Brief vielen Dank! Die fraglichen Punkte$^{1)}$ 1.), 2.) und 4.) kann ich gleich beantworten; hier ist alles in Ordnung. Dagegen erfordert 3.) noch eine Säuberung für $\ell = 2$, die sich aber auch bewirken lässt.[1]

1.)
(S. 8.)
$$S^{(G+H)I} = (S^G \cdot S^H)^I = (S^G)^I \cdot (S^H)^I = S^{GI+HI}$$

ist dann immer noch richtig, wenn I ein Gruppenelement selbst, nicht aber allgemein ein Ringelement, also eine *Summe* von Gruppenelementen ist, wie ich hier F, G, H, I natürlich meine, in Anbetracht der Exponenten $T-1, \prod(C_\nu - 1)$ von S. Ist z. B. $I = T_1 + T_2$, eine Summe zweier Gruppenelemente, so ist

$$(S^G \cdot S^H)^I \quad = \quad \underset{\text{I}}{S^{GT_1}} \quad \cdot \quad \underset{\text{(II)}}{S^{HT_1}} \quad \cdot \quad \underset{\text{(III)}}{S^{GT_2}} \quad \cdot \quad \underset{\text{IV}}{S^{HT_2}}.$$

Man hat im allg. $(T_1 + T_2)(T_3 + T_4) = T_1T_3 + T_2T_3 + T_1T_4 + T_2T_4$ der Reihenfolge nach auszumultiplizieren.

2.) S. 9. Das *paarweise* Wegheben der Summanden: $C_{\mu_1}C_{\mu_2}\ldots C_{\mu_r}$ bezieht sich darauf, dass jeder Faktor von $\prod_{\mu<\nu}(C_\mu - 1)$ nur zwei Summanden hat. Wenn man beim nichtverschwindenden $\prod_{\mu<\nu-1}(C_\mu - 1) = \sum A_\rho$ schon die Summanden zusammengezogen hat, so müssen sich bei der Multiplikation mit $(C_{\nu-1} - 1)$ die mit $C_{\nu-1}$ multiplizierten Summanden A_ρ gegen die A_ρ selbst (in permutierter Reihenfolge) gegeneinander wegheben: $C_{\nu-1}A_\rho = -A_{\rho'}$ $(\rho \cdot \rho' = 1, 2, \ldots)$. Dabei ist für $\ell = 2$ das Vorzeichen gleichgültig.

Das ‘paarweise’ hat seinen historischen Ursprung darin, dass ich zuerst von $\nu-1$ auf ν (nicht von allen kleineren μ auf ν) schloss und dabei den letzten Faktor $(C_{\nu-1}-1)$ bevorzugte, was sich nachher als umständlich herausstellte.

Wenn Sie das ‘paarweise’ aber missverständlich finden, kann ich mich auch so ausdrücken:$^{2)}$

[1] In der folgenden Gleichung steht ein Vertauschungspfeil zwischen ... $\cdot\, S^H)^I$ und $(S^G)^I$.

Wäre nämlich:

$$S_\nu^{\prod_{\mu<\nu}(C_\mu - 1)} = E \quad \text{in } \mathfrak{G}_\nu ,$$

also wegen der Unabhängigkeit der S_ν^T $(T < \mathfrak{G}_{\nu-1})$:

$$\prod_{\mu<\nu}(C_\mu - 1) = \sum_{\substack{\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_r \\ 0\leqq r<\nu}} \pm C_{\mu_1} C_{\mu_2} \dots C_{\mu_r} \equiv 0 \pmod{\ell} \quad \text{in } \mathfrak{R}_{\nu-1} ,$$

so müssten, da 1 selbst als Summand vorkommt, mehrere der $2^{\nu-1}$ Summanden $= \pm 1$ sein, also in $\mathfrak{G}_{\nu-1}$ wenigstens eine Beziehung:

$$C_{\mu_1} \cdot C_{\mu_2} \cdots C_{\mu_r} = E$$

mit $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_r < \nu\,;\ r > 0$ gelten. Das hiesse aber: $\cdots$

Ich habe diese Stelle so abgefasst, dass sich der bisherige Text möglichst leicht abändern lässt.

4.) Wenn in K_0 $\mathfrak{p}_\infty$ eine unendliche Primstelle ersten Grades ist und die Hauptklasse für den Klassenkörper aus den Idealen (α): $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_\infty}$ gebildet wird, so erhält man nur den absoluten Klassenkörper; denn man kann ja α durch $-\alpha$ ersetzen; $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_\infty}$ allein liefert also keine Bedingung für (α). — Der von Ihnen angeführte Fall, dass in K_0 eine Einheit existiert, die für $\mathfrak{p}_\infty$ negativ, für alle andern unendlichen Primstellen aber positiv ausfällt, würde dazu führen, dass $\mathfrak{p}_\infty$ überhaupt nicht im Führer aufgehen kann, falls dieser nur unendliche Primstellen enthält.

Es gilt sogar allgemeiner: Enthält der Führer nur unendliche Primstellen (ist also der Klassenkörper unverzweigt), so enthält er eine *gerade* Anzahl. Diese notwendige Bedingung ist hinreichend, wenn jede Einheit aus K_0 in allen reell–konjugierten Körpern zu K_0 das gleiche Vorzeichen hat.
Nun zum Punkt **3.)**

Ich habe früher allerdings statt mit $(S-1)^{\text{ten}}$, $(S-1)^2$–ten, ... Potenzresten mit $(\ell,\, S-1)^{\text{ten}}$, $\big(\ell,\, (S-1)^2\big)^{\text{ten}}$,... Potenzresten gerechnet, wo allgemein $\big(\ell^m,\, F_1(S), \dots F_r(S)\big)^{\text{ter}}$ Potenzrest eine Zahl η heisst, die sich

$$\eta \equiv \alpha_1^{F_1} \cdots \alpha_r^{F_r} \gamma^{\ell^m} \qquad \text{darstellen lässt.}$$

Ich rechnete damals überhaupt immer mit Moduln von Zahlen und Polynomen. In diesem Sinne ist, wenn ich zwei reelle Körper $K_{p_1}^\ell$ und $K_{p_2}^\ell$ betrachte (also $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod 4$, wenn $\ell = 2$, sonst $[\equiv 1] \pmod{\ell}$), die Grundeinheit ε, von $K_{p_1}^\ell$ sicher $(\ell,\, S-1)^{\text{ter}}$ Potenzrest nach p_2, da $\varepsilon_1^{1+S_1+\cdots+S_1^{\ell-1}} = \pm 1$ selbst ℓ^{ter} Potenzrest nach p_2 ist, auch wenn $\ell = 2$, da dann nur ein $p_2 \equiv 1\ (4)$ in Betracht gezogen wird. (Dies bleibt sogar noch gültig, wenn p_2 in $K_{p_1}^\ell$ nicht zerfällt, da dann die S^{te}, S^2–te, S^3–te,...

Potenz eines Restes mit seiner p_2^{ten}, p_2^2–ten, p_2^3–ten... Potenz (in gewisser Reihenfolge) zusammenfällt und aus

$$\eta^{1+S+S^2+\cdots+S^{\ell-1}} \equiv \eta^{1+p_2+\cdots+p_2^{\ell-1}} \equiv 1 \ (p_2) \quad \text{folgt:}$$

$\eta \equiv \alpha^{p_2-1} \equiv \alpha^{S^a-1}\ (p_2)$. Es hat natürlich nur dann einen besonderen Sinn, von $F(S)^{\text{ten}}$ Potenzresten zu sprechen, wenn p_2 in $K_{p_1}^{\ell}$ zerfällt. Dann gibt es einen Primitivrest α mod p_2, dass sich alle teilerfr. Reste $\gamma \equiv \alpha^{F(S)}\ (p_2)$ darstellen, wo $F(S)$ ein Restsystem nach dem Modul: $(p_2 - 1,\ S^{\ell} - 1)$ durchläuft. (z. B., wenn $p_2 = N(\mathfrak{p}_2)$: α Primitivrest nach $\mathfrak{p}_2$; $\alpha \equiv 1$ mod $\mathfrak{p}_2^{S^a}$, $a = 1, \ldots, \ell - 1$).

Nun kann ich für $\boldsymbol{\ell > 2}$ statt mit $(\ell,\ (S-1)^{\lambda})^{\text{ten}}$ Potenzresten einfach mit $(S-1)^{\text{ten}}$ Potenzresten rechnen, wenn ich bei Einheiten bleibe, da ich die Grundeinheit ε_1 so normieren kann, dass $N(\varepsilon_1) = +1$. Jedenfalls ist der Faktor: -1 unwesentlich, da seine Ordnung 2 zu ℓ teilerfremd. Natürlich ist ein $(S-1)^2$–ter Potenzrest mehr als ein $\big(\ell,\ (S-1)^2\big)^{\text{ter}}$; aber ein $(S-1)^{\text{ter}}$ Rest, der kein $(S-1)^2$–ter Rest ist, ist auch kein $\big(\ell,\ (S-1)^2\big)^{\text{ter}}$ Rest: (wenn man einen Rest, dessen Ordnung zu ℓ teilerfremd ist, mit 1 identifiziert, sodass der obengenannte Modul: $(p_2 - 1,\ S^{\ell} - 1)$, den man die 'symbolische Ordnung' des Primitivrestes α nennen kann, durch einen Teiler: $(\ell^m,\ S^{\ell} - 1)$ ersetzt wird!).

Aus $\underline{\varepsilon_1 \equiv \alpha_1^{S-1}}$; $\underline{\varepsilon_1 \equiv \alpha_2^{\ell} \cdot \alpha_3^{(S-1)^2}}$ folgt: $\alpha_1 \equiv \alpha_4^{\ell} \alpha_5^{S-1}$. (sonst wäre α_1 primitiv, hätte die volle Ordnung: $(\ell^m,\ S^{\ell} - 1)$, und dann ε_1 *nur* $(S-1)^{\text{ter}}$ Potenzrest)

Hieraus:

$$\underline{\varepsilon_1} \equiv \alpha_4^{\ell(S-1)} \alpha_5^{(S-1)^2} \equiv \alpha'^{(S-1)^{\ell}}_4 \alpha_5^{(S-1)^2} \equiv \underline{\alpha_6^{(S-1)^2}}\,.$$

$\big($Der Modul: $\big(\ell^m,\ S^{\ell} - 1,\ (S-1)^2\big)$ ist das kl. gem. Vielf. von $\big(\ell,\ (S-1)^2\big)$ und $(\ell^m,\ S-1)$.$\big)$

Diese Überlegung, die mir von früher her geläufig ist, habe ich in meinem Manuskript dem Leser vorenthalten und dadurch eine Inconsequenz begangen, dass ich einmal von $(S-1)^2$–ten Potenzen von Restklassen, andermal Restklassen*verbänden* sprach, nämlich zuletzt bei der Definition von $\mathfrak{F}_K$ (Verbandsuntergruppe) auf S. 16, und zu Anfang auf S. 11, wo ich verlangte, dass $\varepsilon_1^{(S-1)^{\ell-2}} = \eta_1$ kein ℓ^{ter} Potenzrest sein soll.

Für $\ell = 2$ ist diese Fassung, die mit *Verbands*potenzen rechnet, allein möglich, da die Grundeinheit im allg. kein $(S-1)^2$–ter Potenzrest ist. Hier lautet die Forderung einfach, dass $\varepsilon_1 = \eta_1$ kein quadratischer Rest nach p_3 sein soll, und im Satz a) im Kleindruck auf S. 13 ist für '$(S-1)^2$–ter Potenzrest' (was gleichbedeutend wäre mit: '$2 \cdot (S-1)^{\text{ter}}$ Rest') einfach einzusetzen: 'quadratischer Rest'.

Für $\ell = 2$ liegt also die Sache noch einfacher als für $\ell > 2$, und es ist sinnlos, $\ell = 2$ unter den allgemeinen Fall so einzwängen zu wollen, wie ich es nachträglich probierte.

In meiner Note müsste ich dann folgende Abänderung machen[3]:

> **S. 11 Mitte**:
> ... Ausserdem sei die $(S-1)^{\ell-2}$–te Potenz η_1 ... kein ℓ^{ter} Potenzrest mod p_3, wobei S eine erzeugende Substitution in $K^{\ell}_{p_1}$ ist.[**] ...
>
> ---
>
> [**] Das bedeutet für $\ell = 2$, dass ε_1 nicht quadratischer Rest ist, im allg., dass ε_1 in einem Restklassenverband liegt, der keine $(S-1)^2$–te Potenz ist. Wählt man für $\ell > 2$ das Vorzeichen von ε_1 so, dass $N(\varepsilon_1) = +1$ ist, dann ist ε_1 eo ipso $(S-1)^{\text{ter}}$ Potenzrest, und für den Fall bedeutet die genannte Forderung, dass ε_1 kein $(S-1)^2$–ter Potenzrest ist.

Aus dem Text fällt also eine Zeile fort; dafür die neue Anmerkung, deren nähere Motivierung ich mir hoffentlich sparen darf. Sonst würde es sich jedenfalls für diese Note nicht lohnen, von $(S-1)^{\lambda}$–ten Potenzresten zu sprechen, und ich müsste auch im Kleindruckteil auf S. 13 zu den Restklassenverbänden zurückkehren.

Im Kleindruck auf S. 13 wäre hinzuzufügen:

Zeile 2:	hinter: ↓ kein $(S-1)^2$–ter Potenzrest	(für $\ell = 2$ ein nicht–quadratischer Rest)
ebenso in Satz a): **(zweimal)**	↓ $(S-1)^2$–ter Potenzrest	(bzw. quad–ratischer Rest)

Satz b) bezieht sich ja nur auf $\ell > 2$; man könnte evtl. **($\boldsymbol{\ell > 2}$)** in Klammern dahintersetzen.

Der Satz 2) bleibt völlig unberührt. Erst wieder in seiner Anwendung auf S. 15:
'Kehren wir zu unserm Körper: $\cdots$ zurück $\cdots$' gehört in der fünften Zeile hinter '$(S-1)^2$–ter Potenzrest' wieder: **(bzw. quadratischer Rest)**, und bei den kommenden Kongruenzen muss ein β^{ℓ} eingeschoben werden[4]:

$$\begin{cases} \eta \equiv \alpha^{(S_1-1)^2}\beta^{\ell} \pmod{p_3} & ; \ \alpha,\ \beta < K_{12} \\ \varepsilon_1 \equiv \alpha_1^{(S_1-1)^2}\beta_1^{\ell} \pmod{p_3} & ; \ \alpha_1,\ \beta_1 < K^{\ell}_{p_1} \end{cases}$$

(Natürlich würde für $\ell = 2$ das β allein, für $\ell > 2$ das α allein ausreichen; es wird aber hier deutlicher, schon hier wieder zu den Restklassenverbänden zurückzukehren.)

Auf S. 16 muss es dann heissen:

... Die Einheitenuntergruppe ist offenbar $\mathfrak{F}_1$, da schon η nicht mehr $\mathfrak{F}_2$ angehört, anderseits aber alle Einheiten ε $\mathfrak{F}_1$ angehören; denn sonst hätte ε selbst die Eigenschaft, dass sich alle Zahlen γ aus K_{12} darstellen lassen:

$$\gamma \equiv \varepsilon^{F(S_1)} \beta^\ell \pmod{p_3},$$

und alle Zahlen γ_1 aus $K_{p_1}^\ell$ dann:

$$\gamma_1 \equiv \varepsilon_1^{F(S_1)} \beta_1^\ell \pmod{p_3}; \; \beta_1 < K_{p_1}^\ell,$$

während doch schon $\varepsilon_1^{1+S_1+\cdots+S_1^{\ell-1}} = \pm 1$, und für $\ell = 2$: $(\frac{-1}{p_3}) = 1$.

Es ist daher die Idealklassengruppe mod p_3 in K_{12} zugleich mit $\mathfrak{F}_0/\mathfrak{F}_1$ zyklisch ...

Diese ausführliche Begründung, dass $\mathfrak{F}_1$ gerade die 'Einheitenuntergruppe' ist, schien mir doch noch notwendig. Hoffentlich lassen sich die 7 Zeilen statt der der halben Zeile gut einflechten und haben Sie nicht zu viel Mühe mit den Änderungen!

Am Freitag, 11. I. war[5)] die Antrittsvorlesung von Remak, die einen unerwartet würdigen Eindruck machte[6)]. Allerdings war schon paar Tage vorher in Remak eine kleine Wandlung vorgegangen.

Bestellen Sie, bitte, Herrn Baer[7)] einen Gruss von mir! Ich suchte ihn gleich am Freitag, 4. I. in Berlin zu treffen, was sicher schon zu spät war. Die Wohnung in der Reiterstrasse in Freiburg habe ich jetzt fest für April gemietet.

Ich muss jetzt die nächsten Tage eiligst den Rest der Referate für die Fortschritte machen, ehe ich an etwas anderes denken kann.

Mit bestem Gruss.

Ihr

Arnold Scholz.

13. I. 28.

Anmerkungen zum 10.01.1929

[1]Gemeint sind Kommentare Hasses zum Scholzschen Manuskript [S5].

[2]Der folgende Kasten erscheint in dieser Form auf Seite 3 der Note [S5].

[3]Im Manuskript erscheint das bei Fußnote 3.

[4]Auf S. 6 des Manuskripts [S5].

[5]Der Brief wurde, wie man am Datum weiter unten sehen kann, erst am 13.I. abgeschickt.

[6]Zu den Gerüchten über Remaks Charakter vgl. Merzbach [199].

Robert Remak wurde am 14. Februar 1888 in Berlin geboren. Er studiert dort und promoviert 1911 bei Frobenius. 1929 unterrichtet er als Privatdozent in Berlin, verliert diese Stelle aber 1933 wegen seiner jüdischen Herkunft. 1938 wird Remak festgenommen und landet im KZ Sachsenhausen. Nach seiner Entlassung lässt er sich in den Niederlanden nieder, wird nach der Besetzung Hollands 1942 aber wieder verhaftet, nach Auschwitz deportiert und dort ermordet. Robert Remak wurde 2008 mit einem Stolperstein in der Manteuffelstr. 22a geehrt.

[7]Reinhold Baer wurde zwei Jahre vor Scholz, am 22.Juli 1902, in Berlin geboren und wuchs wie dieser in Charlottenburg auf, einem der besseren Viertel Berlins. Nach einem Jahr auf der Technischen Hochschule in Hannover beschließt er, sein Ingenieurstudium mit der Mathematik zu vertauschen und zieht nach Freiburg, wo er seinen Mitstudenten F.K. Schmidt und den Privatdozenten W. Krull kennenlernt. Von 1922 bis 1924 hält sich Baer in Göttingen im Kreis um Emmy Noether auf, schreibt aber seine Dissertation bei Hellmuth Kneser. Danach unterrichtet er kurz an einer Privatschule, bevor ihm Loewy eine Assistententstelle in Freiburg anbietet. Dort habilitiert er 1928 und hält seine erste Vorlesung. Im selben Jahr verschafft ihm Hasse eine Privatdozentur in Halle. Während eines kurzen Urlaubs in den österreichischen Alpen im April 1933 erfährt Baer von seiner Entlassung; Hasse verschafft ihm über Mordell eine Stelle in Manchester, nach zwei Jahren nimmt ihn Weyl mit nach Princeton. 1956 kehrt Familie Baer nach Deutschland zurück und Baer nimmt eine Stelle in Frankfurt an; 1967 ziehen sie nach Zürich. Baer stirbt am 22. Oktober 1979.

3.20 08.07.1929, Scholz an Hasse

Freiburg, 8. VII. 1929.

Lieber Herr Hasse!

Ich weiss gar nicht, ob ich Ihnen schon mal geschrieben habe, wie mir Freiburg bekommt. Ich glaube kaum, dass ich einen andern Ort mit einer so schönen Umgebung finden würde; und das ist für mich sehr wichtig, da ich nur ungern in der Stube Mathematik treibe, ausser wenn ich gerade etwas aufschreiben muss. Weiter habe ich in Freiburg viel mehr freie Zeit als in Berlin; ich werde hier sehr schonsam behandelt, habe mich eigentlich nur um Loewys Seminar zu kümmern. Schliesslich bekomme ich von Loewy auch hinreichend Anregung, mir allerlei Literatur anzusehen. Zermelo ist mir allerdings viel interessanter. Augenblicklich weilt er noch in Zoppot, nachdem er Warschau gut überstanden. Im August wird er hierher zurückkehren. Indessen fehlt es mir hier nicht an Besuch: Jetzt war gerade 10 Tage meine Mutter hier; auch andere Bekannte reisen öfter hier durch. Augenblicklich bin ich aber froh, dass ich mal wieder etwas allein bin. Mit der Versendung meiner Dissertation komme ich nicht so schnell durch. Sie werden sie ja inzwischen erhalten haben. Jetzt muss ich mich auch daran begeben, die Fortsetzung aufzusetzen. Neulich ist mir übrigens eingefallen, dass ich in meiner Note über den Klassenkörperturm, die ich Ihnen am 3. 1. 29. für das Crelle–Journal überreicht[1] habe, einen Punkt zu umständlich dargestellt habe. Es handelt sich um die Hilfsüberlegung 2)(S. 13 ?):

Ist K ein einklassiger Körper, relativ–zyklisch vom Primzahlgrad ℓ über einem Körper K_0, und geht im Führer $\bar{\mathfrak{f}}$ von K/K_0, der zu ℓ teilerfremd sei, höchstens eine Primstelle aus K_0 auf, so ist jede Einheit aus K_0 Norm einer Einheit[2] aus K.

Ich ging meiner Gewohnheit gemäss wieder von dem vollen Inhalt der Klassenkörpertheorie aus, was ja in den meisten Fällen, wo sie sich verwenden lässt, schon der klaren Übersicht wegen vorteilhaft ist. Hier aber kann man einfach so schliessen: Hat K_0 r Fundamentaleinheiten, so besitzt K $r+1$ relative Grundeinheiten. Nach Voraussetzung ist die Anzahl der unabhängigen ambigen Ideale (hier Hauptideale) höchstens 1 . Für den Fall, dass garkeine existieren, schliesst Hilbert im Zahlbericht XV, dass eine Hauptidealisierung stattfinden muss. Ebenso schliesst man in dem uns hier interessierenden Fall, dass ein ambiges Ideal existiert und alle Ideale in K Hauptideale sind (ebenfalls dann in K_0, wenn man die Klassenkörpertheorie heranzieht): Dass von

den $r+1$ Grundeinheiten in K nur eins die $(S-1)^{\text{te}}$ Potenz einer ambigen Zahl werden kann, also nur dies die Relativnorm 1 besitzt. Es existieren also r unabh. Relativnormenverbände in K_0, d. h. jede Einheit ist Norm in K.

Ich müsste das bei Verbesserung der Note natürlich mehr ausführen, am besten, wenn ich die erste Korrektur bekomme. Eine Vereinfachung wäre es für diese Note besonders deswegen, weil ich diesen Hilfssatz nachher auf einem schon als einklassig bekannten Grundkörper (K_1) mit relativ–zyklischem Oberkörper (K_{12}) von Primidealführer anwende. Auf diesen Hilfssatz gekommen bin ich allerdings in einem andern Zusammenhang mit komplizierteren Betrachtungen, in dem meine ursprüngliche Fassung die natürliche ist. Ihren Bericht über die Landausche Zahlentheorie habe ich gerade gelesen. Ich muss bekennen, dass auch auf mich (wie auf viele) die 'Scheu vor dem weissen Papier' zutrifft. '$B \pm H$' ist doch sicher Bessel–Hagen,[3)] und das Minuszeichen der ursprüngliche Bindestrich. Zum Mathematiker–Tag werde ich diesmal wohl nicht kommen, da ich im September nach Dalmatien reisen will und erst gegen Ende Sept. nach Wien komme. Wäre die Tagung in Prag Anfang Okt., würde es besser passen. Prag kenne ich schon. Dass Schreier nun doch gestorben ist,[4)] ist ja sehr traurig. Ich hörte es vor einem Monat von Loewy.

Mit herzlichem Gruss, auch an Baer

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 08.07.1929

[1]Anscheinend haben sich Hasse und Scholz am 3.1.1929 getroffen.

[2]Das folgt ganz einfach aus der Formel für die Anzahl der stark ambigen Idealklassen (vgl. den Brief vom 24.10.1928):

$$\#\mathrm{Am}_{\mathrm{st}}(L/K) = h_K \cdot \frac{\prod e(\mathfrak{p})}{(L:K)(E_K:NE_L)}.$$

Auch hier ist $\prod e(\mathfrak{p}) = (L:K) = \ell$ und $\ell \nmid h_K$, also wieder $\ell \nmid (E_K:NE_L)$ und somit $(E_K:NE_L) = 1$.

[3]Hasse hatte im Jahresbericht der DMV **38** (1929), *53–61* die Landauschen Vorlesungen über Zahlentheorie ausführlich besprochen. Auf S. 53 schreibt er:

> *Durch weiträumigen Satz, ohne die leider heute so verbreitete Scheu vor viel weißem Papier, wird eine schöne Übersichtlichkeit im Kleinen wie im Großen erreicht.*

Am Ende der Besprechung dankt er Herrn $B \pm H$ für dessen Ratschläge.

[4]Otto Schreier, am 3.03.1901 in Wien geboren, starb am 2.06.1929 in Hamburg. Seine Eltern, der jüdische Architekt Theodor Schreier und dessen Frau Anna wurden am 9. Oktober 1942 von ihrer Wiener Wohnung aus nach Theresienstadt deportiert, wo Anna bereits am 24. Oktober 1942 und ihr Mann am 22. Januar 1943 umkamen; vgl. [232, S. 136].

3.21 06.08.1929, Scholz an Hasse

Freiburg, 6. VIII. 1929.

Lieber Herr Hasse!

Für Ihren freundlichen Brief vielen Dank! Die Note habe ich indessen auch von W. d. G.[1)] zurückbekommen und verbessert. Da das Manuskript noch nicht im Satz war, war es natürlich gut, dass ich's vorher noch bekam. Hoffentlich verzögert sich jetzt der Druck nicht; ich würde ganz gern noch vor meiner Abreise am 30. VIII. eine Korrektur lesen, weil ich sonst erst wieder im Oktober dazu käme. Ich habe nun als Verbesserung nur noch eine Anmerkung auf S. 15 (als S. 15[a]) hinzugefügt und den ursprünglichen Beweis stehen gelassen, da ich sonst doch noch die Fallunterscheidung 1) $\zeta \not< K_0$, 2) $\zeta_\ell < K_0$ vornehmen müsste wie in Hilberts Zahlbericht §56. So habe ich nur als Anmerkung angegeben, wie man im Fall $\zeta_\ell \not< K_0$ einfacher schliessen kann. Im übrigen finde ich die Sache jetzt so gut verbessert; Ihre S. 9[a] scheint mir auch deutlicher zu sein. Erst dachte ich übrigens, dass die Verbesserungen auf S. 11[a] und S. 16[a] auch von Ihnen stammen, bis ich in meinem 'unreinen' Manuskript dann fand, dass ich's selbst so verbessert und Ihnen zugeschickt hatte. So wenig erinnere ich mich mehr meiner eigenen Darstellung.

Ich werde in den grossen Ferien garnicht nach Berlin kommen, da ich eine grosse Adriareise vorhabe, wie ich wohl schon schrieb. Ich will am 30. Aug. von hier mit meiner Schwester abreisen, zuerst für ein paar Tage nach S. Martino di Castrozza, dann für 4 Tage nach Venedig, dann nach Ragusa, wo wir vom 12.–25. September bleiben wollen, dann über Sarajewo nach Budapest und Wien, wo wir uns trennen. Falls Sie nach Prag zur Tagung gehen und nachher die Extratour nach Budapest mitmachen, könnten wir vielleicht dort zusammentreffen. Ich komme etwa 27. Sept. dahin und werde dort v. Neumann treffen. Von Wien aus möchte ich noch etwas ins Gesäuse und dann etwa 8. Okt. nach Freiburg zurück. Die Prager Tagung hätte ich mitgemacht, wenn sie später läge. Ich reise dann aber zu Weihnachten nach Berlin, wahrscheinlich mit Zermelo. Da das letzte Loewy–Seminar vor Weihnachten am Mi 18 Dez. ist, könnte ich dann schon meine Ferien beginnen und Sie vielleicht vor Weihnachten an einem Nachmittag besuchen (19. oder 20.), falls es Ihnen da gut passt.

Von Artins bevorstehender Heirat[2)] hörte ich schon durch Zermelo, der übrigens sehr erholt aussieht, aber noch genausogut schimpfen kann wie vorher. Hoffentlich hat Artin gut gewählt! Die Geschichte von der 'Radebreche-

rei' ist mir allerdings noch neu. Feigl und Frau hat es am 1. Aug. in Freiburg wieder sehr gut gefallen.

Die Fortsetzung meiner Dissertation wird als Beitrag 14 zur Algebra in dem Heidelbg. Ak. Ber. erscheinen. Ich habe sie Loewy gerade vor kurzem übergeben, und er glaubt, dass sie noch gegen Ende des Jahres erscheinen könnte. Ich bin jetzt wieder dabei, die Klassenkörper von Primzahlpotenzgrad ℓ^a über Körpern $K_p^\ell \cdot K_q^\ell$ zu untersuchen, für die $K_p^\ell \cdot K_q^\ell$ der maximale Abelsche Unterkörper ist. Es schien mir doch notwendig, die Einheitengruppe von $K_p^\ell \cdot K_q^\ell$ näher zu untersuchen, und ich bin vorläufig zu folgendem Resultat gelangt: Tauchen in $K_p^\ell \cdot K_q^\ell$ Idealklassen der Ordnung ℓ^2 nicht auf, so gibt es dann und nur dann eine Grundeinheit η, sodass sich alle Einheiten als symbolische Potenzen: $\varepsilon = \eta^{F(S_1,S_2)}$ darstellen lassen, wenn die Klassenzahl des Körpers entweder zu ℓ teilerfremd ist, oder wenn $(\ell-1)^2$ unabhängige Idealklassen (Maximalzahl!) der Ordnung ℓ existieren. Ich habe dies mit Hilfe des Artinschen Hauptidealisierungskriteriums bewiesen, indem ich auch das benutzte, was ich jetzt zur Klassenkörperturmnote hinzufügte. Ich glaube, dass man auch ohne die Nicht–ℓ^2–Bedingung auskommen kann, und dass man auch schliesslich mit etwas mühsamem Abzählen mit der Klassenzahl–Regulator–Formel durchkommt. Merkwürdigerweise scheint die Klassenzahl von $K_p^\ell K_q^\ell$ stets ein echter Teiler des Klassenzahlproduktes der $\ell+1$ Komponentenkörper zu sein, und zwar scheint sich mindestens der Faktor $\ell^{\ell-1}$ wegzudividieren, wie in[3)] obigen beiden Extremfällen mit der Grundeinheit η. Ist die Klassenzahl von $K_p^\ell K_q^\ell$ gerade ℓ, so ist die 'Kontraktion' C der Klassengruppe schon $2\ell-3$ (Exponent von ℓ). Es scheinen i. allg. auch nicht einmal neue Idealklassen zu entstehen, die nicht schon in den Komponentenkörpern vorkommen (im 'erzeugenden' Sinne gesprochen), wie ich mir eben flüchtig überlege. Dagegen haben die Einheiten stets eine Expansion E über das zus.–gestellte Schema der Komponentenkörpereinheiten hinaus. $C+E$ muss nach der Regulatorformel konstant sein und zwar $= \frac{(\ell+2)(\ell-1)}{2}$, da im Falle der existierenden Grundeinheit: $\left\{ \begin{array}{lcl} C & = & \ell-1 \\ E & = & \frac{\ell(\ell-1)}{2} \end{array} \right.$.

Mit herzlichem Gruss Freiburg $\longrightarrow$ Halle

Ihr

Arnold Scholz.

Von F. C. Schmidt habe ich bisher noch nichts bekommen.

Anmerkungen zum 06.08.1929

[1]Gemeint ist de Gruyter, der Verleger des Crelle Journals.

[2]Artin heiratete 1929 Natascha Jasny, die am 11.06.1909 in St. Petersburg geboren wurde. Ihre Familie floh über Konstantinopel nach Österreich, und kam 1924 nach Hamburg. Sie starb am 3.02.2003 in Princeton.

[3]Scholz schreibt versehentlich „ich“ statt „in“.

3.22 10.11.1929, Scholz an Hasse

Freiburg, 10. Nov. 1929.

Lieber Herr Hasse!

An den Korrekturen, die ich hier zurücksende, hat der Setzer noch viel zu verbessern. Ich bekomme ja aber doch noch eine Korrektur nach dem Umbruch. Statt des deutschen $\mathfrak{p}$ hat der Setzer überall ein J gedruckt; erst zum Schluss war es ihm nicht ganz geheuer; da hat er stattdessen lauter Kleckse hingesetzt, die mit ihren oberen und unteren Indizes sehr komisch aussehen. Dabei steht in meinem Manuskript das $\mathfrak{p}$ deutlich unter der Zeile; begreiflicher wäre es, wenn er es mit $\mathfrak{y}$ verwechselt hätte. — Ich werde jetzt daran gehen, mich allmählich zu habilitieren, sodass ich nächstes Semester schon lesen kann. Als Habilitationsschrift nehme ich das, was ich mir gerade über die Gestalt der Einheitengruppe von Körpern $K_p^\ell K_q^\ell$ im Zusammenhang mit deren Klassengruppe überlegt habe. Wenn man überhaupt absolut Abelsche Körper K vom Typus (ℓ, ℓ) betrachtet, können folgende drei Hauptfälle eintreten: A) Alle $\ell + 1$ Unterkörper ℓ^{ten} Grades sind Normkörper (ihre Grundeinheit ist Norm einer Einheit im Abelschen Körper). B) Alle bis auf einen Unterkörper sind Normkörper. C) Kein Unterkörper ist Normkörper.[1)] Die Fälle A) und B) sind durch ihre Regulatoren nicht unterschieden; die zahlenmässige Klassenzahl–Regulator–Formel sagt also hier nicht genug. Im Falle A) besitzt K eine Grundeinheit ε $(\varepsilon^\ell = \eta_1\eta_2\ldots\eta_{\ell+1}$; Produkt der Grundeinheiten der Unterkörper), dass alle Einheiten die Gestalt $\varepsilon^{F(S_1,S_2)}$ haben; im Falle B), dass alle Einheiten darstellbar: $\eta_1^F\varepsilon^G$ $(\varepsilon^\ell = \eta_1^S\eta_2\eta_3\ldots\eta_{\ell+1})$. Der Fall C) kann sehr verschieden aussehen. Ist $K = K_p^\ell K_q^\ell$, so ist K_p^ℓ nur dann Normkörper, wenn $(\frac{q}{p})_\ell \neq 1$; die $\ell - 1$ Unterkörper ausser K_p^ℓ und K_q^ℓ (die 'Zwischenkörper') sind alle Normkörper, wenn die Ordnung der Klassengruppe in K die Gestalt: $\mathfrak{M} = \left(\ell, X^\lambda, Y^{\ell-1}\right)$ hat $\left\{\begin{array}{lcl} X & = & S_1 - 1 \\ Y & = & S_2 - 1 \end{array}\right.$ (und noch in einigen besonderen Fällen). Daraus folgt schon, dass für $(\frac{q}{p})_\ell = (\frac{p}{q})_\ell = 1$ die Klassenzahl von K stets durch ℓ teilbar ist. (Deswegen habe ich in der Korrektur auf S. 30 die Anm. 1) noch verlängert.) Merkwürdigerweise folgt aber auch, dass der Maximalfall: $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = \left(\ell, X^{\ell-1}, Y^{\ell-1}\right)$ — maximal dafür, dass keine Idealklasse einer natürlichen Ordnung ℓ^2 auftritt – selbst nicht auftreten kann, weil hier die 'Stammkörper' beide nicht Normkörper wären, die Zwischenkörper dagegen alle. Dagegen wäre der Modul $\mathfrak{M} = \left(\ell^2, \ell X, \ell Y, \sum_{\lambda=0}^{\ell-1} S_1^\lambda, \sum_{\lambda=0}^{\ell-1} S_2^\lambda\right)$,

der durch den Modul $\mathfrak{M}$ teilbar ist, zulässig, weil hier kein Normkörper aufträte. Allgemein ist $\mathfrak{N}^{(k)} = \left(\ell^k, \sum S_1^\lambda, \sum S_2^\lambda\right)$ nicht zulässig; unsymmetrisch ausgedrückt: Wenn die Klassengruppe von K die Maximalzahl von $(\ell-1)^2$ Basiselementen besitzt, so sind sie *nicht* alle von gleicher Ordnung. dies ist eigentlich ein garstiges Ergebnis.

Eine weitere Frage, die ich mir überlegte, ist, ob man alle metabelschen ℓ–Potenz–Körper erhalten kann (als Unterkörper), indem man die absoluten Klassenkörper der Kreiskörper bildet (alles in bezug auf ℓ), und ob überhaupt alle $(n+1)$–stufigen Körper in n^{ten} Klassenkörpern von Kreiskörpern vorkommen; dann wäre meine Klassenkörperturmnote beinahe eine zwangsläufige Konstruktion eines $(n+1)$–stufigen Körpers. Dies gilt nun doch nicht. Man kann zwar, wenn auf irgend einer Stufe des ℓ–Potenz–Körpers K eine bisher noch nicht dagewesene Primzahl q im Führer auftaucht $\bigl($wenn $q \neq \ell$: $q \equiv 1\ (\ell^h)$; $\not\equiv 1\ (\ell^{h+1})\bigr)$, den Körper $K_q^{\ell^h}$ adjungieren, und der Führer von $KK_q^{\ell^h}$ auf der entsprechenden Stufe wird dann prim zu q werden, da die Differente im ganzen auch nur q^{1-1/ℓ^h} gewinnt, aber es besteht doch die Möglichkeit, wenn man die Primzahl q schon einmal für einen Führer benutzt hat, sie für einen Führer auf höherer Stufe zu wiederholen; z. B. kann man Körper $K_p^\ell K_q^\ell$ $\bigl(q \equiv 1\ (\ell)$; $(\ell \neq 2)$ $\not\equiv 1\ (\ell^2)\bigr)$ bilden, die q als Führer wieder zulassen*), sodass in der Differente des Klassenkörpers dann q^{1-1/ℓ^2} aufgeht. Vermutlich gibt es ℓ–Potenz–Körper K für beliebig grosses k, sodass q^{1-1/ℓ^k} in der Differente aufgeht; natürlich ist, wenn K n–stufig und $q \not\equiv 1\ (\ell^{h+1})$: $k \leqq nh$. Nennt man für einen ℓ–Potenzkörper mit der Differente $\prod p_\nu^{1-1/\ell^{k_\nu}}$ den Klassenkörper zum Führer $\prod p_\nu^{1/\ell^{k_\nu}}$ seinen Wiederholungskörper (den ich vorläufig nur für $p_\nu \neq \ell$ definieren will), so gilt jedenfalls, dass man alle ℓ–Potenzkörper durch die ersten, zweiten... Wiederholungskörper der Kreiskörper erschöpfen kann.

Von F. C. Schmidt habe ich keinen Brief bekommen. Krull war mal im Oktober mit seiner Frau in Freiburg. Dienstag soll Vorlesungskonferenz sein, trotzdem, um mit Zermelo zu sprechen, die ganze 'Intrigalrechnung' schon fertig ist. Der gutmütige Bolza hat sich schliesslich auch wieder breitschlagen lassen, zu lesen. Zermelo liest nicht im Sommer.

Mit den besten Grüssen, auch an Baer. Ihr

Arnold Scholz.

Gratuliere übrigens noch zu Marburg[2]. Gehen Sie im Sommer hin?

---

*) indem man die Grundeinheit von K_p^ℓ genau als $(S-1)^2$–ten Potenzrest mod q wählt.

Anmerkungen zum 10.11.1929

[1]Die Arbeit [S7], um die es hier geht, enthält eine ganze Reihe von Ergebnissen, die bisher kaum oder gar nicht beachtet wurden. Im Spezialfall $\ell = 2$ sieht die Lage so aus: der Körper $K = K_p^2 K_q^2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}\,)$ (hier sind $p \equiv q \equiv 1 \bmod 4$ Primzahlen) enthält die Fundamentaleinheiten ε_p, ε_q und ε_{pq} der quadratischen Teilkörper. Die Einheiten der *Stammkörper* $K_p^2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p}\,)$ und $K_q^2 = \mathbb{Q}(\sqrt{q}\,)$ bleiben in K fundamental, d.h. $\pm\varepsilon_p$ und $\pm\varepsilon_q$ werden keine Quadrate in K. Genauer ist das Fundamentalsystem der Einheiten gegeben durch

$$E_K = \begin{cases} \langle -1, \varepsilon_p, \varepsilon_q, \sqrt{\varepsilon_{pq}}\,\rangle, & \text{falls } N\varepsilon_{pq} = +1, \\ \langle -1, \varepsilon_p, \varepsilon_q, \sqrt{\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_{pq}}\,\rangle, & \text{falls } N\varepsilon_{pq} = -1 \end{cases}$$

Im zweiten Fall sind alle Fundamentaleinheiten der quadratischen Teilkörper Normen der Einheit $\sqrt{\varepsilon_p\varepsilon_q\varepsilon_{pq}}$ (bis auf das Vorzeichen), d.h. alle drei Teilkörper sind Normkörper. Im ersten Fall dagegen sind die beiden Stammkörper keine Normkörper, der Mittelkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{pq}\,)$ dagegen schon. Wie Scholz in [S15] feststellen wird, kann die Entscheidung über die Lösbarkeit der Gleichung $T^2 - pqU^2 = -4$ mit Hilfe der Restsymbole (p/q), $(p/q)_4$ und $(q/p)_4$ getroffen werden, falls die Idealklassengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{pq}\,)$ keine Elemente der Ordnung 8 besitzt. Auch im vorliegenden Fall lassen sich, wenn die Mittelkörper elementar-abelsche ℓ-Klassengruppen besitzen, genaue Angaben machen.

Die von Scholz benutzten Methoden, insbesondere die Idee, Teilkörper des Hilbert-Klassenkörpers von $K_p^\ell K_q^\ell$ als Klassenkörper über K_p^ℓ zu interpretieren, dürften sich als mächtige Hilfsmittel erweisen, auch im Zusammenhang mit Fragen, wie sie Naito [219, 220] aufgeworfen hat.

[2]Hasse war von Halle nach Marburg berufen worden.

3.23 13.01.1930, Scholz an Hasse

Freiburg, 13. I. 1930.

Lieber Herr Hasse!

Die kurze Zeit in Berlin ist mir sehr schnell vergangen. Ich habe viel von Berlin gehabt. Auch Zermelo hat es gut gefallen, auf der Weihnachtsfeier der Mapha, wo er beim Semestertanz als ältestes: 82. Semester eine Promenade mit Frau Feigl machte, und auch sonst, wo er überall eingeladen war. Am 3. Januar waren wir mit Artins zusammen im Café Berlin. Artin war über Weihnachten in Reichenberg und besuchte Berlin auf der Rückreise. Wir haben uns sehr gut unterhalten. Sonst war ich öfters im Theater und zu Silvester auf Bällen. Zur Mathematik bin ich in Berlin nicht gekommen ausser dass ich mit Neiss seine Habilitationsschrift[1)] besprach. Der Fall $P(\sqrt{-3})$ und Relativgrad 3^r musste noch besonders behandelt werden und bietet natürlich eine weniger gute Übersicht bei Verwendung der 'Primkörper'. In andern Fällen stören keine Einheiten, und da ist die Sache dann auch klarer mit den Primkörpern, die allerdings scharenweise denselben Unterbau, Teiler des absoluten Klassenkörpers haben. Im Falle $P(\sqrt{-3})$, Grad 3^r lässt sich eine 'überflüssige' $3^{1/2}$ im Führer der Primkörper nicht vermeiden. Die Hilbertschen Einheitensätze für relativ–zyklische Körper lassen sich ja leicht von Primzahlgrad auf Primzahlpotenzgrad übertragen, was natürlich ausgeführt werden muss. — Der 'Beitrag 14 zur Algebra' ist die gruppentheoretische Ergänzung meiner Dissertation.[2)] Ich darf wohl gleich für Baer ein Exemplar mit Grüssen mitschicken. Manche Krullschüler (Stern, Rückert)[3)] bleiben doch in Freiburg und promovieren mit Vorschlägen von Krull bei Loewy. Da habe ich jetzt auch etwas interessantere amtliche Tätigkeit als bloss Seminarvorträge über Versicherungsmath., kann sie auch mit meinen gruppentheoretischen Resultaten unterstützen.

Mit den besten Grüssen.
Ihr

Arnold Scholz.

Bessel–Hagen scheint nicht mehr in Berlin zu sein. Er war in der Pension Viktoria (Kurf. damm 202) und in der darüberliegenden nicht einmal mehr bekannt.

Anmerkungen zum 13.01.1930

[1] Diese wurde 1931 in Crelle [225] publiziert. Darin geht es um die Übertragung von Teilen des Satzes von Kronecker-Weber auf imaginär-quadratische Grundkörper k. Jede zyklische Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ lässt sich ja als Teilkörper eines Kompositums von zyklischen Erweiterungen realisieren, deren Diskriminanten Primzahlpotenzen sind; der Satz von Kronecker-Weber folgt, wenn man zeigen kann, dass letztere Kreiskörper sind.

Ist nun K/k eine zyklische Erweiterung von Primzahlpotenzgrad q^r, so zeigt Neiß mit algebraischen Methoden, dass es zyklische Erweiterungen K_j/k gibt, deren Relativdiskriminanten entweder gleich (1) (dies sind die unverzweigten Erweiterungen, die Neiß „Einheitskörper" nennt) oder gleich einer Primidealpotenz ist (hierfür führt Neiß den Namen „Primkörper" ein). Die Durchführung dieses Programms gelingt Neiß nur unter der Voraussetzung, dass die Idealklassengruppe von k zyklisch ist; außerdem beschränkt er sich auf Erweiterungen von ungeradem Grad.

[2] A. Scholz [S3].

[3] Walter Rückert promoviert 1931 bei Loewy mit *Zur Eliminationstheorie der Potenzreihenideale*; Stern scheint nicht promoviert zu haben.

3.24 31.01.1930, Scholz an Hasse

Freiburg, 31. Jan. 1930.

Lieber Herr Hasse!

Jetzt kann ich Ihnen mal eine Note zusenden, die Sie selbst redigiert haben. Für die Mühe, die Sie noch mit der Ausbesserung einiger Stellen hatten, meinen besten Dank! Das Freiburger mathematische Leben wird jetzt etwas interessanter, weil einige, die gerade das Staatsexamen gemacht haben, mit Dissertationsvorschlägen von Krull bewaffnet[1)] hier promovieren wollen. Es handelt sich um die Galoisschen Gruppen unendlicher Körper, was mich auch interessiert. Ich bin jetzt auch mal wieder auf die freien Gruppen gekommen und habe mir überlegt, wie ich Artin schon schrieb, dass eine freie Gruppe stets auflösbar ist, und zwar ist schon der Durchschnitt aller Kommutatorgruppen (Ableitungen): $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}', \mathfrak{G}'', \ldots \mathfrak{G}^{(n)}, \ldots) = \mathfrak{G}^{(\omega)} = \mathcal{E}$. Es hätte ja sein können, dass man von $\mathfrak{G}^{(\omega)}$ wieder noch Ableitungen bilden kann, die von $\mathfrak{G}^{(\omega)}$ verschieden. Jedenfalls kann also eine auflösbare Gruppe nichtauflösbare Faktorgruppen haben. Ob eine Gruppe eine höhere Stufe als ω haben kann, habe ich noch nicht ermittelt. Mit 'Stufe' bezeichne ich die kleinste Ordinalzahl ν, für die $\mathfrak{G}^{(\nu)} = \mathfrak{G}^{(\nu+1)}$. Dass die freien Gruppen (von $n > 1$ Erzeugenden, n endlich oder unendlich) auflösbar sind und ihre Stufe eine Potenz von ω ist, folgt auch daraus, dass die Untergruppen einer freien Gruppe selbst frei sind, was ich eigentlich merkwürdig finde. Dass sie auflösbar von der Stufe ω sind, zeige ich unabhängig davon dadurch, dass die 'Minimallänge' der Elemente von Kommutatorgruppe zu Kommutatorgruppe wächst. Kommt F. K. Schmidt auch mal wieder nach Freiburg ?

Mit den besten Grüssen.
Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 31.01.1930

[1]Vgl. den letzten Brief.

3.25 18.06.1930, Scholz an Hasse

Freiburg, 18. Juni 1930.

Lieber Herr Hasse!

Nach Ihrer neuen Heimat habe ich Ihnen noch garnicht geschrieben, was ich schon längst tun wollte. Ich danke Ihnen auch noch vielmals für die Separata, die Sie mir inzwischen gesandt haben. Ihren Vortrag[1)] über die 'moderne algebraische Methode' habe ich gerade vorher gelesen. Ich gehöre selbst zu denen, die erst geworben werden mussten, d. h. ich habe, trotzdem ich schon immer zum modernen Aufbau der Algebra neigte, mich jetzt so ganz allmählich überzeugt, dass es wirklich gut ist, bei den Vorlesungen gleich modern zu beginnen. Mir waren sogar manche Zusammenhänge und Gegenüberstellungen wie die der p–adischen und reellen Abschliessungen neu, wenn ich auch schon manches von Bewertung gehört hatte. Schur gibt diesen Überblick nicht. Ich glaube, dass Sie daher gerade zu den Anhängern der modernen Algebra gesprochen haben, die glaubten, dass man den Anfängern zuviel zumute, wenn man gleich modern beginne. Diese Meinung besitzt Schur bestimmt. Sie würde sich auch bestätigen, wenn man Schur's Tempo beibehält. — Sie wollen doch jedenfalls auch sagen, dass man sich nicht bloss den neuen *systematischen* Aufbau der Algebra aneignen soll, sondern dass man ihn von Anfang an auch so *lernen* soll. Wie man ein Gebiet am besten systematisch aufbaut, und wie man am besten in das Gebiet einführt, das ist natürlich zweierlei, und viele meinen eben, dass man zur Einführung in die Algebra die alte Methode bevorzugen soll, weil sie doch leichter verständlich und nicht so abstrakt sei. Was die leichtere Verständlichkeit betrifft, so scheint mir dies wirklich mehr Gewohnheitssache. In der Schule lernt man (auch heute noch ? zu meiner Zeit jedenfalls noch, wenn ich von den 'Extragelüsten' Herrn Neiss' absehe) in der Mathematik wie auch sonst alles quantitativ auffassen; ebenso gab es für die Schulaufgaben ein Pensum, das erledigt, gepaukt werden musste. Ein solcher Unterricht war sehr bequem, und so könnte beinah die Schulmathematik eine Philosophie der Bequemlichkeit eines Schulpaukers sein. Natürlich ist es dann für einen aus der Schule Kommenden schwer, sich sogleich umzustellen. Aber ein grosses Gebiet wie die Algebra soll er dann auch nicht gleich im 1. Semester beginnen. Es wäre wünschenswert, wenn überall, wie in Berlin, eine Einführung in die höh. Math. für 1. Semester bestünde, wo einem ganz unsystematisch Brocken aus der Math. vorgeworfen werden, wobei man lernt, logisches Schliessen und Anschauung besser zu unterscheiden als bisher, und dann vor allem sieht, was es alles für Ideen in der Mathematik gibt, dass sie

nicht so etwas Einseitiges und überhaupt an einen bestimmten Stoff gebunden ist; schliesslich noch zur Anregung der Phantasie und Bildung von Urteil. Natürlich darf dann nicht zu viel Stoff bewältigt werden. Dann ist man gleich reifer, an die grossen Gebiete heranzugehen und wird auch die Algebra lieber auf ihrem eigenen als auf fremdem Boden aufbauen sehn. Was die Abstraktheit der Methode betrifft, so hatte ich ja gerade Gelegenheit zu vergleichen: Ich bin letzte Woche in Zürich gewesen und habe Artin's Vorträge über die 'Grundlage der allg. Idealtheorie' gehört, die er mir schon kurz zu Weihnachten in Bln. skizziert hatte. Hier handelt es sich um die Loslösung des Aufbaus der Idealtheorie von der algebraischen Zahlentheorie. Man muss eben, wenn der ganze Aufbau abstrakter und einheitlicher geworden ist, viel mehr Erläuterungen, Beispiele, Anregungen geben, sodass das eigentlich Sachliche den geringeren Teil der Zeit ausmacht; dann kann man folgen. Dabei kommt man immer noch schneller vorwärts, als wenn man sich nach alter Methode an monotone Rechnungen hält. An die Rechnungen sind allerdings die Hörer i. allg. gewöhnt. Sie können das alles hintereinander so schön mitschreiben und nachrechnen, und wenn sie einmal durch einen Beweis durchgekommen sind und sich den Satz merken, denken sie, die Sache zu beherrschen. Bei der Methode, wo man andauernd Erläuterungen gibt und Hinweise macht, geht das nicht so, und wer nicht tief eindringt, wird aus dem Sattel geworfen. So war es in Berlin z. B. besonders in der Galoisschen Theorie (umgekehrt in der Invariantentheorie). Und so ist es auch zu wünschen; dann sind nicht so viel Mitläufer, die eigentlich den Kern nicht erfassen, und die Intelligenteren haben mehr davon. — Bei der allg. Idealtheorie finde ich bloss, dass sie so ganz anders aussieht als die algebraische Zahlentheorie, weil man dort fast ausschliesslich mit dem Mengenbegriff operiert, wenn man hier schon vergessen hat, dass die Ideale als Mengen definiert sind; man braucht sie eigentlich doch als ideale Zahlen, wie es ursprünglich vorgesehen war. Nur wenn sie als Modul auftreten, ist der Vorzug, sie als Mengen zu betrachten. Die algebraische Zahlentheorie erfreut sich bei den höheren Problemen doch wieder der gleichen Buntheit wie die elementare Zahlentheorie bei ihren, nur dass durch Idealtheorie vieles, was von der elementaren Zahlentheorie aus verstreut lag, gesammelt, vereinheitlicht wird. Deswegen, finde ich, kann die Sucht, immer gleich die allgemeinste Theorie zu behandeln, leicht zur Übertreibung führen. Man vergisst dabei dann völlig die oft gerade sehr reizvollen, verstreut liegenden Fragen, die es besonders in der Zahlentheorie gibt. Deswegen finde ich die Abwechslung zwischen der grossen Linie des Aufbaus und den einzelnen 'Mosaiks' am günstigsten; es ermüdet auch den Mathematiker, wenn er immer nur in der einen Richtung arbeitet; nach der abstrakten Allgemeinheit muss er mal wieder zu konkreten Problemen zurückkehren, was eine gewisse Entspannung gibt; sonst renkt er sich den Hals aus wie bei stundenlanger Betrachtung eines gotischen Doms; und wenn man zulange einzelne konkrete Probleme verfolgt hat, kommt einem das wie Kleinkram vor und man braucht mal wieder eine Anspannung durch grossartige Allgemeinheit. Das, was nur

vermieden werden soll, ist der Aufbau einer weittragenden Theorie aus lauter einzelnen, inhomogenen Bestandteilen, an denen man sich nicht genugtun kann (Baustil: fin de siècle).

Ich beschäftige mich in letzter Zeit hauptsächlich mit Mengenlehre. Zermelo hat ja jetzt einen neuen Aufbau der Mengenbereiche, ist glücklich davon abgekommen, ein Generalmodell für die Mengentheorie zu begründen; sondern die Mengenbereiche schachteln sich ineinander wie die Abschnitte der Ordinalzahlreihe. Ebenso war es ein Fehlgriff der meisten Axiomatiker, von *einem* Grundelement (Nullmenge oder sonst was) auszugehn und dadurch den Bereich zu 'monomorphisieren' (Automorphismen auszuschalten), sondern man muss, um die Allgemeinheit nicht einzuschränken, variabel lassen, welches und wieviel Elemente sind, die nicht wieder Mengen von anderen sind. Heut (20. 6.) haben wir wieder unsere Übungen über die Grundlagen der Math., besprechen jetzt die Finslersche Arbeit, die Baer schon kritisiert hatte.

Kommen Sie nach Königsberg[2)] ? Ich fahre Ende Juli ab Hamburg nach Drontheim mit Dampfer, halte mich den August über in Skandinavien auf und fahre dann zum Kongress, verbringe den Rest des September in Berlin.

Mit freundlichem Gruss an Sie und Ihre Frau Gemahlin.

Ihr

Arnold Scholz.

Die Arbeit aus der Heidelbg. Ak. ist also meine Habilitationsschrift, die ich Ihnen bruchstückweise in Halle vorgetragen habe. Ist eigentlich Strassmann in Marburg, oder wo ist er jetzt ? Ich hätte ihm auch wieder Separata geschickt, wenn ich wüsste wohin. Worin arbeitet Plessner eigentlich ? Ich kenne ihn nur aus Ihrer Separataversendungsliste.

Anmerkungen zum 18.06.1930

[1]Hasse hatte 1929 auf der DMV-Tagung in Prag einen Vortrag über „Die moderne algebraische Methode“ gehalten, der dann im Jahresbericht [118] publiziert wurde.

[2]Scholz traf in Königsberg neben Hasse auch Olga Taussky, die dort zwei Vorträge hielt.

3.26 12.10.1930, Scholz an Hasse

Freiburg, 12. X. 30.

Lieber Herr Hasse!

Glücklich wieder in Freiburg gelandet. Den Pfad zur Klassenkörpertheorie wieder gefunden. Furtwängler hatte schon Angst um mein 'Seelenheil', wie mir Frl. Taussky erzählte, als er das Königsberger Programm mit meinen mengentheoretischen Ankündigungen sah. Indessen habe ich noch festgestellt, dass der Körper $\sqrt{-4027}$ wirklich so artig ist, dass in K_{19} schliesslich $\mathfrak{p}_{17}$ Hauptideal wird; also Primidealzerfall→Hauptidealisierung: $17 \to 29$; $29 \to 13$; $13 \to 19$; $19 \to 17$, wie es sich für einen wohlerzogenen Bürger gehört: jeder lässt den Vorteil einem andern, und jeder kommt ran. Dagegen führt der Körper $\sqrt{-3299}$ schon ein wahres Bohèmeleben: als kleinster Körper mit zwei Basisklassen erlaubt er sich erst einmal gleich einen Klassentypus $(3, 9)$. Vor allem werden in den zyklischen Unterkörpern 9ten Grades des Klassenkörpers niemals Idealklassen 9ter Ordnung zu Hauptidealen, sondern immer dieselbe Untergruppe $(3, 3)$ der Klassengruppe. Die Idealklassen werden durch die reduzierten Formen repräsentiert:

	(1, 1, 825)	♡♢♣♠	(27, ±7, 31)
♡	(3, ±1, 275)	♣	(13, ±9, 65)
	(5, ±1, 165)	♢	(15, ±11, 57)
♢	(11, ±1, 75)	♠	(19, ±11, 45)
	(15, ±1, 55)		(17, ±13, 51)
	(25, ±1, 33)	♢	(23, ±17, 39)
	(9, ±7, 93)		(29, ±23, 33)

$$D = -3299.$$

Die vier Unterkörper 3ten Grades des Klassenkörpers von $\sqrt{-3299}$ sind bestimmt durch die Gleichungen:

Gleichung			
$x^3 + 2x + 11 = 0$	♢	zerfällt	♢ 23 wird Hauptideal
$x^3 - 16x + 27 = 0$	♡	〃	♢ 23 wird Hauptideal
$x^3 - 13x - 112 = 0$	♣	〃	♢ 23 wird Hauptideal
$x^3 - 19x - 94 = 0$	♠	〃	♢ (15, 11, 57) wird H.ideal

Der erste der vier Körper ist dadurch vor den andern ausgezeichnet, dass in ihm die Primideale der durch $\diamondsuit$ gekennzeichneten Klassen der Ordnung 3 zerfallen. Er ist *der* kubische Unterkörper der zykl. Körper 9ten Grades, die im Klassenkörper vorkommen. Soll in einem solchen Körper 9ten Grades wirklich eine zykl. Untergruppe 9ter Ordnung der Klassengruppe von $\sqrt{-3299}$ hauptidealisieren, so muss dies im Körper $\diamondsuit$ die 3te–Potenz–Klasse: $(27, \pm 7, 31)$ tun. Es tut dies aber die Klasse $(23, \pm 17, 39)$. Dieselbe Klasse in den Körpern $\heartsuit$ und $\clubsuit$. Noch eine andere: $(15, \pm 11, 57)$ in $\spadesuit$. Verrückter konnte es doch nicht kommen! Von den vier $\diamondsuit$–Klassen, die als Hauptideale in den vier kubischen Körpern in Betracht kommt, wird die ausgezeichnete 3te Potenzklasse in keinem kubischen Körper Hauptideal, eine nichtausgezeichnete wird im ausgezeichneten Körper und noch zwei nichtausgezeichneten Hauptideal, und der übrigbleibende gruppentheoretisch nicht ausgezeichnete kubische Körper zeichnet sich hauptidealistisch von den andern aus, indem er noch eine andere Klasse hauptidealisiert. Wie bunt muss da also die Gruppe $\mathfrak{G}$ des zweiten Klassenkörpers aussehen! Es kann schon keiner der $\diamondsuit$–Klassen durch einen Automorphismus von $\mathfrak{G}$ in eine andere (als höchstens ihre inverse) übergehen; also keine $\diamondsuit$–Untergruppe in eine andre. Beim Körper $\sqrt{-4027}$ war doch wenigstens die $\mathfrak{G}$–Automorphismengruppe der vier Untergruppen transitiv! — Aber diese 'erste Liebe' $\sqrt{-4027}$ interessiert mich lange nicht mehr so sehr, seitdem ich die 'Bekanntschaft' des viel interessanteren Körpers $\sqrt{-3299}$ gemacht hab. -4027 ist mir zu harmlos. 'Mein Typ' ist jedenfalls (3, 3) oder (3, 9). Vielleicht versteige ich mich noch mal zu (9, 9). Hab aber bisher noch keinen solchen gefunden. Ebenso nicht (3, 3, 3), nach dem ich bisher vergebens suchte.[1)] Ich hab auch nochmal den Körper $\sqrt{-19427}$, Typ (3, 9), ausprobiert. Hier wird mal in dem kubischen Körper ('Potenzkörper'), der in den Körpern 9ten Grades vorkommt, die 3te Potenzklasse Hauptideal, woraus man aber noch nicht ohne weiteres umgekehrt schliessen kann, dass in den zyklischen Unterkörpern 9ten Grades ein Zyklus 9ter Ordnung hauptidealisiert. $\sqrt{-3299}$ bietet aber ein Analogon zum Artinschen[2)] $\sqrt{-65}$ vom Typ (2, 4). Vielleicht begebe ich mich noch daran, die Gruppe des zweiten Klassenkörpers von $\sqrt{-3299}$ wirklich zu bestimmen; vielleicht ist das aber auch zu schwierig. Ich will mal abwarten, was Frl. Taussky inzwischen für Ergebnisse bringt. Dachte, dass ich mit ihr zusammen vielleicht eine Arbeit machen könnte mit ausführlichen Angaben über zweite Klassenkörper und der Rechentricks, die man dabei verwenden kann. Solche konkreten Beispiele zur allgemeinen Theorie würden sich wohl mal lohnen.

Mit freundlichem Gruss an Sie und Ihre Frau Gemahlin.

Ihr

Arnold Scholz.

Zermelo lässt auch grüssen.

Anmerkungen zum 12.10.1930

[1]Quadratische Körper mit 3-Rang ≥ 3 wurden erst viel später gefunden; vgl. Shanks & Weinberger [296].

[2]Der quadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-65}\,)$ hat eine Klassengruppe vom Typ $(2,4)$ mit der Eigenschaft, dass in keiner echten Teilerweiterung des Hilbert-Klassenkörpers eine Klasse der Ordnung 4 kapituliert. Artin hatte dieses Beispiel konstruiert; vgl. den Brief von Artin an Hasse vom 18.11.1928 in [76].

3.27 01.01.1931, Scholz an Hasse

Charlottenburg, 1. I. 1931.

Lieber Herr Hasse!

Für Ihren Brief, die Geburtstag– und Weihnachtswünsche vielen Dank! Sie vermuten mich richtig in Berlin; eigentlich wollte ich Ostern erst wieder herkommen, wo ich nun stattdessen nach Südfrankreich reisen will.

Ihre Frage, ob eine Idealgruppe H, die alle Unterkörperideale ('Altideale') enthält, bei relativ zyklischem Körper invariant sein müsse, lässt sich so beantworten: nur dann kann man ohne weiteres auf die Invarianz schliessen, wenn H entweder alle Ideale enthalten muss oder nur die aus den 'Altidealen' erzeugte Gruppe ist und ähnl. trivialen Fällen. Zusammen fallen beide Möglichkeiten, wenn der Relativgrad keine Primzahlpotenz ist; nur die beiden Möglichkeiten und ähnl. triv. Fälle existieren sonst noch, wenn er eine 2–Potenz ist; für ungeraden Primzahlpotenzgrad existieren immer nichtinvariante H. Nämlich für $\mathrm{Gr}(K/k) = m$; Gruppe $\{S\}$; $S^m = E$:

1. $p|m,\ q|m$ zwei Primfaktoren. Ist $\mathfrak{j}$ irgend ein Ideal in K, so muss nach Voraussetzung $\mathfrak{j}^{\mathfrak{F}_p}$ und $\mathfrak{j}^{\mathfrak{F}_q}$ in H liegen, wobei $\mathfrak{F}_i = 1 + S + S^2 + \cdots + S^{i-1}$. Da $1 = X\mathfrak{F}_p + Y\mathfrak{F}_q$ durch Algorithmus darstellbar, gilt auch $\mathfrak{j} < H$.

2. $m = 2^\alpha$. $\mathfrak{j}^{1+S} < H$; also *wenn* $\mathfrak{j} < H$, auch $\mathfrak{j}^S$.

3. $m = \ell^\alpha$; ℓ ungerade Primzahl. $\mathfrak{j}^{\mathfrak{F}_\ell} < H$.

Über $\mathfrak{j}, \mathfrak{j}^S, \ldots, \mathfrak{j}^{S^{\ell-2}}$ kann man aber ziemlich willkürlich verfügen. Z. B.: man bestimmt eine zur absoluten Klassenzahl von K teilerfremde Primzahl p als Ordnungszahl für die Klasseneinteilung in K und eine Primzahl $q \equiv 1\ (p)$, die in K voll zerfällt. Es wird dann für ein passendes α jedes Ideal $\mathfrak{j} \equiv_p \alpha^{F(S)}$ (mod $\overline{q}$) darstellbar. $\left[q = N(\overline{q}) \text{ in } k.\right]$ Zur so definierten Hauptklasse adjungiere man ausser den 'Altidealen' noch alle α^{S^λ} $(\lambda = 1, \ldots \ell - 2)$. Die so gebildete Idealgruppe H enthält α nicht, ist also nicht invariant.

Was die Körper $\sqrt{-3299}$ und $\sqrt{-4027}$ betrifft, hab ich gestern endlich von Frl. Taussky Nachricht bekommen. Sie ist leider nicht dazu gekommen, einen Beitrag zur Struktur des zweiten Klassenkörpers zu liefern, da sie noch mit der Abfassung von andern Arbeiten beschäftigt ist. Da werde ich wohl allen meine vorläufigen Ergebnisse, vielleicht mit einer unteren Schranke für die Klassenzahl des ersten Klassenkörpers, veröffentlichen. Vielleicht kann

Frl. Taussky später noch ihre Untersuchungen über Strukturmöglichkeiten des zweiten Klassenkörpers anwenden, um die zweite Klassengruppe obiger Körper genauer zu bestimmen.

Über Schiefkörper würde ich gern mal ein hübsches zahlentheoretisches Bild gewinnen. Die allgemeine Idealtheorie der Ringe ist mir zu abstrakt, um rechten Gefallen daran zu finden. Artin glaubte ja schon mal, durch Heranziehung von Schiefkörpern die Klassenkörpertheorie auf Körper mit beliebiger Gruppe erweitern zu können. Hat Ihre jetzige Untersuchung was damit zu tun? Artin traf ich neulich bei Schur, wo er u. a. seine neuesten Ergebnisse über Teilbarkeit der L–Reihen für beliebige Zahlkörper erzählte. Bernays war auch da; er scheint der Zahlentheorie und Algebra ziemlich fremd geworden zu sein.

Hopf wird höchstwahrscheinlich Zürich vorziehen.[1] Wer sonst draufsteht, weiss ich nicht genau, jedenfalls wohl Mohrmann;[2] den wird das Ministerium wohl nicht berufen. Von einer Seite wird gesagt: nur Nichtalgebraiker. Wenn es dann noch Knopp sein sollte, den Schur auch vorgeschlagen, könnte er wohl Ruf bekommen, aber kaum annehmen. Steht dagegen doch Krull drauf, wird er wohl dann dran sein. Baer kam jedenfalls wohl nicht in Frage. Er hatte allerdings damit gerechnet, wie ich von verschiedenen Seiten gehört. Wie wär's mit F. K. Schmidt? Der kommt doch wohl auch bald dran?

Ich glaube jetzt, meine Habilitationsschrift Heidelbg. Ak. 1930 zur Konstruktion von Körpern mit zweistufiger (metabelscher) Gruppe von Primzahlpotenzgrad ausnutzen zu können.

Mit den besten Neujahrswünschen für Sie und Ihre Frau Gemahlin

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 01.01.1931

[1] Hopf erhielt 1931 Rufe an die Universitäten von Freiburg und Zürich, und hat sich in der Tat für letztere entschieden.

[2] Hans Mohrmann promovierte 1907 in München und erhielt dann einen Ruf an die Universität Gießen.

3.28 06.02.1931, Scholz an Hasse

Freiburg, 6. II. 1931.

Lieber Herr Hasse!

In meiner Zeiteinteilung ist eine solche Unordnung, dass ich erst jetzt begonnen habe, Ihren Bericht über das Reziprozitätsgesetz[1)] ausführlich zu studieren, trotzdem ich sonst bei so manchen Überlegungen veranlasst werde, mich darin zu orientieren oder die Dinge mir ins Gedächtnis zurückzurufen. Dabei bin ich auf S. 7 Satz IV auf eine formale Unstimmigkeit gestossen, auf die ich Sie gleich aufmerksam machen möchte: Die gegenseitige Invarianz–Festsetzung der Substitutionen von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ führt zu Widersprüchen, falls die Körper K_1, K_2 einen Teiler gemeinsam haben, wie nachher zugelassen. In einem solchen Falle kommt man, wenn man von *konkreten* Gruppen sprechen will, nicht umhin, den Begriff des relativen Produkts einzuführen, den ich für meine Dissertation notwendig brauchte. Nur der Begriff des 'absoluten Produkts' ist neben dem des 'direkten Produkts' ein Luxus, der rein konkrete Bedeutung hat. — Nun habe ich jetzt erst gemerkt, dass das relative Produkt zweier konkreter Gruppen stets einer Untergruppe ihres abstrakt gebildeten direkten Produkts tatsächlich isomorph ist — wie bei Ihrem Bericht dann folgt. Ich versuchte erst — meiner Neigung gemäss — ein Gegenbeispiel zu bilden, was nicht möglich und ich damit verwechselte, dass es Fälle gibt, wo die eine der beiden Komponenten des relativen Produkts keiner Untergruppe desselben isomorph ist (in nichtabelschen Fällen). — In Ihrer Darstellung ist die Untergruppe des direkten (abstrakt) Produkts, die Galoissche Gruppe des komponierten Körpers wird, dadurch charakterisiert, dass sie aus den im konkreten Sinne widerspruchsfreien Substitutionen besteht. — Man könnte aber vielleicht die 'Festsetzungen' zu Satz IV ähnlich wie die zu Satz V treffen, ohne auf den hier nicht wesentlich in die Sache eingehenden Begriff des relativen Produkts einzugehen.

Was meine sonstige Gegenbeispielssucht betrifft, so habe ich jetzt eins gefunden gegen die Furtwänglersche Vermutung, dass bei Klassengruppe $(\ell, \ell, \dots, \ell)$ die in den verschiedenen Unterkörpern ℓ^{ten} Grades des Klassenkörpers hauptidealisierenden Klassen im ganzen die Klassengruppe erzeugen. Für $\ell = 2$ bestätigt sich die Vermutung schon gruppentheoretisch. Für $\ell > 2$ haben Frl. Taussky und ich das einfachste zweistufige gruppentheoretische Gegenbeispiel: $S_1^\ell = \mathcal{E}$; $S_2^\ell = A$; $A^\ell = \mathcal{E}$; A Kommutator und zentrumserzeugend. Ordnung: ℓ^3. Für $\ell = 3$ hab ich jetzt einen Körper mit dieser 'zwei-

ten Klassengruppe': Kubischer Unterkörper der $19 \cdot 1129^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln[2)] (jede der beiden mit zus. ges. Diskriminante hat die Eigenschaft).

Sonst hab' ich mich zeitlich mit Frl. Taussky wieder geeinigt und hoffe, Ihnen etwa Anfang des S. S.[3)] unsere gemeinsame Abhandlung: '*Über die Hauptideale der kubischen Klassenkörper imaginär quadratischer Zahlkörper mit triadisch–irregulärer Diskr.*' für das Crelle–Journal einreichen zu können.

Mit Schur habe ich jetzt Korrespondenz wegen des Tschebotareff–Schreierschen Beweises der Frobeniusschen Vermutung (Ihr Bericht II S. 133). Benutzt wird im wesentl. ausser dem Tsch. schen 'Auflösungsgedanken der Abteilungen', dass die Restklassen nach einem Modul m, in denen Normen von Primidealen eines Körpers k liegen, eine Gruppe bilden. Ist Ihnen nicht auch schon aufgefallen, dass man mit diesen beiden Bemerkungen völlig auskommt; dass vor allem die Heranziehung der konjugierten Subst., der Schreiersche Satz III und die letzte Approximation ganz überflüssig sind? Ich finde, dass die Schreiersche 'Vereinfachung' manches wieder verschleiert. — Ich hatte erst den Gedanken, ohne die Gruppeigenschaft der Restklassen, mit diesbezügl. Fallunterscheidungen auszukommen, beim Beweis der Frobeniusschen Vermutung, aus der umgekehrt leicht die genannte Gruppeneigenschaft folgt. (aber auch ohne Reziprozitätsgesetz).

Mit herzlichem Gruss.

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 06.02.1931

[1]Hier geht es um den zweiten Teil des Hasseschen Klassenkörperberichts [116], dessen Publikation sich deswegen so verzögert hatte, weil Artins Beweis des Reziprozitätsgesetzes eine komplette Neubearbeitung notwendig gemacht hatte.

[2]Dieser Körper taucht im Briefwechsel mit Taussky des öfteren auf: vgl. die Briefe vom 22.06.1931, 21.04.1932, 11.04.1934 und 16.03.1937.

[3]Anfang des Sommersemesters, also etwa im April. Es hat dann letztlich aber doch zwei Jahre länger gedauert.

3.29 18.02.1931, Scholz an Hasse

Freiburg, 18. Febr. 1931.

Lieber Herr Hasse!

Für die Einladung zu dem interessanten Marburger Programm[1)] meinen besten Dank! Ich werde natürlich kommen; hab meine 7 letzten Zahlentheoriestunden schon auf 6 Tage zusammengedrängt. Gerade die inneren Eigenschaften zahlentheoretischer und gruppentheoretischer Natur werden mir die Schiefkörper vertrauter machen als bisher. Loewy wäre gern gekommen, wenn die Vorträge einige Tage später wären. Zermelo hat auch Lust zu kommen. Hoffentlich bekommt er nicht noch einen Schreck, wenn er hört, dass er schon um $^1/_2$ 7 Uhr morgens von Fbg. abfahren muss.[*)] Ich hatte die Entfernung Fbg.–Marburg sehr unterschätzt. Zermelo fragt, ob man sich vorher Quartier bestellen muss. Er meinte, es könnte vielleicht nur *ein* Hotel in Frage kommen, wie in Göttingen die Krone, wo dann alle hingehen. Aber ich denke, wenn man mittags 2 Uhr in Marburg ankommt, kann man sich doch wohl noch umsehn, und man wird doch wohl auch Auswahl haben?

Mit der Schreierschen Tschebotareff–Arbeit hab ich mich wohl etwas kurz ausgedrückt. Ich meinte: Wenn man die Gruppeneigenschaft der Kongruenzklassen und den Frobeniusschen Dichte–Satz (§24 Satz II und IV in Ihrem Bericht) heranziehen will, wie es Schreier tut, braucht man nur mit den Substitutionen selbst zu operieren, zu denen die Ideale im Oberkörper gehören. Ersetzt man dann im springenden Punkt 5. bei Schreier den Grundkörper durch den zur zykl. Gruppe $\{S\}$ gehörigen Unterkörper von $\mathfrak{K}$, wendet die Relation (2) auf S. 2 entsprechend an und setzt von vornherein $g = f$, so kann man die Seiten 3, 5, 6 der Schreierschen Arbeit einfach streichen (ebenso S. 4_{1-4} und beiden letzten Zeilen) und hat den ganzen Beweis. Ich weiss nicht, ob ich mich jetzt verständlich genug ausgedrückt habe; sonst können wir ja aber noch nächstens darüber sprechen. — Ihre Erläuterungen zu §1 Satz IV habe ich jetzt verstanden. Dadurch gewinnt das vorkommende direkte Produkt eine konkretere Bedeutung, wenn man die 'Substitutionen' so auffasst. Ich musste aber erst etwas umgewöhnen und glaube, dass Ihre Formulierung i. allg. doch missverstanden werden kann, namentlich da Sie auch von 'Elementweise–Invariantlassen der Körper' sprechen. Hingegen scheint mir jetzt doch am bequemsten, bei den Unterkp. K_1, K_2, wie schon oben, von den Faktorgruppen der Gesamtgruppe $\mathfrak{G}$ (von K) als Gal. Gr. $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ zu

[*)] Er kann auch 8 Uhr fahren; kommt dann $^1/_2$ 5 an. Will doch kommen.

sprechen. Dann hat man: $\left[\frac{K_1K_2}{\mathfrak{P}}\right] = \left[\frac{K}{\mathfrak{P}_1}\right] \cdot \left[\frac{K}{\mathfrak{P}_2}\right]$ und $\left(\frac{K_1K_2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{K_1}{\mathfrak{p}}\right) \cdot \left(\frac{K_2}{\mathfrak{p}_2}\right)$, wobei $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ den Durchschnitt der Komplexe σ_1 und σ_2 bedeutet, der gerade aus einem El. aus $\mathfrak{G}$ besteht.

Von Frl. Taussky habe ich gerade längere zweistufige Ausführungen bekommen, wonach aus der Existenz der 'Zweiggruppe' (vgl. meine Heidelbg. Ak. Abh. 1929: Reduktion der Konstr. von Körpern...) folgt, dass es ausser den Relationen: $S_i^{e_i \Delta_k} = T_{ik}^{f_i}$ und $T_{ik}^{\Delta_j} T_{kj}^{\Delta_i} T_{ji}^{\Delta_k} = E$, aus denen Furtwängler den Hauptidealsatz beweist, keine weiteren formal unabhängigen gibt, die für *jede* metabelsche Gruppe gelten. Es folgt auch, dass man die Relationen $S_j^{e_j} = \prod T_{ik}^{S_{ik}^{(j)}}$ im übrigen willkürlich ansetzen kann; es existiert immer eine metabelsche Gruppe dazu.

Mit freundlichem Gruss.

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 18.02.1931

[1] Der berühmte Marburger „Schiefkongress“: eine von Hasse und Emmy Noether organisierte Tagung Ende Februar 1931, die den Anwendung der „hyperkomplexen Systeme“ auf die Zahlentheorie gewidmet war und auf der Brauer, Deuring, Hasse und Noether ihre neuesten Ergebnisse vorstellten; vgl. [76, Brief 38].

3.30 06.03.1931, Scholz an Hasse

Freiburg, 6. III. 31.

Lieber Herr Hasse!

Vorgestern machte ich die Entdeckung, dass die (Normenrest $\longrightarrow$ Norm)–Vermutung für Abelsche Relativkörper garnicht allgemein zutrifft.[1)] Wendet man sie nämlich auf absolute Klassenkörper von Primzahlpotenzgrad an, so folgte daraus sofort nicht bloss der Hauptidealsatz, sondern noch mehr: dass im abs. Klassenkörper alle Ideale Hauptideale wären, dass es also schon keine zweistufigen Klassenkörpertürme mehr gäbe. Das gilt aber nur bei zyklischer Klassengruppe. Meine Behauptung ergibt sich nämlich so:

Es sei K/k von Primzahlpotenzgrad ℓ^h, und zwar sei K gerade der absolute ℓ–Klassenkörper von k: $K = \widetilde{k}$, d. h. zur Idealgruppe der ℓ^∞–ten Idealpotenzklassen gehörig, und es sei noch $\widetilde{K} \neq K$. (Am bequemsten nimmt man, um überhaupt ein Beispiel zu bekommen, einen Körper k, dessen Klassenzahl selbst Primzahlpotenz ist, z. B.: $\ell = 3$, Körper $\sqrt{-4027}$, der wie alle imag. quad. Zahlk. mit nichtzykl. Klgr. noch einen zweiten Klassenkp. $\widetilde{\widetilde{k}}$ besitzt. Dann braucht man auf die Ideale $\mathfrak{j}$: $\mathfrak{j}^r = (\alpha)$; $(r, \ell) = 1$ keine Rücksicht zu nehmen. Prinzipiell machen sie aber keine Schwierigkeiten.) Wegen $K = \widetilde{k}$ gilt für alle $\mathfrak{p}$: $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, wenn alle Primäridealteiler von β Hauptideale sind, insbesondere wenn $\beta = \pi$ eine Primzahl ist. Dann ist aber $\pi = N(\mathfrak{P})$ in K. Wenn aber zugleich $\pi = N(B)$, muss $\mathfrak{P}$ dem Hauptgeschlecht angehören, d. h. $\mathfrak{P} = B \prod_{S<\mathfrak{G}} \mathfrak{R}^{S-1}$ sein. (Es genügt, dass S ein erzeugendes System: $S_1, \ldots, S_m$ der Gal. Gr. $\mathfrak{G}$ von K/k durchläuft. Der Beweis hierfür[1] ist wohl bekannt[2)].) Ist aber die Klassenzahl von K durch ℓ teilbar, so kann nicht jede Klasse dem Hauptgeschlecht angehören. $\mathfrak{Q}$ sei ein Primideal ausserhalb des Hauptgeschlechtes (vom ersten Grade). Man hat $N\big(\mathfrak{Q}$ (ist Hauptideal, weil K *vollst.* Klassk.)$\big) = \beta$ ist keine Zahlnorm, aber durchgängiger Normenrest.

Ich möchte jetzt folgende Vermutung aussprechen: K/k ist dann und nur dann 'normentreu' (lässt von $\left(\dfrac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ auf $\beta = N(B)$ schliessen), wenn für jedes ℓ der Durchschnitt des ℓ–Klassenkörpers $\widetilde{K}$ von K mit dem zweiten ℓ–Klassenkörper $\widetilde{\widetilde{k}}$ von k Abelsch über k ist, insbesondere, wenn $\left[k, \widetilde{k}\right]$ zyklisch ist. Dass man nämlich wenigstens für Einheiten von

[1] Mit Pfeil auf die vorangehende Gleichung

$\left(\frac{\varepsilon, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ auf $\varepsilon = N(A)$ schliessen kann, scheint mir zu stimmen. Da hab ich zahlenmässige Anhaltpunkte. (Schrumpfung der Idealkl. gruppe und Spannung der Einh. gruppe bei Komposition zykl. Kp.) Allerdings wird das wohl gerade nicht so leicht zu beweisen sein[3] und manche zahlenmässige Abschätzungen erfordern. Dagegen wird die obige Vermutung wohl leichter zu beweisen sein, wenn man das Resultat für die Einheiten hat. Ich will es mal versuchen, wie weit ich komme.

Ich hab mich schon früher mal mit dieser Frage beschäftigt, ob alle Körper 'normentreu' sind, dann aber die Sache als fraglich aufgegeben. Vom Standpunkt der Klassenkörpertheorie im Kleinen, mit deren Lektüre ich mich jetzt gerade befasse, ist allerdings die Vermutung verlockend, weil man dann die Normentheorie im Grossen durch die im Kleinen beherrschte; aber man muss ja auch beachten, dass der Idealgruppe im Grossen: im Kleinen eine Zahlgruppe entspricht, die nicht einmal alle Einheiten enthält, wenn nicht $\overline{f} = \mathfrak{p}^{\circ}$.

Wie Sie vielleicht von Herrn Franz noch gehört haben, bin ich am Sonntag nachm. doch noch in Marburg geblieben und hab mit Zermelo und Herrn Franz einen Spaziergang nach Spiegelslust gemacht. Montag früh hatten wir ein herrliches Wetter zur Abfahrt, sodass ich ein schönes Erinnerungsbild von Marburg im Gedächtnis behalten hab. Zermelo fuhr noch auf ein paar Tage nach Jugenheim, und ich blieb nachm. 3 Stunden noch in Heidelberg, das an dem schönen Tag auch prächtig aussah, kam abends in Fbg. gerade zur 8. Sinf. von Beethoven zurecht.

Ich finde eine solche Zusammenkunft in dem Rahmen, wie Sie sie veranstaltet haben[4], wirklich sehr schön. Ich bin von ihr mit einem ordentlichen Betätigungsdrang zurückgekommen und dem Gefühl, dass die Begeisterung zur Wissenschaft doch nicht aussterben wird. Hier in Südwestdeutschland hat man bei recht vielen Leuten den Eindruck, dass für sie die Wissenschaft nur Mittel zum Zweck ist. Und die Tagungen der D. M. V. haben auch schon mehr geselligen als wissenschaftlichen Charakter. Die Vorträge folgen oft so hastig und bunt aufeinander — die algebraischen bildeten vielleicht das letzte Mal etwa eine Einheit; man musste aber auch alles schnell hintereinander aufnehmen — und man hat kaum die Möglichkeit, sich über die Dinge etwas auszusprechen. Ich möchte darum anregen, Tagungen der 'Noethergemeinschaft der Modernen Algebra' öfters zu wiederholen. Vielleicht kann Bieberbach für diese algebraischen Vorträge den letzten Tag der diesjährigen D. M. V.–Tagung reservieren. Dann könnte man die Tagung samt Aussprache für die näheren Interessenten noch etwas in die Länge ziehen. Das wäre doch ganz praktisch! Wenn Sie und Frl. Noether die Vortragsanmeldungen sammeln und zusammenstellen, hat die Veranstaltung wieder ein einheitliches Gepräge. — Sie werden sich vielleicht wundern, dass ich jetzt schon wieder Appetit bekomme. Aber ich mache immer im voraus Pläne. Und wenn ich das nicht mache, verkomme ich hier. Ich brauche immer wieder Anregungen, damit mir die Arbeitslust nicht vergeht; schliesslich muss ich sie mir bisweilen

durch Pläne u. a. Anspannung der Phantasie verschaffen. Insofern ist es doch ganz gut, wenn man an einem etwas zurückgezogenerem Orte lebt (sich wie eine 'schlanke Tanne entwickelt', wie Sie mir damals schrieben) und ab und zu mal wieder Anregungen empfängt — als wenn man, wie in Berlin, immer auf alles mögliche aufmerksam gemacht wird und dann keine Ruhe hat, sich auf eine Sache zu konzentrieren.

Ich möchte auch noch anregen, dass man sich auf der nächsten Tagung zwanglos noch einmal darüber ausspricht, wie man heute algebraische und idealtheoretische Vorlesungen am besten hält. Ich war ja auf der Prager Tagung nicht da, hab aber dann nachher Ihren Vortrag gelesen; wir wollten uns eigentlich in Königsberg noch darüber unterhalten. Frl. Noether scheint mir doch, ebenso wie Artin, das pädagogische Element zu unterschätzen, indem sie gleich systematisch auf die best–moderne und eine möglichst allgemeine Weise vorgehen will; was ungefähr voraussetzt, dass der Hörer die Vorlesung schon einmal 'unmodern' gehört hat, damit er merkt, worauf es ankommt. Ich hab mich mit Grell darüber sehr gut verstanden; er hat die Idealtheorie gerade so gelesen, wie ich sie jetzt aufbauen wollte: beginnend mit einem Versuch, die elementare Zahlentheorie auf $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-5}$ zu übertragen — nicht bloss die Primzerlegung, sondern auch das Rechnen mit Kongruenzen — wodurch die Hörer gleich auf die nötigen Erweiterungen aufmerksam werden und den Idealbegriff als etwas natürliches, zur Sache gehöriges aufnehmen; dann Artinscher Aufbau der Idealtheorie, wie er es in Zürich vorgetragen; dann erst das allgemeine Material, was man aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper braucht; schliesslich dann spezielle Idealtheorie der algebraischen Zahlkörper.

Die gemeinsame Abhandlg. mit Frl. Taussky wird sich wohl noch etwas hinausziehn. Interessant wäre es auch, die Klassenzahl des Klassenkörpers von $\sqrt{-4027}$ zu bestimmen. Frl. Taussky hatte zuletzt: $\geqq 27$. Ich hab jetzt[5)] $\geqq 3^4$. — Ich hatte mir übrigens mal überlegt, dass die Klassengruppen zweier Körper $\sqrt{D}$ und $\sqrt{-3D}$ doch in einem gewissen Zusammenhang stehen, indem die Anzahl der Basisklassen von 3–Potenz-Ordnung bei dem reellen der beiden Körper dieselbe oder, wie wohl häufiger, um eins geringer ist als beim imaginären.[6)]

Ich lege noch eine Liste von Druckfehlern bei, die ich beim Lesen Ihrer Normenrest–Arbeiten gefunden habe.

Mit herzlichem Gruss.

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 06.03.1931

[1]Hasse hatte ursprünglich vermutet, dass der Normensatz – Elemente, die überall lokale Normen sind, sind auch globale Normen – für beliebige abelsche Erweiterungen gilt. Auf dem Schiefkörperkongress in Marburg hatte Hasse den Stand der Theorie der zyklischen Algebren über Zahlkörpern beschrieben, für die der Normensatz in beliebigen zyklischen Erweiterungen ein bedeutendes Element war. Die Klassenkörpertheorie liefert damals den Normensatz aber nur für zyklische Erweiterungen von *Primzahlgrad*. In der darauffolgenden Woche gelang es Hasse nicht nur, den Normensatz für beliebige zyklische Erweiterungen zu beweisen, er fand auch ein Gegenbeispiel im Fall abelscher nichtzyklischer Erweiterungen, nämlich den Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{13})$. Am selben Tag wie Scholz, der offenbar ebenfalls angeregt vom Schiefkongress seiner „Gegenbeispielssucht" (vgl. seinen Brief vom 06.02.1931) frönte, schreibt Hasse an die Teilnehmer des Kongresses einen „Rundbrief" im Telegrammstil:

> *Liebe(r) Herr/Fräulein ... Habe soeben den fraglichen Normensatz für zyklische Relativkörper bewiesen, und mehr braucht man für die Theorie der zyklischen Divisionsalgebren nicht.*

Herbrand, der ja ebenfalls am Kongress teilgenommen hatte, bedankt sich am 11. März nicht nur für den Beweis des Satzes, sondern auch für das Gegenbeispiel im nichtzyklischen Fall. Damit gehört dieses Gegenbeispiel zum allgemeinen Normensatz zu denjenigen mathematischen Erkenntnissen, die praktisch am selben Tag unabhängig voneinander gefunden worden sind.

[2]Hier scheint Scholz einem Irrtum aufgesessen zu sein: in der klassischen Klassenkörpertheorie wird das Hauptgeschlecht nur für zyklische Erweiterungen K/k studiert und ist definiert als der Kern der Normabbildung von der Klassengruppe von K auf die von k; im unverzweigten Fall ist dies nach Furtwängler genau $\mathrm{Cl}(K)^{1-\sigma}$, wo σ die Galoisgruppe von K/k erzeugt. Im vorliegenden Fall ist das Produkt aller Klassen $c^{1-\sigma}$ enthalten in $\mathrm{Cl}(K)[N]$, dem Kern der Normabbildung, was aber die ganze Klassengruppe ist, weil hier K der Klassenkörper von k ist. Insbesondere gibt es keine Klasse, die nicht im „Hauptgeschlecht" liegt, es sei denn, Scholz versteht etwas ganz anderes darunter.

[3]Die Vermutung, dass Einheiten schon Normen sind, wenn sie nur Normenreste sind, ist falsch; später hat Scholz zahlreiche Beispiele für „Einheitsknoten" konstruiert.

[4]Scholz meint den Marburger Schiefkongress, den er kurz davor besucht hatte.

[5]Die Abschätzung $h \geq 3^4$ ist falsch; den Fehler bei -4027 hat Scholz erst später entdeckt (sh. den Brief vom 29.11.1931).

[6]Das ist der Scholzsche Spiegelungssatz aus [S11]. Der Behauptung Kochs in seinem Nachruf [154] auf Reichardt, dass diesen „Satz gleichzeitig und unabhängig auch A. Scholz gefunden" habe, muss also widersprochen werden: Reichardt ging erst im Herbst 1931 zu Hasse nach Marburg und promovierte bei diesem 1934.

3.31 12.03.1931, Scholz an Hasse

Freiburg, 12. III. 31.
Bayernstr. 18.

Lieber Herr Hasse!

Für Ihre beiden Normenrest–Nachrichten besten Dank![1)] Sie werden die meine, gleicher Zeit abgegangene, wohl auch inzwischen nachgesandt bekommen haben. Ihr Gegenbeispiel hab ich auch für richtig befunden; es fällt zugleich auch aus dem Rahmen der 'Normen–untreuen' Körper, den ich neulich abstecken wollte, heraus. Also ist meine im letzten Brief ausgesprochene Vermutung falsch, was das 'dann' betrifft. Das 'nur dann' wird wohl richtig sein; d. h. die 'Normenuntreue' umfasst einen weiteren Bereich von Abelschen Körpern, als ich meinte. Ich hab da an Kreiskörper erst garnicht getippt. Mir war so in Erinnerung, als hätte Herr Deuring gesagt, dass die Richtigkeit der Normenvermutung für Kreiskörper schon bewiesen sei. Vielleicht meinte er aber zyklische Kreiskörper, weil nur der zyklische Fall für die Schiefkörperbetrachtungen in Frage kam, den Sie ja jetzt erledigt haben. — Jetzt scheint mir die Sache etwa so zu liegen:

Ein Abelscher Körper K/k ist dann Normen–untreu, wenn der absolute Klassenkörper $\overline{K}$ von K einen Unterkörper K' von Primzahlpotenzgrad besitzt, dessen maximaler (über k) Abelscher Unterkörper k' in K enthalten ist (d. h.: k' ist der betr. Primzahlpot. grad–Bestandteil von K), der aber selbst nicht–Abelsch ist, also $K' \neq k'$.

Unter diesen Fall fällt nicht bloss mein, sondern auch Ihr Beispiel. Jedenfalls kann ich, wenn das obige auch wieder nur eine Vermutung ist, Ihr Beispiel unter einen ziemlich allgemeinen Typ einordnen, für den die Sache genauso liegt wie bei Ihrem Beispiel von 'Untreue'.

Ich will beim rationalen Grundkörper bleiben. Als Oberkörper K nehme ich dann einen Körper $P(\sqrt{p}, \sqrt{q})$; $p \equiv q \equiv 1 \ (4)$, $|p|, |q|$ Primzahlen; K gerade Klassenzahl (Ihr Beispiel: $\begin{cases} p = -3 \\ q = 13 \end{cases}$) oder K als Abelschen Körper vom Typ (ℓ, ℓ): $K = K_p^\ell \cdot K_q^\ell$, $p \equiv q \equiv 1 \ (\ell)$, Primz. p und q gegenseitige ℓ^{te} Potenzreste, damit die Klassenzahl von K durch ℓ teilb. Jetzt nehme ich den Körper $P(\sqrt{pq})$ bzw. einen Körper K_{pq}^ℓ. Ist $\mathfrak{z}$ in diesem Körper ein Ideal ausserhalb des Hauptgeschlechts, so ist $\mathfrak{z}^{1-S}$ noch kein Hauptideal (die Klassenzahl von K_{pq}^ℓ durch ℓ^2 teilbar; für $P(\sqrt{pq})$ ist sogar der ganze 2–Klassenkörper von $P(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ zyklisch über $P(\sqrt{pq})$.).

Wählt man $\mathfrak{z}$ als Primideal und aus der Klasse $\{\mathfrak{z}\}^{S-1}$ ein weiteres Primideal $\mathfrak{d}$, so wird $\mathfrak{z}^{1-S}\mathfrak{d} = (\mathfrak{D})$ Hauptideal. Nun ist $N(\mathfrak{D}) = N(\mathfrak{d}) = t$ eine Primzahl, die [$\not\equiv$][2)] in K Idealnorm wird, weil $\mathfrak{d}$ dem Hauptgeschlecht in K^{ℓ}_{pq} angehört. Daher wird auch z. B. in K^{ℓ}_{p}: $t = N(\mathfrak{t}) = N(\tau)$, wo τ eventuell gebrochen. t ist also durchgängiger Normenrest in K. Aber keine Zahlnorm: folgt wie in Ihrem Beispiel: dass in $\theta\omega^{1-S} = (\mathfrak{z}\omega)^{1-S}\mathfrak{d}$ immer $\mathfrak{z}\omega$ durch ein Primideal ausserhalb des Hauptgeschlechts teilbar wäre. Für welches dann $\theta\omega^{1-S}$ kein Normenrest wäre.

Beim Studium der Klassenkörpertheorie im Kleinen bin ich in ein Dilemma geraten und muss Ihren Beistand anrufen. Ich wollte einen Satz aus dem Grossen ins Kleine übertragen, den ich den „absoluten Abgrenzungssatz“ nennen möchte, und der im Grossen so lautet: „Die einem Zahlkörper K'/k mod m zugeordnete Idealgruppe in k ist die Idealgruppe des grössten in K' enthaltenen Klassenkörpers mod m über k.“

Folgt übrigens sofort aus Ihrem Satz 2 „über relativ–Gal. Zahlk. . . .“ M. Z. **31**, S. 563, und schliesst den „Verschärften Abgrenzungssatz“ ein; lässt sich aber offenbar ebensowenig wie Ihr Satz 2 auf p–adische Klassenkörper übertragen.[*)] Dass im Kleinen die Idealgruppe durch eine Zahlgruppe ersetzt ist, würde an sich noch nichts machen. Das Merkwürdige aber ist, dass man im Kleinen bei beliebigem Relativkörper garnicht erst mit ‘zugeord. Zahlgruppe mod $\mathfrak{p}^r$’ zu operieren braucht, weil für genügend hohes $\mathfrak{p}^r$ schon der ganze Strahl Norm wird. — Wie aber verträgt sich das mit dem Existenzsatz? Danach könnten sich die Nichtabelschen Körper von den Abelschen in der Gestalt der zugeordneten Zahlgruppe nur dadurch unterscheiden, dass bei den Nichtabelschen die Zahlgruppe nur aus $\mathfrak{p}$–teilerfremden besteht, was absurd klingt — oder sie unterscheiden sich einfach nicht, und der Eindeutigkeitssatz gilt nur unter Abelschen Körpern. Auf den letzten Fall stosse ich z. B., wenn ich zum dyadischen Grundbereich $\sqrt[3]{2}$ adjungiere. $\overline{P}(\sqrt[3]{2})$ ist kein Galoisscher Körper. 2 ist schon Norm — und überhaupt jede Zahl! Achso, jetzt hab’ ich’s! Der absolute Abgrenzungssatz gilt doch! Und zwar in folgender frappanten Form: ‘Die einem $\wp$–adischen Zahlkörper $\overline{K}'/\overline{k}$ zugeordnete Zahlgruppe ist zugleich die Zahlgruppe des grössten in ihm enthaltenen Abelschen Körpers (über $\overline{k}'$).[1]’ Und der Eindeutigkeitssatz bezieht sich nur auf die Abelschen Bestandteile der verglichenen Körper, d. h. $H(\overline{K}_1) = H(\overline{K}_2)$ gilt dann und nur dann, wenn der maximale Abelsche Unterkörper bei $\overline{K}_1$ und $\overline{K}_2$ derselbe ist.

Meine Behauptung, die ich jetzt mache, folgt nämlich aus der Gültigkeit des ‘Absoluten Abgrenzungssatzes’ für algebraische Zahlkörper, wenn man den Grenzkörpersatz $\overline{8.}$ anwendet (Numerierung nach F. K. Schmidt): D. h. ich will diese Improvisation lieber verschieben; gebe dann bald wieder Nachricht, wenn ich’s ordentlich beisammen hab. Für den obigen Körper $\overline{P}(\sqrt[3]{2})$

---

*) vgl. weiter unten.

1 nicht eindeutig lesbar.

folgt die Behauptung, dass mit 2 auch jede Zahl Norm wird, daraus, dass für $P(\sqrt[3]{2})$ die Einteilung der Normen mod 2^r nichts liefert (Index = 1). Den absoluten Abgrenzungssatz lohnt sich besonders für absolut Abelsche Körper (über P) herauszuheben, wo man ja nicht einmal den Existenzsatz der Klassenkörpertheorie braucht, sondern nur die Frobeniusschen Mittel. Dies wollte ich eigentlich mit der Vereinfachung von Schreier–Tschebotareff verbinden. Ich will mal sehen, wie sich das macht.

Eine Bemerkung, die ich noch zu Ihrem Satz 2 in M. Z. **31**, S. 563 machen wollte, muss ich mit der Beantwortung der ausstehenden Fragen auf das nächste Mal verschieben, damit der Brief noch mit der Nachtpost mitgeht.

Wollte aber wenigstens noch auf einen Druckfehler in Ihrem Bericht II S. 41_{14}: $\alpha \equiv_{(m)} \alpha'$ $\underline{\text{mod}\ m}$ statt $\underline{\text{mod}\ \mathfrak{m}}$ aufmerksam machen.

Bis 18. März bin ich hier noch erreichbar. Sonst

bis	26./27. III.	Arles	poste restante.
〃	29./30. III.	Marseille	poste restante.
〃	4. IV.	Menton (franz. Riviera)	11. IV. wieder zurück.

Mit den besten Grüssen.

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 12.03.1931

[1]Hasse hatte wohl den Scholzschen Brief zum Anlass genommen, selbst über die Sache nachzudenken. In der Tat hatte Scholz in der richtigen Ecke gesucht, und man kann sich in der Tat Gegenbeispiele zum Normensatz verschaffen, indem man mit dem Hauptgeschlecht argumentiert. Hasse hatte noch am 7.03.1931, am Tag nach Scholz' letztem Brief, eine Note aufgesetzt (nämlich [119]), in welcher er das auch Scholz mitgeteilte Gegenbeispiel $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{13})$ zum Normensatz in nichtzyklischen Erweiterungen brachte. Vgl. auch [148].

[2]Vermutlich hat Scholz das Zeichen $\equiv$ durchgestrichen und nicht $\not\equiv$ gemeint.

3.32 27.03.1931, Scholz an Hasse

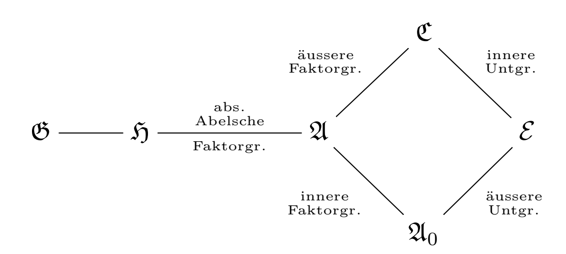
Remoulins–Pont du Gard, 27. III. 31.

Lieber Herr Hasse!

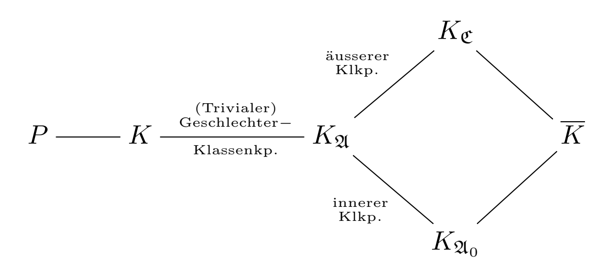
Hier sitze ich in einem 'Café' in Remoulins in Gesellschaft zweier Leitern und einiger mit Stühlen bedeckter Tische. Passende Gelegenheit zum Schreiben. Für Ihre letzte Nachricht nach Freiburg vielen Dank, und besonders auch für die Photographien vom Schiefkörperkongress! Ich finde, die Emmi sieht so aus, als ob sie gerade einen Boxkampf mit Grell eröffnen wollte.

Beim Versuch, die normenuntreuen Körper von den normentreuen[1)] zu scheiden, hab ich mir jetzt mal überlegt, ob die Tschebotareffsche Einteilung der 'elementaren Teilklassenkörper' mit meiner Zerspaltung der metabelschen Gruppen (H. Ak. Ber. **1929**)[2)] korrespondiert und gefunden, dass zwar kein direkter, aber immerhin ziemlich enger Zusammenhang besteht: Beschränken wir uns auf den gemeinsamen Ausgangsfall: Absolute Klassenkörper $\overline{K}$ von Kreiskörpern K. Da sieht nach meiner Einteilung die Sache so aus:

Gruppen:



Körper:



$\mathfrak{H}$	Gruppe von $\overline{K}/K$ (Idealkgr.)
$\mathfrak{A}$	Kommutatorgr. von $\mathfrak{H}$
$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{C}$	die charakterist. Zerspaltung der zweistuf. (metab.) Gr. (vgl. meine Arbeit), nach der $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_0$ direktes Produkt zweistuf. Gr. von Primz. potenzgrad ist.

Bezeichne ich diese drei Typen von Klassengruppen: äussere, innere, triviale mit A, B, C, so korrespondieren sie mit den Tschebotareffschen Typen I, II, III, IV (mitten in der Tsch. schen Abhdlg auf einer rechten Seite, §3(?) definiert) so:

A	$\rightarrow$	I oder II = I $\times$ 0
B	$\rightarrow$	III oder I
C	$\rightarrow$	IV
$C^\cap A$	$\rightarrow$	$C \times A$ (nicht elementar)
$C^\cap B$	$\rightarrow$	III oder I (wie B)

Dabei bedeute das Zeichen $^\cap$: Aufeinandersetzen und 0 einen Unterkörper des gegebenen Kreiskörpers. Um nochmal zu erklären, was Tschebotareff unter 'elementaren Teilklassenkörpern' versteht:

Gegeben ein Galoisscher Körper K und ein unverzweigter Galoisscher Klassenkörper darüber. Diesen zerlege man solange in ein Produkt *kleinerer* Galoisscher (K enthaltender) Körper, bis es nicht mehr geht. Die zuletzt bleibenden (ziemlich willkürlich entstandenen) Komponenten heissen die 'elem. Tlklkp.' Wenn er unter III und IV auch 'nicht notwendig elementare' Teilklassenkörper zulässt, so ist dabei wohl an solche gedacht, die sich zwar auch nicht mehr zerlegen lassen im obigen Sinne, selbst aber zu niedrig sind, um als Komponenten einer Darstellung wie oben in Betracht zu kommen. So z. B. könnte der Fall ($B\,I$) eintreten (Beispiele kenne ich nicht!). Dann gäbs aber immer Unterkörper vom Typ $B\,III$, und für jeden kleinsten gilt: $\mathfrak{M} > \mathfrak{H}$ (Bezeichnungen vgl. Tschebotareff; ich möchte das Kompositum $\mathfrak{M}$ der Trägheitsgruppen als die 'Masse' bezeichnen), im extremen Gegensatz zu A, wo $\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$. Merkwürdig ist für den Fall A die Abspaltung eines Kreiskörperbestandteils: $K = K' \times 0$; II = I $\times$ 0, wennn II

noch über K' Abelsch ist. (Woraus ohne weiteres $C^\cap A = C \times A$ folgt.) Das bedeutet, dass bei einer Kreiskörpererweiterung die alte äussere Klassengruppe erhalten bleibt in ihrem Umfang, mögen noch andere äussere Bestandteile hinzutreten oder nicht. Das könnte sich, wenn wir von K' zu $K > K'$ übergehen, so äussern, dass der der äusseren Klassengruppe von K' korrespondierende Klassengruppenbestandteil von K sich durch dieselben Ideale wie bei K' (also durch Ideale aus K') repräsentieren lässt, oder es tritt ein 'Generationswechsel' ein (indem die alten Ideale Hauptideale werden), bei der jede alte Idealklasse nur einen 'Nachkommen' erzeugt, sodass $C'(K') = N\big(C(K)\big) : C' \leftrightarrow C$. Das erste tritt nur dann ein, wenn die Gradzahl von K/K' zur Klassenzahl von K' prim ist. Ist z. B. K' ein quadratischer Körper mit der *Klassenzahl* 3*, so genügt die Adjunktion eines beliebigen kubischen Kreiskörpers, um die Ideale des quadratischen Körpers zu Hauptidealen zu machen.*[3)] Entsprechend in andern Fällen. Diese Tatsache vergesse ich immer wieder, obwohl sie unmittelbar aus dem Begriff der äusseren Faktorgruppe ('Ringfaktoren' in meiner Arbeit) folgt.

Den Tschebotareffschen Typen II, III, IV sind also meine Typen A, B, C eindeutig zugeordnet (wenn man hier $C^\cap B$ von B nicht unterscheidet, was auch nach der Tsch. schen Einteilung keine Bedeutung hätte, wohl aber gerade für die Frage der Normentreue.) Der Fall I (Tsch.) ist an sich noch ziemlich indifferent, aber charaktischer für A. Im ganzen ist die Richtung I $\to$ IV, A $\to$ C die der stärkeren Gesetzmässigkeit: Die äussere Klassengruppe erscheint als ziemlich zufällig; man kann i. allg. über sie nichts weiter aussagen, als dass sich in ihr die Automorphismen des Körpers darstellen lassen.

Anders sieht die Sache aus, wenn man einen absolut Galoisschen Körper hat und ihn als relativ Abelschen Körper betrachten kann, z. B. K sei ein Gal. K., $\overline{K}$ sein Klassenkörper, und nun betrachte man Teilklassenkörper von $\overline{\overline{K}}/\overline{K}$. Nach Tsch. fallen sie natürlich i. allg. unter I oder II wegen relativer Unverzweigtheit, $\overline{K}/K$ aber unter meinen Typ B, weil $\overline{\overline{K}}/\overline{K}$ innerer Klassenkörper, wenn man Primzahlpotenzgrad betrachtet. — Aber es sind ja auch die beiden Kategorien: 'Zweite Klassenkörper vom Grad ℓ^h' und 'Klassenkörper von Kreiskörpern vom Grad ℓ^h' so verschieden in ihrer körpertheoretischen Bedeutg. (was sich ausserdem noch in der Struktur ihrer zweistufigen Gruppen ausdrückt), sodass man vielleicht hoffen kann, durch Kombination Tschebotaröws und meiner Einteilung eine brauchbare Übersicht über die ' relativ–zweistufigen Körper' zu bekommen. Z. B. war Ihr Beispiel für normenuntreue Körper vom Typ $B\,III$, meins vom Typ $B\,II$. Meine letzte Behauptung ging auf Existenz von 'Teilklassenkörpern Typ B' als Kriterium für Normenuntreue. Für Typ B lässt sich überhaupt immer Ihre Methode anwenden. Bleibt zu untersuchen, wie es mit den andern Typen steht. Reiner Typ A wird sicher normentreu sein. Wegen Typ $C^\cap B$ möchte ich keine Wette abschliessen.

Für Ihre Hinweise auf die C. R.–Noten[4] von Chevalley vielen Dank! Die Schreier–Vereinfachung im Zusammenhang mit dem 'absoluten Abgrenzungssatz' für Kreiskörper wollte ja Schur in die Bln. Ak. Ber. aufnehmen.[5] Ich schicke sie aber nach Ausarbeitung gern Ihnen zuerst zu, falls Sie dann noch einige Hinweise machen wollten.

Meine Reise ist bisher sehr schön verlaufen; erst jetzt an der Riviera ist schlecht Wetter [*]. (Den Brief hab ich nämlich in Nîmes und Arles weitergeschrieben und beende ihn jetzt in Nizza am 2. IV.). In Avignon–Villeneuve, eine ganz alte, guterhaltene Stadt in wunderschöner Landschaft, war ich 6 Tage, hab dann die römischen Stätten zwischen Avignon und Marseille besucht und bin gestern nach Beaulieu bei Nizza von dort gefahren, wo ich etwa 8 Tage bleiben will. Menton will ich nur mal mit Monte Carlo zusammen besuchen. Beaulieu ist schön abgeschlossen; man kann auch etwas ruhig dort arbeiten.

— Eine Zermelo'sche Offenheit muss ich Ihnen übrigens noch erzählen: Fragte ihn Loewy: 'So, Sie wollen auch nach Marburg ? Was machen Sie denn da ?' (auch schon sehr höflich). Darauf Zermelo: 'Nun, wenn man in einer wissenschaftlichen Wüste lebt, möchte man auch mal eine Oase besuchen'. Schön gesagt, nicht ?

Ein frohes Osterfest wünscht Ihnen und Ihrer Frau Gemahlin

Ihr

Arnold Scholz.

---

[*] es wird noch ein schöner Abend.

Anmerkungen zum 27.03.1931

[1]In der Scholzschen Terminologie bezeichnet dies normale Erweiterungen, in denen der Hassesche Normensatz gilt. Die hier begonnen Untersuchungen werden letztlich zu den beiden Scholzschen Arbeiten [S19, S25] führen, in denen gezeigt wird, dass die Gruppe der lokalen modulo den globalen Normen in der galoisschen Erweiterung L/K ein Quotient des Schurmultipikators der Galoisgruppe von L/K ist. Tate hat dieses Ergebnis in kohomologischer Form wiederentdeckt (sh. [315]), und Jehne [147] hat die Scholzschen Resultate in verständlicher Sprache aufbereitet und erweitert. Nach der Jehneschen Wiederbelebung wurden die Scholzschen Knoten in der Folge u.A. von Steckel [304], Steinke [306], Heider [128], Lorenz [178], Opolka [238], Tan [313], Fujita [80], K. Horie & M. Horie [140] untersucht.

[2]A. Scholz [S3]. Die erwähnte Arbeit Tschebotareffs ist [317], die nicht arg viel lesbarer geschrieben ist als der Großteil der Scholzschen Arbeiten.

[3]Dieser „Satz“ ist falsch. Das Verhalten der Idealklassengruppe in Komposita von quadratischen und zyklischen kubischen Zahlkörpern scheint ziemlich irregulär zu sein. Untersuchungen über „abelsche Kapitulation“ wurden von Gras [103] und Bosca [32] durchgeführt; daneben gibt es in dieser Richtung noch eine interessante Arbeit von Ennola, Mäki & Turunen [73].

[4]Chevalley hat 1930 zwei Arbeiten in den Comptes Rendus veröffentlicht: [53] über lokale Klassenkörpertheorie und [54] über Normenreste.

[5]Im Brief vom 6.03.31 schreibt Scholz, dass er mit Schur über den Tschebotareff–Schreierschen Beweis der „Frobeniusschen Vermutung“ (der Dichtigkeitssatz von Tschebotareff) korrespondiere. Der entsprechende Artikel [S10] erschien dann 1931 in den Sitzungsberichten Berlin.

3.33 25./27.04.1931, Scholz an Hasse

Freiburg, $\frac{25.}{27.}$ April 1931.

Lieber Herr Hasse!

Sie müssen sich nun schon seit 10 Tagen Ihren Hörern wieder widmen, während ich hier noch in Ruhe für mich arbeiten kann. Für Ihren Brief vom 10. April vielen Dank! Ich habe gerade an Tschebotaröw einen 10 Seiten langen Brief geschrieben. Wollte ihm schon von der Reise aus schreiben, hatte auch seine Adresse bei mir, aber nicht seine Crelle–Arbeit, ohne die ich ihm sicher manches 'mitgeteilt' hätte, was schon in seiner Arbeit drinsteht. Aus Ihren Mitteilungen über Ihre letzten Schiefkörper–Untersuchungen kann ich mir doch ein ganz schönes, wenn auch nicht sehr deutliches Bild machen. Schliesslich verfolgen Sie jetzt das Ziel, das Artin 1928 hatte: durch passende schiefe Erweiterung des Grundkörpers die Klassenkörpertheorie auf Nicht–Abelsche Körper zu übertragen, denen man anscheinend durch die Normenresttheorie viel näher kommt. Ich finde überhaupt, dass Ihr Normenrestsymbol alles viel plastischer erscheinen lässt als das Hilbertsche; man muss sich nur dort an die neue Definition gewöhnen. — Was hat man eigentlich für einen Grund anzunehmen, dass jede einfache Algebra mit algebraischem Zentrum zyklisch ist?

Die Chevalleyschen Noten hab ich mir inzwischen angesehen; die erste Note ist es, die ich meinte: sie bringt die Gültigkeit des Satzes 2 Ihrer Abhandlung: 'Ein Satz über relativ Galoissche Zahlkörper ...', Math. Ztschr. **31** auch für p–adische Zahlkörper. Ich möchte diesen Satz nach Ihrem 'Verlagerungs'begriff den 'Verlagerungssatz'[1] der Klassenkörper nennen. Da also der Verlagerungssatz auch für p–adische Klassenkörper gilt, gilt für sie auch der absolute 'Abgrenzungssatz', und es bestätigt sich meine damals ausgesprochene Vermutung, dass die Gruppe der Relativ–Zahlnormen eines p–adischen Körpers $\overline{K}/\overline{k}$ dieselbe ist wie für seinen maximalen Abelschen Unterkörper.

Ich will das unten noch näher ausführen, zuerst aber einmal auf die 'Bemerkung' zu sprechen kommen, die ich damals noch zum 'Verlagerungssatz' der Klassenkörpertheorie im Grossen machen wollte. Ich kann es jetzt noch kürzer sagen: er lässt sich direkt aus der Weberschen[2] Definition des Klassenkörpers ableiten, was doch schon den Vorteil hat, dass man nicht erst den Index der zugeordneten Idealgruppe festzustellen braucht wie bei der Takagischen[3] Definition. — Es sei also $\overline{K}$ Klassenkörper über K zur Gruppe H, K' eine Erweiterung von K. Die Ideale in K', deren K–Normen

in H liegen, bilden eine Idealgruppe H', die sich sicher nach dem Führer von H erklären lässt. Es wird behauptet: $\overline{K}' = K'\overline{K}$ ist Klassenkörper zu H'. Nach der Weberschen Definition braucht man sich nur um die Primideale 1. Grades zu kümmern. Man kann darum ansetzen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_K &= N_K^{K'}(\mathfrak{p}_{K'}) = N_K^{K'}\, N_{K'}^{\overline{K}'}(\mathfrak{p}_{\overline{K}'}) \\ &= N_K^{\overline{K}}(\mathfrak{p}_{\overline{K}}) = N_K^{\overline{K}}\, N_{\overline{K}}^{\overline{K}'}(\mathfrak{p}_{\overline{K}'})\ . \end{aligned}$$

I) Ist $\mathfrak{p}_{K'}$ ein Primideal ersten Grades in K', welches in $\overline{K}'$ voll zerfällt, so gilt dasselbe für seine K–Norm $\mathfrak{p}_K$, dass es in $\overline{K}$ voll zerfällt; denn aus der Gültigkeit der oberen Zeile folgt die der unteren. (Verzweigte Primideale schliesse man aus.) $N(H') = H$ ist also notwendige Bedingung.

II) Auch hinreichend, was hier die Hauptsache ist: aus den vorderen Hälften der Gleichungen, $\mathfrak{p}_K$ Norm in K' und $\overline{K}$, folgt auch Totalnormeigsch.

Ich erinnere mich daran, dass ich den Verlagerungssatz damals auch verwandt habe, als wir unsere gemeinsame Note vorbereiteten; jetzt weiss ich es auch: es war bei der 'Reduktion 3.', die wir dann ja gestrichen haben. Dort war dann in der hiesigen Terminologie $K' = K(\zeta_\ell)$. Damals musste ich aus methodischen Gründen natürlich von der Takagischen Definition ausgehn, und aus Ihrem Brief vom 25. V. 27. entnehme ich, dass ich zuerst eine unbrauchbare Fassung für den Beweis wählte, die den Satz von der arithmetischen Progression heranzog; aus Ihrem Brief vom 17. VIII. 27., dass meine neue Fassung vom 6. VII. 27. immerhin so lang ist, dass sich schliesslich unsere beiden Herleitungen der Reduktion 3. etwa die Wage halten. Danach müsste aber mein dortiger Beweis des Verlagerungssatzes — wenn ich ihn wirklich vollständig ausgeführt und nicht, wie üblich, manche 'selbstverständliche' Zwischenüberlegungen ausgelassen habe — entschieden kürzer sein als Ihr Beweis Math. Z. **31**, S. 563. Auf den Satz 1 der Note, auf den sich dieser Beweis stützt, scheint mir, haben Sie in der Note wohl den Hauptwert gelegt. — Vielleicht haben Sie noch meinen Brief vom 6. VII. 27, um vergleichen zu können. Ich finde es jetzt eigentlich doch schade, dass wir damals meinen Beweis von Reduktion 3. nicht mit veröffentlicht haben; es hätte sich doch so gut angeschlossen!

Aus dem 'Verlagerungssatz' ergibt sich nun der 'absolute Abgrenzungssatz', dass die zugeordnete Idealgruppe eines Körpers gleich der seines maximalen Abelschen Unterkörpers ist, unmittelbar so:[4)]

Angenommen, K/k sei der maximale Abelsche Unterkörper von K'/k, Klassenkörper zur Idealgruppe H in K mit dem Führer $\mathfrak{f}$. H' sei die K' zugeordnete Idealgruppe mod m in k, wo $f|m$. Dann gilt $H' \leqq H$. Gälte nun $H' < H$, so bestimme man den Klassenkörper $\overline{K} > K$ zu H'. Nun ist dann $K'\overline{K}$ Klassenkörper über K' zu einer Idealgruppe H'', deren Normen in K in H' liegen. Da dies aber alle Normen tun, so besteht H'' aus allen Idealen von K'. Also Grad $(K'\overline{K}/K') = 1 : \overline{K} < K'$. — Da nun bei der

Klassenkörpertheorie im Kleinen die zugeordnete (Ideal–)Zahlgruppe nur aus Normen besteht, so bedeutet hier der abs. Abgrenzungssatz, dass eine Zahl aus $\overline{k}$ dann und nur dann Norm einer Zahl aus $\overline{K}' > \overline{k}$ ist, wenn sie Norm einer Zahl des maximalen Abelschen Unterkörpers $\overline{K}$ von $\overline{K}'/\overline{k}$ ist. (Ich hoffe, dass ich die Analogie zwischen Klassenkörpertheorie im Grossen und Kleinen im Augenblick richtig im Kopf hab.)

Loewy will im Seminar auch den neuen Beweis von der Basis der Abelschen Gruppe in der Franzschen Fassung vortragen lassen. Das ist doch die Note, die Herr Franz beim Schiefkörper–Kongress verteilte. Ich habe damals kein Separatum erwischt. Vielleicht kann mir Herr Franz noch eins schicken und, wenn er noch viel hat, auch Loewy oder dem Seminar eins. Ich hab mir neulich den Beweis in der Univ.–Bibl. angesehen; finde ihn an einer Stelle zu kurz und missverständlich; es müsste da zu Anfang gesagt werden: Man stelle ein erzeugendes System: $A_1, A_2, \dots A_r$ auf, für das das *Maximum* der in Relationen: $A_1^{x_1} A_2^{x_2} \cdots A_\kappa^{x_\kappa} = \varepsilon\,;\ A_\mu^{r_\mu} \neq \varepsilon$ auftretenden Erzeugenden–Anzahl minimal ist. So wie es dasteht, denkt man eher an das Minimum.

Mit den besten Grüssen Freiburg $\longrightarrow$ Marburg.

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 25./27.04.1931

[1]Hasse benutzte in seinen Vorlesungen den Namen *Verschiebungssatz*.

[2]Eine normale Erweiterung K/k heißt nach Weber Klassenkörper zu einer modulo $\mathfrak{m}$ erklärten Idealgruppe H, wenn von den nicht in $\mathfrak{m}$ aufgehenden Primidealen vom Grad 1 genau diejenigen aus H in K voll zerfallen.

[3]Eine normale Erweiterung K/k vom Grad n heißt nach Takagi Klassenkörper zu einer modulo $\mathfrak{m}$ erklärten Idealgruppe H, die K/k zugeordnete Idealgruppe $H_\mathfrak{m}$ gleich H ist und ihr Index $h_\mathfrak{m} = n$ ist.

[4]Auch diesen Beweis hat Hasse in seine Marburger Vorlesungen [Satz 104] über Klassenkörpertheorie aufgenommen.

3.34 05.05.1931, Scholz an Hasse

Freiburg, 5. Mai 31.

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihren Brief vom 30. April! Ich werde Ihrem Rate folgen in der Zusammenstellung einer Note aus den 'drei Vereinfachungen'. Es passt so sehr gut zusammen, und evtl. kann ich auch noch die elementare Deutung hinzufügen, die Schur in dieser Sache haben wollte.

Inzwischen sende ich Ihnen eine andere Note zu, deren Inhalt ich schon einmal erwähnt habe (vgl. den Satz auf S. 3.) Der Satz ist an sich so einfach zu beweisen; man braucht nur ein Minimum von Klassenkörpertheorie auf kubische Körper anzuwenden, wie Sie in Ihrer Note, die ich hier unter 2) zitiert habe — sodass ich schon glaubte, er müsste bekannt sein; hab' aber nichts gefunden. Ich fand nur in Ihrer Abhandlung über kubische Zahlkörper einen Hinweis, dass eine zweite Note folgen sollte, die auch den kubischen Körper über dem biquadratischen betrachtet,[1)] wie ich es hier tue.[2)] Ihnen ist der Satz nicht bekannt?[3)]

Wollen Sie die Note, die ich Ihnen hier sende,[4)] und die vorzubereitende 'Vereinfachungs'–Note,[5)] die bald folgen soll, ins Crelle–Journal aufnehmen? Oder soll ich die eine an Schur schicken, zum Ersatz für die verpfuschte, die ich Schur erst für die Berliner Akademie sandte? In dem Rahmen, in dem ich jetzt die 'Vereinfachungsnote' abfassen will, entspricht sie allerdings kaum mehr der ursprünglichen Schur'schen Idee, eine besonders elementare Darstellung herauszubringen (die Sache war eben nicht ganz so harmlos.). Vielleicht würde Schur die hier fertiggestellte für die Sitzungsberichte gefallen.

So schnell ich diese Arbeit aufgesetzt habe, machten mir nachher die Zitate doch Schwierigkeiten. So wollte ich unter 1) glatt Herglotz[6)] zitieren, obwohl er garnicht, wie ich jetzt sehe, den Satz für die 'akzessorische' Idealklassengruppe[7)] hat, wie sie bei Pollaczek[8)] heisst, sondern nur für die Einheitengruppe und dann die Klassenzahlformeln benutzt (vgl. Math. Z. **12**, S. 255–261). Bei Pollaczek, den ich hier im Notfall zitiere, ist das auch nicht deutlich hervorgehoben. Vielleicht komme ich in Verbindung mit anderem dazu, die Tatsachen Idealklassen und Einheitengruppe bei Komposition betreffend, noch einmal in den Heidelbg. Sitzb. passend zusammenzustellen. Das geht ja dort schnell, und dann könnte ich mein Zitat einfügen in dieser Note. — Das Zitat 4) hab' ich noch freigelassen. Ich hab' die Geschichte mit den 'singulären Primärzahlen' noch aus der Furtwängler–Vorlesung in

Erinnerung, weiss garnicht, ob man heute noch 'singulär' sagt.[9)] Sie brauchen in Ihrem Zahlbericht nur 'primär' als Bezeichnung und verweisen in der hier in Frage kommenden Sache auf Hilbert's Zahlbericht. Kann man den hier direkt zitieren ?

Mit Doetsch bin ich vorläufig sehr zufrieden. Er ist persönlich sehr nett und collegial[10)] und von einer wissenschaftlichen Vitalität, wenn er auch wohl nicht so produktiv ist. Er wird allerdings wohl die Algebra etwas zurückdrängen wollen. Loewy hat jetzt die Instituts–Direktion (!) übernommen. Ich weiss nicht, wie das werden soll.

Mit den besten Grüssen.

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 05.05.1931

[1]Hasse schreibt am Ende der Einleitung zu [117]:

> *Ich beschränke die folgenden arithmetischen Untersuchungen auf die Erzeugung der kubischen Zahlkörper durch Abelsche Körper über einem quadratischen Zahlkörper. Was ihre Erzeugung durch Radikalkörper über einem biquadratischen Zahlkörper (Cardanische Formel!) betrifft, so mag deren arithmetische Untersuchung vom Standpunkt der Klassenkörpertheorie einer späteren Gelegenheit vorbehalten bleiben.*

Diese Arbeit ist dann später von Reichardt [259] erledigt worden.

Hasses Arbeit wurde in der Folge auf weitere nichtabelsche Erweiterungen ausgedehnt; vgl. insbesondere Porusch [252], Rosenblüth [273], sowie Bergström [25]. Die Arbeit von Porusch wurde von Steckel [305] auf beliebige Frobeniuserweiterungen (solche, deren Galoisgruppe eine Frobeniusgruppe ist) verallgemeinert.

[2]Ist $K/\mathbb{Q}$ eine nicht-normale kubische Erweiterung mit Diskriminante d, so ist deren normaler Abschluss durch das Kompositum $L = Kk$ gegeben, wo $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$ ein quadratischer Körper ist. Dann ist L/k zyklisch, und zur Anwendung der Kummertheorie hat man noch $\sqrt{-3}$ zu adjungieren, falls K nicht gerade ein rein kubischer Zahlkörper und damit bereits $\sqrt{-3} \in L$ ist. Will man Kummer- und Klassenkörpertheorie gleichzeitig anwenden, hat man also den kubischen Körper über der biquadratischen Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-3}\,)$ zu betrachten. Dies führt dann zwangsläufig auf den Scholzschen Spiegelungssatz, wonach der 3-Rang der Klassengruppen von $\mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}\,)$ sich um höchstens 1 unterscheiden. Berwick hat in seiner Arbeit [27] Spezialfälle davon erahnt: dort konstruiert er z.B. kubische Körper mit Diskriminant p durch Rechnungen in der Klassengruppe von $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-3p}\,)$; da er mit der Klassenkörpertheorie nicht vertraut war, hat er nicht sehen können, dass diese kubischen Körper zu unverzweigten zyklischen Erweiterungen von $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p}\,)$ werden und damit den 3-Rang der Klassengruppe von F bestimmen. Unter Zuhilfenahme dieser Beobachtung kann man aus Berwicks Resultaten den Scholzschen Spiegelungssatz in den Fällen ablesen, wo der 3-Rang von k gleich 0 oder 1 ist.

[3]Der eben genannte „Scholzsche Spiegelungssatz“; die Bezeichnung „Spiegelungssatz“ stammt von Leopoldt, der das Scholzsche Ergebnis in [175] verallgemeinert.

[4]A. Scholz [S11].

[5]Damit ist die spätere Arbeit [S10] über Abgrenzungssätze gemeint.

[6]Herglotz hat in [131] die Dirichletsche Klassenzahlformel von biquadratischen auf multiquadratische Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ verallgemeinert.

[7]Damit ist die Untergruppe aller Idealklassen mit zu ℓ teilerfremder Ordnung gemeint.

[8]Pollaczek, wie Scholz ein Student von Issai Schur, untersuchte in [250], angeregt durch die oben erwähnte Arbeit von Herglotz, die Struktur der Einheitengruppe abelscher Erweiterungen.

[9]Bei Hilbert und Furtwängler waren singuläre Zahlen (in bezug auf eine fest gewählte Primzahl ℓ) Zahlen α des betrachteten Zahlkörpers, für die das Hauptideal (α) eine ℓ-te Idealpotenz ist. Enthält K eine primitive ℓ-te Einheitswurzel ζ und ist ω singulär und primär (also kongruent einer ℓ-ten Potenz modulo $\ell(1-\zeta)$, so ist $K(\sqrt[\ell]{\omega})/K$ eine zyklische unverzweigte Erweiterung. Singuläre Zahlen spielten aus diesem Grund eine tragende Rolle bei der Konstruktion des Hilbertklassenkörpers. In den letzten Jahren hat H. Cohen für die Gruppe der singulären Zahlen (modulo ℓten Potenzen) den Namen Selmergruppe vorgeschlagen, da diese das zahlentheoretische Äquivalent der aus der Theorie der elliptischen Kurven bekannten Gruppe gleichen Namens ist.

[10]Nach der Machtergreifung der Nationalsozialisten war es damit vorbei. Doetsch war anscheinend in jungen Jahren in der Friedensbewegung aktiv, gebärdete sich aber nach 1933 als linientreuer Nationalsozialist.

Gustav Doetsch wurde am 29.11.1892 in Köln geboren, machte in Frankfurt das Abitur und studierte, unterbrochen von seinem Dienst als Kriegsfreiwilliger von 1914-1918, meist in Göttingen, wo er 1920 bei Landau promovierte. 1922 erhielt er einen Lehrauftrag in Halle, 1924 eine Professur an der TH Stuttgart; 1931 kam er als Nachfolger Heffters nach Freiburg. Nach dem Krieg wurde er für 5 Jahre von seiner Professur suspendiert, und zwar nicht wegen politischer, sondern wegen „charakterlicher Fehler“ (Remmert [268, p. 82]). Im Jahre 1951 wurde er in seine Professur wieder eingesetzt und blieb bis zu seiner Emeritierung 1961 an der Universität Freiburg. Gestorben ist Doetsch am 9.6.1977 in Freiburg.

Volker Peckhaus schreibt in [244] über Zermelo:

> *Da er sich zudem nicht auf einer Wellenlänge mit dem neuen nationalsozialistischen Zeitgeist bewegte (hierin unterschied er sich von Becker), kam es wohl insbesondere zu Konflikten mit Lothar Heffters Nachfolger Gustav Doetsch, dem nationalsozialistischen Hardliner unter den Freiburger Mathematikern, der, wie sich Arnold Scholz gegenüber Zermelo ausdrückte, „die Wissenschaft terrorisiert“. Die Denunziation durch den Doetschschen Assistenten Eugen Schlotter führte letztendlich zur Entlassung Zermelos.*

Das Scholz-Zitat stammt aus einem Brief von Scholz an Zermelo vom 9.2.1935 (UA Freiburg, C 129/104). Nach Peckhaus geriet Scholz auch in Kiel „wegen seiner politischen Indifferenz in das Schußfeld nationalsozialistischer Studentenvertreter“.

In seiner Autobiographie [126, S. 160–161] schreibt Heffter, dass Doetsch, „ein hervorragender Forscher“, durch seine Einwirkung nach Freiburg gekommen sei, und ihn bis zu seinem [Heffters] Abschied 1936 „mit Hochachtung behandelt“ habe. Später habe sich sein Benehmen gegenüber ihm vollkommen geändert.

In einem Brief an seine Schwestern vom 19.04.1935 [72, S. 299-300] schreibt Zermelo zu seiner Denunzation:

Ich weiß aber auch, woher der Wind weht und wer mir diese Suppe eingebrockt hat: ein mißgünstiger Kollege, der es verstanden hat, den Mangel an wissenschaftlicher Begabung durch besonders üble Charaktereigenschaften zu kompensieren und sich eine Stellung zu erschleichen, die ihm nicht zukam.

3.35 15.05.1931, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) Freiburg i. Br., Bayernstr. 18.

15. V. 31.

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihre Antwort und die Annahme[1] der kubischen Note [*] und die Zitaten–Ergänzung! Auch Ihre Einfügung ist mir sehr lieb; denn ich möchte, dass meine Arbeiten mal wirklich lesbar werden und will keine Zwischenüberlegungen überschlagen. Die andere Note, die ich also Schur für die Bln. Akademie einreichen werde[2] — ich hab' ihm schon geschrieben — hab' ich vorige Woche gleich begonnen. Es macht sich jetzt wirklich sehr gut so, und ich kann auch das dabei hervorkehren, was Schur damals wollte. — Aber ich will gerade die Frobeniussche Abhandlg. als Ausgangspkt. für alles nehmen, auch für die Reduktion 3. Warum finden Sie das kein 'adaequates' Hilfsmittel? Die Benutzung des *Tschebot.* Satzes wäre schlecht, weil der Primidealsatz viel schweres Kaliber ist. — Bei Sapolski[3] hab' ich nachgesehen: es sind vier Beispiele für $r = 1$ mit $s = 0$ und eins mit $s = 1$ und $r = 1$ angegeben,[4] mit allen Einzelheiten, Klassenkörpern und sogar Klassenzahl des korrespondierenden Körper durchgeführt, sodass jeder vernünftige Mensch mit ihrem Material auf mein Resultat gekommen wäre. Sie aber nicht.[5] Und Hilbert kennt die Arbeit wahrscheinlich gar nicht. — Ich hab' hier meinen früheren Quinta–Lehrer wieder kennengelernt: den Altphilologen Fraenkel, der jetzt aus Kiel hierhergekommen. Kennen Sie ihn? — Doetsch und Zermelo vertragen sich gut — D. hält sich überhaupt mehr an die Jüngeren. — In den Übungen schrieb neulich jemand: 'Diese Methode könnte man *ad absurdum* fortführen'. — Meine Separatensendung an Ulbrich und Franz ist doch im Seminar angekommen? Sandte sie damals gleichzeitig mit der Anfrage wegen der Note von Herrn Franz.

Herzlichen Gruss.

Ihr

Arnold Scholz.

---

[*] trage ich gleich im Colloquium vor.

Anmerkungen zum 15.05.1931

[1]Die Arbeit erschien 1932 als [S11].

[2]Gemeint ist wieder die Scholzsche Arbeit über die Abgrenzungssätze der Klassenkörpertheorie.

[3]Ljubowj Sapolsky wurde am 7. August 1871 in St. Petersburg geboren, und kam 1895 nach Göttingen. Ihre Dissertation [274] wurde von Hilbert betreut, der aber damals die Zahlentheorie bereits hinter sich gelassen hatte und vermutlich nur noch wenig Interesse an Sapolskys Ergebnissen hatte.

[4]Der Scholzsche Spiegelungssatz sagt, dass für den 3-Rang s der Idealklassengruppe des reellquadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$ und dem entsprechenden 3-Rang r für den imaginär-quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-3d}\,)$ die Ungleichungen $0 \leq r - s \leq 1$ gelten.

[5]Mit „Sie" ist hier, wie man am vorhergehenden klein geschriebenen „ihren" erkennen kann, Sapolsky und nicht Hasse gemeint. Zwei Jahre später hat Reichardt [259] die kubischen Körper vom Standpunkt der Kummertheorie aus untersucht und durch Vergleich mit Hasses Arbeit natürlich das Scholzsche Resultat wiedergefunden.

3.36 05.06.1931, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) Freiburg i. Br., Bayernstr. 18.

5. VI. 31.

Lieber Herr Hasse!

In den Pfingstferien ist meine 'Abgrenzungs–Arbeit' soweit gediehen, dass ich wohl nächste Woche damit fertig werde. Schur wollte sie recht bald für die Akademie haben. Ihnen wollte ich sie aber ja auch noch mal zuschicken, da Sie mich vielleicht noch auf einiges in der Darstellg. und Zitierung aufmerksam machen könnten. Ist es nun besser, dass ich's zuerst Schur schicke, und Ihnen dann vielleicht die Korrektur erst sende? Oder wollten Sie's lieber zuerst sehen? — 2) Was halten Sie von der 'Strahlidealsatz'–Arbeit[1] des Takagischülers Iyanaga (?), die Sie mir u. a. freundlicherweise nachsandten? Ich wollte die Geschichte auch mal untersuchen und war erst überrascht, dass ein bisher noch nicht bekannter Japaner das gelöst hat. Aber ich kann aus den Ausführungen noch nicht ersehn, ob er den angekündigten Satz wirklich bew. hat. Die Anordnung u. komplizierten Rechnungen erschweren das. — 3) Von Tschebotaröw hab' ich inzwischen zwei Briefe über die 'Gemeinsamkeit unserer Ziele'. Er gab mir jetzt auch das Zitat von Värmon: Klassenzahl Abelscher Kp., Arkiv för Mat. **22**, N^{O} 13, wo auch seine Diss. zitiert ist.[2] Ich kann jetzt noch nicht sehn, was drin steht. Sicher aber hat er auch u. a. mein Resultat: Heid. Ak. **1930**, Punkt 7 (S. 52 ff.) Seine Arb. war aber damals noch nicht vorh. — Vielleicht korrespondiere ich gelegentl. auch mal mit Värmon. — 4) Bei meinen Fortschr.–Referaten hat der Setzer 'Klassen**w**ahlfaktor' gedruckt (auch wieder 'Komm**en**tator')

Mit freundlichem Gruss.

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 05.06.1931

[1]S. Iyanaga [144].

[2]Sh. Värmon [322] und [323]. Die Värmonsche Dissertation enthält viele Ergebnisse über die Struktur der Einheitengruppe von Komposita abelscher Erweiterungen und deren algorithmische Bestimmung, die später vor allem von Kubota, Kuroda und Wada (vgl. die Literaturangaben in [164]) wiederentdeckt wurden.

3.37 27.06.1931, Scholz an Hasse

Freiburg, 27. VI. 31.

Lieber Herr Hasse!

Soeben habe ich beiliegende Korrekturen[1)] erhalten. Ich glaube, es wird kaum mehr was zu bemerken sein; aber ich schicke sie Ihnen doch lieber noch zu, damit ich etwaige Wünsche Ihrerseits noch berücksichtigen kann. Die Reduktion 3. hoffe ich jetzt so abgefasst zu haben, dass es Ihnen gefällt. Das Absteigen in Primzahlgraden war wirklich überflüssig; ich hatte die Tatsache der Kreiskörpererweiterung noch nicht genügend ausgenutzt. — Gegen die Bezeichnung '$\boldsymbol{p}$–adische Klk.' ist wohl nichts einzuwenden? Man könnte zwar daraufhin denken, es handle sich nur um den absoluten Fall, wo p Primzahl = Primideal ist, statt $\mathfrak{p}$ oder $\wp$, wie Sie jetzt schreiben. Denn eigentlich müsste man für die p–ad. Körper eine *stehende* Bezeichnung haben, die unabh. von dem jeweiligen $\mathfrak{p}$ ist. Insofern bin ich ganz einverstanden, dass der Setzer ein Antiqua–p gesetzt hat. Besser wäre dann schon freilich 'peadisch' zu schreiben. Wenn Sie aber meinen, meine Bezeichnungsweise ist nicht irreführend, lasse ich p–adisch stehn.

Ich glaube, Sie werden die Korrekturen schnell durchblättern können; anscheinend will Schur die Sache zu Z.'s 60. Geburtstag noch herausbringen. Habe nämlich innerhalb 8 Tagen die Korrektur bekommen. Sende Ihnen darum den zweiten Korrekturabzug umgehend zu; die Druckfehler, die ich inzwischen gefunden, vermerke ich mir dann noch selber in dem Exemplar, um dessen baldige Rücksendung mit Ihren Bemerkungen ich Sie bitte.

Der Witt'sche Beweis für die Kommutativität endlicher Schiefkörper[2)] hat mir auch sehr gefallen. Da ich bisher noch keinen Beweis zu Gesicht bekommen hatte, kann ich mir auch garnicht denken, wie man's anders beweisen sollte. Loewy hat es auch sehr interessiert. Denn Herr Witt hat in seinem 1. Semester in Fbg. studiert und bei Loewy Diffgl. gehört.

Mit bestem Dank im voraus — verwenden Sie aber, bitte, nicht zu viel Mühe daran —

und vielen herzlichen Grüssen

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 27.06.1931

[1]Es geht um die Scholzsche Abgrenzungsarbeit [S10].

[2]E. Witt [342]. Witt gehörte wie Teichmüller zu den begabten Nachwuchsmathematikern, die dem Nationalsozialismus sehr nahe standen. F.K. Schmidt berichtet, nachdem die Studenten in Göttingen Landau an der Abhaltung seiner Vorlesung gehindert hatten, Hasse von diesem Vorfall und schreibt dabei:

> *Aber sobald man im Gespräch auf die Frage der jüdischen Dozenten kommt, – was ich keineswegs vermieden sondern mehrmals absichtlich herbeigeführt habe – so wird eine Verständigung unmöglich. Herr Witt – (SA-Mann) – sagte mir, daß die Studenten an ihrer Ablehnung der jüdischen Dozenten auch dann festhalten würden, wenn die Regierung entgegen den früheren Lehren der Partei eine gewisse Milde walten lasse. Er halte es für völlig ausgeschlossen, daß man das Wiedererscheinen von Landau, noch mehr aber von Courant, je wieder dulden werde.*

3.38 12.07.1931, Scholz an Hasse

Freiburg, 12. Juli 1931.

Lieber Herr Hasse!

Herzlichen Dank für die eingehende Durchsicht meiner Korrekturen! Einige Druckfehler hatte ich doch noch übersehn. Besonders froh bin ich, dass Sie mich noch auf Chevalleys Formulierung des p–adischen Abgrenzungssatzes aufmerksam gemacht haben. Sie befindet sich am Ende der *ersten* Note, angegeben als unmittelbare Folge des p–adischen Verlagerungssatzes. Es stört aber im übrigen meine jetzige Darstellung nicht, da Ch. den Beweis in der C.–R.–Note natürlich nicht durchgeführt hat (weil er eben fast trivial ist), was ich jetzt hier, der Intension meiner Note gemäss, die ja auf keine Originalität Anspruch macht, tun musste. So konnte ich einfach ein Zitat von Ch. einfügen. Es wäre mir bei einem Ausländer, der schon geringere Möglichkeit, sich über die vorhandene Klassenkörper–Literatur zu orientieren, hat, besonders peinlich gewesen, wenn ich das übersehen hätte. Ich sende übrigens die Note nochmal mit, damit Sie sehen können, wie ich's verbessert hab. Da ich bei Ihrer Schlussbemerkung nicht wusste, wie weit die Dinge schon in der Publikation sind, habe ich Ihre Bemerkg. wörtlich so angefügt. Es macht ja nichts, dass sie sich eigentlich bloss auf den Zerlegungssatz bezieht. — Ihre Bemerkung auf S. 8 trifft aber nicht zu: Artin hat merkwürdigerweise garnicht an einen Abgrenzungssatz gedacht; das sehen Sie deutlich daran, wie das Kapitel 2 seiner 'Idealklassen in Oberkörpern' abgefasst ist. Er ist garnicht darauf gekommen, dass seine dort eingeführte 'zugehörige Idealgruppe' dieselbe ist oder feiner als die aus Ihrem Klk. bericht 'mod $\mathfrak{m}$ zugeordnete'. Als wir Weihnachten bei Schur zusammentrafen, griff Schur die Sache wieder auf, wobei ich behauptete, es sei in Artins Reziprozitätsgesetz–Note implizite enthalten, und Schur dann meinte, dann müsse Artin es nochmal explizite veröffentlichen, worauf Artin leugnete, dass er was damit zu tun habe, und die Sache auf mich zurückfiel. — Natürlich war es Artin sofort klar, dass der Abgrenzungssatz (für Kreiskp.) aus der Klk. th. folgen müsse, als ich ihn nannte.

Die Einfügungen auf S. 10 oben machen wohl meinen Beweis jetzt klar. Es steht dann keine 'Tautologie' da; sondern die Definition von H' zeigt eben, dass das Strahlideal a in H' liegen muss, der Führer also $|\mathfrak{f}$ ist.

Dass durch die Satzstellung im zweiten Abschnitt der Dichtigkeitsbeweis **3.6** etwas unordentlich wird, gestehe ich zu. Ich werde noch, wie mir eben

einfällt, bei der zweiten Korrektur hinter dem k einen Doppelpkt. anbringen um deutlicher hervorzuheben, dass der darauffolgende 'Weil'–Satz die Konsequenz der Anwendung von [3], (2) ist, und der 'Dass'–Satz erst das Resultat hiervon. — Sonst aber ziehe ich einen begrifflichen Beweis, bei dem man auf jeder Stufe feststellen kann, wie weit man ist, einem rechnerischen 'eleganten' Beweis vor.

Zu Ihrer Bemerkung auf S. 9: Sie denken anscheinend nur an Normalkörper: der Abgrenzungssatz gilt aber für *beliebige* Relativkörper. Da alle p–adischen Körper auflösbar sind, ist natürlich ein Körper ohne Abelschen Teiler dasselbe wie ein Körper ohne Normalteiler, wie ich mich auch hätte ausdrücken können. Ein solcher Körper ist z. B. der dyadisierte kubische Körper mit der Diskriminante -44. Die Zerlegungsgruppe von 2 ist hier nämlich die symmetrische, die Trägheitsgruppe die alternierende dritten Grades. Wie man sich leicht überlegt, sind je zwei solche dyadisch–kubische Körper konjugiert.

Von Tschebotaröw hörte ich, dass Sie zu Hensels 70. Geburtstag einen Crelle–Festband herausgeben. Unter den fortlaufenden Bänden ? Es würde mich natürlich freun, wenn Sie meine kleine kubische Note, die ich Ihnen Anfang Mai einsandte, auch in diesen Band aufnähmen.

Dann wollte ich Sie immer noch eins fragen: Haben Sie Lust, Torniers 'Wahrscheinlichkeitsrechnung und Zahlentheorie', Crelle **160**, für die F. d. M. an meiner Stelle zu referieren ?[1)] Ich hatte es erst übernommen, weil ich mich darin mal näher orientieren wollte und dachte, man könnte damit manche Dichtigkeitsfragen anschneiden. Jetzt komme ich aber doch nicht dazu, und ich schicke es nicht noch gern Feigl zurück, da er bis Anfang September den Rest 1929 haben möchte. Sie werden ja den Inhalt gut kennen, dass es Ihnen keine Mühe macht.

Kommen Sie auch nach Bad Elster ? Ich werde mit meiner Schwester kommen. Ob es nicht vielleicht gut ist, sich von selbst vorher anzumelden, ehe die Physiker sich das beste vorweg nehmen ? Am praktischsten wäre es ja eigentlich, wenn man sich zu vielen zusammen im Kurhaus (oder 'Post') zur Pension anmeldet und dort immer zusammen isst. Kurhaus hat 9–16 M Pension, Post 7–11 M. Ich glaube kaum, wenn man einzeln mietet und isst, dass man sich da auf 7–10 M einrichten kann; es wird dann teurer kommen. Ob man sich nicht vielleicht im Algebraiker–Kreis auf ein Hôtel einigen kann ? Dann wären die wenigstens zusammen und könnten noch über die algebraischen Vorträge diskutieren. Was meinen Sie dazu ? Oder halten Sie es für besser, man mietet sich in Privat–Villen ein, damit man unabhängiger ist ? Mit Frl. Taussky will ich mich vor der Tagung noch im Böhmer Wald treffen, damit wir endlich mal zusammen unsere gemeinsame Note aufsetzen und Ihnen auf der Tagung feierlich überreichen können.

Nächstes Semester haben wir hier ein reiches Programm von Vorlesungen. Vielleicht interessiert es einige Studenten, das Programm der Spezial–

Vorlesungen im voraus zu wissen. Da gibt es:

Zermelo :	Mengenlehre	Di–Fr 12–1.
Doetsch :	Partielle Diffgl. d. Math. Phys.	Mo–Do 10–11.
Scholz :	{ Klassenkörpertheorie	Fr 5–7.
	Geometrie der Zahlen	Mo 11-1.
Kapferer :	Diophantische Gl.	Do 9–10.

Mit freundlichem Gruss, auch an Ihre Frau Gemahlin

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 12.07.1931

[1] Die Arbeit wurde schließlich von C. Boehm und Erika Pannwitz besprochen.

3.39 29.11.1931, Scholz an Hasse

Freiburg, 29. Nov. 1931.
Holbeinstr. 16

Lieber Herr Hasse!

Für Ihren letzten Brief vielen Dank! Also mit der Göttinger Klassenkörpertheorie–Tagung scheint es erst Ende des Semesters was zu werden, wie mir Frl. Taussky schrieb. Artin, der erst garnicht geantwortet hätte, sei durch seine Dekansgeschäfte verhindert. Schade, ich hätte nun gedacht, es würde bald nach Weihnachten angehn; Ende Februar werde ich wohl nicht wieder die weite Reise hinauf machen können.[1)]

Den Fehler bei -4027 hab ich jetzt gefunden, er lag, wie ich schon vermutete, bei dem zuletzt ausgerechneten der vier Körper. Damals teilte ich Ihnen 'beglückt' mit, dass in diesem vierten Körper wieder das zum ersten Körper gehörige Ideal Hauptideal wird und sich so der Zyklus schliesst. Seit Eisenstein war dies aber gerade der widrige Fall, und Frl. Taussky konnte das Wort 'zyklisch' schon garnicht mehr hören. Nun ergibt sich folgende Zuordnung:

$$K_{S_1} = K_{17} \to j_{29}\,;\;\; K_{S_2} = K_{29} \to j_{13}\,;\;\; K_{S_1 S_2} = K_{13} \to j_{19}\,;$$
$$\boldsymbol{K_{S_1^{-1} S_2} = K_{19} \to j_{19}}\,.$$

Gerade der Fall, der es ermöglicht, die zweite Klassengruppe eindeutig festzustellen. Es ergibt sich die zweistufige Gruppe: $\{S_1,\, S_2;\, A\}$, A Kommutator mit $\Delta_\kappa = S_\kappa - 1$

$$A^3 = A^{\Delta_1^2} = A^{\Delta_1 \Delta_2} = A^{\Delta_2^2} = \mathcal{E}\,;\;\; S_1^3 = S_2^3 = A^{\Delta_1}.$$

Der Klassenkörper von $\sqrt{-4027}$ hat also eine Klassengruppe[2)] vom Typ (3, 3, 3). Weiter ergibt sich, dass der Klassenkörperturm von $\sqrt{-4027}$ mit dem zweiten Klassenkörper abschliesst. Das ist schon eine Sterilitäts–Eigenschaft des Moduls $(3,\, \Delta_1^2,\, \Delta_1\Delta_2,\, \Delta_2^2)$, der Ordnung von A. Im Falle $S_1^3 = S_2^3 = A^{\Delta_1}$ wie in einigen anderen Fällen gilt aber noch mehr: Jeder Körper ℓ^{ten} Grades über dem zweiten Klassenkörper (dem Turm), der über dem Grundkörper normal ist, ist nicht nur rel. Abelsch über dem ersten Klassenkörper (was aus obigem schon folgte), sondern bringt sogar eine Abelsche Erweiterung des Grundkörpers mit sich.

Ich wollte Sie schon immer mal fragen, welcher Art die Artin–Herbrandschen Ergebnisse über Einheiten relativ–Abelscher Körper sind[3)]. Ich weiss nicht, ob ich Ihnen schon mal mitteilte, was ich darüber im Februar herausbekommen habe: Bildet man in allen rel. zykl. Unterkörpern ein vollst.

System von unabh. Einheiten so, dass die Einheiten der Unterkörper dieser zykl. Körper darin vorkommen, so bilden alle diese Einheiten aus den zykl. Körpern zus. genommen ein vollst. System von unabh. Einh. des rel. Ab. Körpers. Ist er vom Primzahlpotenzgrad ℓ^k, so ist die ℓ^{k-1}–te Potenz jeder Einh. des Ab. Körpers ein Produkt von Einh. der zyklischen Körper. — Überhaupt lässt sich, ähnlich wie Sie's mir seinerzeit für (ℓ, ℓ) angaben, die Produktzerlegung der Dedekindschen Klassenzahlformel

$$\lim_{s\to 1} \frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)} = \prod \frac{\varphi(p^n)}{\varphi_K(p)} = \frac{2^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \cdot h \cdot R}{\frac{w}{2} \cdot \sqrt{|D|}}$$

nach allen zykl. Unterkörpern vornehmen.

Jetzt bin ich damit beschäftigt, die Zerlegung für den Nichtabelschen Fall näher zu betrachten, die durch die irreduziblen Darstellungen der Gal. Gruppen hervorgerufen wird. Für den ζ–Quotienten, hab' ich erst kürzlich bemerkt, ist das ja durch die Artinsche L–Reihen–Arbeit 1923 erledigt, und für die Diskriminanten scheint es mir in seiner Crelle–Arbeit[4)] **(164)** durchgeführt zu sein; bin aber bisher noch nicht ganz dahintergekommen, ob die 'Führer' ganz den L–Reihen entsprechen. Es ist alles so furchtbar abstrakt ausgedrückt; kein Beispiel angegeben. — Mich interessiert hier hauptsächl., wie die Zerlegung der Klassenzahl ausfällt; auch kommen bei der Klassengruppe wie bei der Einheitengruppe die irreduziblen Darstellungen direkt zum Vorschein. Bei der Klassengruppe (und Einh. gruppe) kann man dabei entscheiden, in welchen Körpern die Klassen zuerst auftreten, und in welchen Körpern deren Normen. — Für den einfachsten Fall $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_3$ ergibt sich[*)]
$\left.\begin{array}{lcl} h_6 &=& \frac{1}{3} h_2 h_3^2 \\ R_6 &=& 3 R_2 R_3^2 \end{array}\right\}$ oder $\left\{\begin{array}{lcl} h_6 &=& h_2 h_3^2 \\ R_6 &=& R_2 R_3^2 \end{array}\right.$, für alle andern Teile der Klassenzahlformel das entsprechende Produkt mit dem Koeffizienten 1.

Mit den besten Grüssen.

Ihr

Arnold Scholz.

Das Neueste: Kapferer[5)] hat sich verlobt!

---

*) Für total reellen Fall kommt auch in Frage: $h_6 = \frac{1}{9} h_2 h_3^2$; $R_6 = 9 R_2 R_3^2$.

Anmerkungen zum 29.11.1931

[1]Artin ist dann 1932 doch noch nach Göttingen gekommen und hat dort drei Vorträge über die Klassenkörpertheorie gehalten. Eine englische Übersetzung der Vorträge kann man im Anhang von Cohns Buch [57] finden.

[2]Gemeint ist hier natürlich die 3-Klassengruppe.

[3]Artin veröffentlichte seine diesbezüglichen Ergebnisse in [9].

[4]E. Artin [8].

[5]Heinrich Kapferer, geb. am 28.10.1888 in Donaueschingen, hat in Freiburg die Schule und die Universität besucht. 1914 machte er das Staatsexamen und promovierte bei Stickelberger „Über Funktionen von Binomialkoeffizienten und ihre Anwendungen". Danach war er Lehrer, hat sich aber 1926 in Freiburg habilitiert und wurde 1932 nichtbeamteter außerordentlicher Professor in Freiburg. Seine Stelle wurde 1937 gestrichen, obwohl sich Süss und Hasse für ihn einsetzten; vermutlich hatte auch hier Doetsch seine Finger im Spiel. Bis 1941 kam Kapferer als Bibliotheksmitarbeiter an der Universität unter, dann wurde er endgültig entlassen. Gestorben ist Kapferer am 15.1.1984.

Ein hübscher Beweis Kapferers zur Unmöglichkeit, kubische nichtsinguläre Kurven zu parametrisieren, wurde in [170] präsentiert.

3.40 19.04.1932, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) 19. IV. 32.

Lieber Herr Hasse!

Auf der Hellasfahrt[1)] mit dem Hapag–Dampfer, die im ganzen sehr schön verlaufen ist, und von der ich jetzt zurückgekehrt bin, hatte ich zwar nicht viel Musse zu mathematischen Überlegungen, aber ich habe jetzt doch einen Weg gefunden, zu jeder zweistufigen Gruppe einen Körper zu bestimmen[2)]. (Es handelte sich nur noch um die Gruppen von Primzahlpotenzgrad.) Die Sache ist doch einfacher, als ich sie mir voriges Jahr dachte, und ich kann die Konstruktion so allgemein halten, dass man daraus eine ungefähre Übersicht über die Struktur aller zweistufigen Körper bekommt. Zwar operiere ich im Kreiskörper nur mit Führern, deren Primteiler dort vom Grade 1 sind, aber die andern Strahlklassenkörper sind dann auch leicht zu übersehn, wenn man diese erst einmal kennt. Ich will morgen beginnen, die Körperkonstr.–Note aufzusetzen. — Für die inzwischen gesandten Separata und die Göttinger Photo vielen Dank! Da auf dem Schiff auch viel gegähnt wurde, hat die Photo, die ich bei mir trug, vielen Anklang gefunden. Die Gesellschaft war netter, als ich erwartet hatte. Das Wetter war uns im allg. sehr günstig. In Tripolis 36°. Bin jetzt hier ganz verbrannt unter bleichen Gesichtern. In Griechenland sind wir mit den Autos öfters umgekippt.

Mit den besten Grüssen.

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 19.04.1932

[1]Die Hellasfahrt, auf der auch Zermelo dabei war, fand vom 19.04. bis zum 04.05.1932 statt.

[2]Scholz [S14, S18]

3.41 22.06.1933, Scholz an Hasse

Freiburg, 22. Juni 1933.

Lieber Herr Hasse!

Wie geht es Ihnen? Ich habe Ihnen schon sehr lange nicht mehr geschrieben. Ich wollte Ihnen vor allem schreiben, dass Frl. Taussky und ich mit unserer Note[1] ungefähr im Reinen sind, und dass sie wohl im Juli in Ihre Hände gelangen wird. Hoffentlich haben Sie jetzt nicht gerade zu viel Eingänge für's Crelle–Journal. Die Note ist noch etwas länger geworden indessen, da von allen drei Körpern $\sqrt{-3299}$, $\sqrt{-4027}$, $\sqrt{-9748}$ jetzt feststeht, dass der Klassenkörperturm nur zweistufig ist. Ausserdem hab' ich noch (ohne die Rechnung im Manuskript anzugeben) einen neuen Körper $\sqrt{-3896}$ durchgerechnet und einen neuen Kapitulationstyp erhalten, bei dem ich noch nicht weiss, ob der Klassenkörperturm mit dem zweiten endigt. Unsere Note wird wohl etwas über 30 Seiten lang sein.

Vorgestern war hier zu Loewy's 60. Geburtstag eine sehr schöne Feier. Krull hielt den Festvortrag. Die Festschrift wird demnächst versandt werden. Von Krull hörte ich, was mich sehr freut, dass Sie sich für Emmy einsetzen und Hoffnung auf Erfolg haben. Ich war zu Pfingsten in Berlin, habe dort Schur und Schmidt gesprochen, Schmidt auch besonders wegen einer Aktion für Schur. Schmidt hofft besonders Studenten zu gewinnen. Er hat, wie ich hörte, eine sehr gute Einleitungsrede zu Anfang des Semesters gehalten: zuerst vom nationalen Erfolg gesprochen und dann gesagt: 'Nur einen müssen wir leider unter uns missen' auf Schur gesprochen. Grosser Beifall. 'Ich danke Ihnen für Ihren Beifall; das nenne ich deutsche Treue für einen deutschen Mann.' Hoffentlich hat er dadurch die Studenten für Schur gewonnen. — Es wäre nun gut, dass nur für Schur und Emmy plädiert würde[2]. Leider aber ist auch eine Bittschrift für Courant in Umlauf, und das könnte die ganze Angelegenheit verwässern; denn man muss doch die, für die man spricht, als Ausnahmen hinstellen können.

Ausserdem konnte ich mit Schmidt über die Möglichkeit, nach Berlin überzusiedeln, sprechen. Es ist möglich, dass ich von dem freigewordenen Neumannschen Lehrauftrag eine Kleinigkeit abbekomme. Viel brauche ich ja nicht in Berlin, da ich dort zu Haus bin, anderseits auf mehr Kolleggelder rechnen darf. Mir liegt jetzt hauptsächlich daran, von meiner Assistententätigkeit endlich einmal frei zu werden. Ich habe jetzt mehrere Arbeiten angefangen aufzusetzen und komme nie dazu; weniger, dass ich zuviel Arbeit mit dem Korrigieren von Übungsaufgaben habe, als dass mich das überhaupt beengt. In der Note, die ich im März Frl. Noether für die Annalen schickte,

hab' ich jetzt die Zweigkörperkonstruktion für den Typ $(\ell, \ell; \ell^k)$ erledigt, also Gruppe: $S_1^\ell = S_2^\ell = A^{\ell^k} = \mathcal{E}$, wenn A der Kommutator von S_1 und S_2. Die erzeugenden Subst. wähle ich gemäss dem Tschebotarjowschen Monodromiesatz[3)] immer als Trägheitssubstitutionen. Für die Zahlentheorien der Kreiskörper erhalte ich dabei ganz merkwürdige neue Gesetze. Für $\ell = 2$ erhalte ich Entscheidungen, wann die Gl. $t^2 - Du^2 = -4$ lösbar. Z. B. für $D = pq$, wo $\left(\frac{p}{q}\right)_4 = -1$; $\left(\frac{q}{p}\right)_4 = 1$: nicht lösbar. Könnte ich auf D. M. V.–Versammlung vortragen.[4)]

Vorgestern erhielt ich Androhung einer Beleidigungsklage seitens Ringleb.[5)] Er versucht die Sache politisch aufzuziehen, dürfte ihm aber wohl kaum gelingen; denn wenn ich Studenten vorm Inst. A gewarnt habe, kann ich's ja sachlich begründen. Haben Sie sonst von jemand gehört, dass gegen ihn eine ähnliche Beleidigungsklage schwebt ? Dann wäre ich Ihnen für Mitteilung sehr dankbar. Ich kann mir eigentl. nicht denken, dass ich der einzige wäre, gegen den R. „seine Rechte wahrnähme“.

Mit herzlichem Gruss.

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 22.06.1933

[1]Die gemeinsame Arbeit [S17].

[2]Auch Loewy war, als Jude, mit Wirkung vom 12. April 1933 von den Nationalsozialisten suspendiert worden, und verlor seine Stellung endgültig am Ende des Sommersemesters. Zwei Jahre später ist er dann gestorben

[3]Ist $K/\mathbb{Q}$ eine normale Erweiterung mit Galoisgruppe G, so wird G von den Trägheitsgruppen erzeugt. Dies kann man als eine Verallgemeinerung des Satzes von Minkowski ansehen, wonach es in Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ immer verzweigte Primideale gibt.

[4]In der Arbeit [S15] leitet Scholz Lösbarkeitskriterien für die Nicht-Pellsche Gleichung $t^2 - Du^2 = -4$ her, die über frühere Ergebnisse insbesondere von Dirichlet hinausgehen. Außerdem beweist er das „Scholzsche Reziprozitätsgesetz" (Teile davon hatte bereits Schönemann entdeckt), sowie Aussagen, die später unter der Theorie der „governing fields" (Cohn & Lagarias [58], Morton [210, 211, 212, 213, 214], Stevenhagen [308]) subsumiert wurden. Die Scholzschen Ergebnisse über die Lösbarkeit von $t^2 - Du^2 = -4$ hat Rédei später verallgemeinert und zu einem gewissen Abschluss gebracht (sh. [256, 257]).

[5]Friedrich Ringleb, geb. am 18.4.1900 in Guben, studierte in Breslau und in Jena, wo er 1926 *Über die konforme Abbildung von Polygonen* promovierte. 1933 erhielt er in Jena einen unbesoldeten Lehrauftrag für mathematische Propädeutik, wo er bis auf eine Vertretungsprofessur ab Oktober 1934 in Würzburg bis zu seiner Habilitation 1939 blieb. In seiner Berufungsverhandlung hat F.K. Schmidt durchgesetzt, dass die von Ringleb besetzte Assistentenstelle nach seiner Rückkehr aus Würzburg ihm zur freien Verfügung gestellt werde. In seinem Brief an Hasse vom 2. Nov. 1934 legt er „Eine Notiz aus der Jenaer Zeitung zu Ihrer Erheiterung" bei:

> *Ehrenvoller Ruf für Dr. Ringleb. Aus Universitätskreisen wird uns geschrieben: Der langjährige Assistent und bisherige stellvertretende Vorstand der Mathematischen Anstalt, Abt. A der Universität Jena, hat, wie wir hören, einen ehrenvollen Ruf zur Vertretung einer ordentlichen Professur an die Universität Würzburg erhalten. Als hervorragender Dozent und Wissenschaftler hat Dr. Ringleb eine ungewöhnlich große Zahl von Schülern während seiner Jenaer Tätigkeit ausgebildet und durch seine wissenschaftlichen Facharbeiten, die besonders dem Gebiete der Funktionstheorie angehören, seinen Namen weit über Deutschlands Grenzen hinaus bekanntgemacht. Ueberdies ist Dr. Ringleb einer der ganz wenigen Hochschullehrer, die sich schon vor vielen Jahren zur Idee des Führers bekannten. Alle seine Kollegen und Studenten, denen es vergönnt war, Dr. Ringleb näher kennenzulernen, sehen ihn mit größter Trauer von Jena scheiden. Um so mehr aber begleiten ihn die herzlichsten Wünsche seiner Freunde, die die Hoffnung nicht aufgeben werden, daß es bald einmal unserer Thür. Regierung gelingen möge, einen solchen um die Jenaer Universität hochverdienten Mathematiker an die Alma Mater Jenensis zurückzuholen.*

1937 erschien Ringlebs Buch mit dem bezeichnenden Titel *Mathematische Methoden der Biologie, insbesondere der Vererbungslehre und der Rassenforschung* bei Teubner. Danach ging Ringleb zu Messerschmidt, und kurz nach dem Krieg wurde

er von der US Navy an die Naval Air Engineering Facility in Philadelphia gebracht, wo er bis zu seinem Tod im November 1966 (in Gloucester, NJ) arbeitete.

3.42 29.09.1933, Scholz an Hasse

Freiburg, 29. 9. 33.

Schweighofstr. 5

Lieber Herr Hasse!

Sie sind zwar sicher sehr beschäftigt; aber trotzdem darf ich Sie wohl noch einmal in der Ringlebschen Angelegenheit um Rat fragen[1)] und um baldige Antwort bitten. Der Rechtsanwalt stellt nämlich jetzt für den Vergleich noch viel unverschämtere Forderungen als bisher. Nach der Zeugenaussage in Erfurt macht er mir den Vergleichsvorschlag: nochmaliges Bedauern und Tragung der Gesamtkosten, die bei Einstellung des Verfahrens etwa 60 RM betrügen. Ich erklärte mich bereit bei Teilung des Betrages, unter der Voraussetzung, dass R. auf Vergleich eingeht. Deswegen musste ich ihn in Würzburg[2)] noch sprechen, und dies auf Wunsch des Rechtsanwalts. In Würzburg sprach ich ihn also nach Ihrer Unterredung erst am Mittwoch, und er erklärte sich einverstanden, wollte mir dann durch Rechtsanwalt Zurückziehung der Klage zuschicken, verlangte nur nochmal schriftliche Erklärung. Von den Kosten sprach er garnicht, sodass ich annehmen musste, dass er mit Teilung einverstanden ist. Nun bekomme ich jetzt vom Rechtsanwalt folgendes Schreiben:

> In der Privatklagesache des R... ist unser Herr Auftraggeber zur vergleichsweisen Erledigung der Angelegenheit bereit. Allerdings würde er nur unter folgenden Bedingungen sich vergleichen:
>
> 1.) Sie nehmen mit Bedauern die von Frl. Br. bekundeten Äusserungen zurück.
> 2.) Sie übernehmen die bisher entstandenen Kosten des Verfahrens.
>
> Die bisherigen Verfahrenskosten betragen etwa 110.– RM (!) Den Termin vom 28. 9. haben wir verlegen lassen, da R... erst jetzt nach Jena zurückgekommen ist. Wir bitten um Ihre Stellungnahme bis 1. Okt. Falls Sie auf den Vorschlag des R. nicht eingehen sollten, wird das Verfahren durchgeführt. Wir dürfen hervorheben, dass der Vergleichsvorschlag nicht etwa erfolgt, weil R. seine Position etwa ungünstig ansieht. Der Vergleichsvorschl. erfolgt nur auf Grund der zwischen Ihnen und dem Unterzeichneten stattgefundenen Besprechung anlässlich des Termins in Erfurt.
>
> Der Rechtsanwalt.

Das Ganze scheint mir eine rechte Gaunerei zu sein — erst 60; dann 110 M. Um das Letzte aus einem herauszuholen. Garnicht mit der Absicht, die Sache beizulegen. Eine Erpressung mit dem bekannten Druckmittel, die Aussagen so zu verdrehen, dass sie mir politisch schaden könnten. Beinah möchte ich daraus schliessen, dass die Sache für R. sehr schwach steht. Mir liegt aber nichts daran, die Sache auszufechten; insbesondere ist mir meine Zeit dazu zu schade, da ich im Okt viel zu arbeiten vorhabe. Ich werde mich morgen jedenfalls mal beim Gericht nach den Kostensätzen erkundigen. Ein hiesiger Jurist hat mir vorgeschlagen, 50 RM anzubieten. Nun könnte ich also das Bedauern einsenden und den Gegenvorschlag machen, dass ich 50 (oder auch 60) RM zahle. Wahrscheinlich geht er dann doch darauf ein und ist die Sache mit den 110 RM ein Bluff. Sollte er aber nun nicht darauf eingehn, so brauchte ich selbst nicht nur einen Rechtsanwalt, sondern auch massgebende Urteile über R.s mathematischen Wert und Persönlichkeit, vor allem eine Liste derer, die er schon mal gerichtlich belangt hat. (Bisher soll er ja noch kein Verfahren durchgeführt haben. Wie ich hörte, hat er auch mal Artin verklagen wollen.) Das würde dann das rechte Licht auf ihn werfen. Ob gegebenenfalls die D. M. V. zu einer solchen Aktion bereit wäre?

Ich will natürlich R. nicht absichtlich schaden; aber er müsste dann auch eben etwas mehr Einsicht haben. — Ich möchte am liebsten erst Ihre Antwort abwarten, ehe ich dem Rechtsanwalt näher antworte. Dann muss ich ihm nur vorher schreiben, dass meine endgültige Antwort erst 2 Tage später eintrifft. Der Termin ist erst auf den 12. Okt. verlegt; dann wäre noch genügend Zeit zum Vergleich.

Ob ich dann R. andeute, dass ich mich an die D. M. V. wenden würde, falls er auf meinen Vergleichsvorschlag nicht eingeht? Ich weiss ja nicht, wie Sie überhaupt darüber denken; vielleicht wollen auch die andern, die schon einmal mit R. zu tun gehabt haben, nicht mehr zitiert werden, und vielleicht ist in der D. M. V. wenig Stimmung dafür vorhanden, offiziell etwas gegen R. gegebenenfalls zu unternehmen. Ohne den Schutz der Mathematiker möchte ich allein die Sache nicht verfolgen, da man nie weiss, wie so ein zufälliges Urteil vielleicht ausfallen kann. Ich hoffe natürlich, dass R. jetzt auf meinen vernünftigen Vergleichsvorschlag eingeht.

Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie mir kurz antworten könnten, so dass ich Ihr Schreiben Montag (2. 10.) in der Hand habe.

Mit der Notgemeinschaft will ich's jetzt versuchen, da mir Doetsch mitteilte, dass es sehr unbestimmt sei, ob und wann ich in Freiburg einen Lehrauftrag (der hier auch immer klein ist) erhalten könnte. Wie mir Bieberbach sagte, muss jemand ausserhalb der Kommission einen Antrag an die Notgemeinschaft stellen. (Hier hörte ich zwar, dass man das selbst kann.) Ich dachte nun, ich könnte ja F. K. Schmidt bitten, für mich den Antrag zu stellen. — Die nötigen Personalbogen habe ich schon ausgefüllt. Sende ich diese nun gleichzeitig an die Notgemeinschaft ab, oder muss ich sie an den Antragsteller senden? Ich muss ja auch einen Arbeitsplan und meine Arbeiten

einsenden. Da ausserdem ein Zeugnis erwünscht ist, habe ich an Furtwängler geschrieben, zwar bisher noch keine Antwort[3)].

Mit den besten Grüssen und vielem Dank im voraus.

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 29.09.1933

[1]Am selben Tag schickt auch Grell einen Brief aus Jena an Hasse mit der Bitte, ihm „behilflich zu sein, aus Jena fortzukommen". Er schreibt, dass Hasse seine Meinung über das Institut A kenne, in welchem Haußner und Ringleb arbeiteten. Die Vorlesungen von König seien immer noch von „unmöglicher Beschaffenheit", vor allem deswegen, weil König sich nicht um seine Hörer kümmere. König hatte auch behauptet, dass die Gerüchte, wonach das Institut von Grell eine marxistische Zelle sei und Judenmathematik propagiere, von Haußner und Ringleb gestreut worden seien, was diese aber abstritten. König ging so weit, Veranstaltungen Grells zusammen mit Ringleb in manchen Hörsälen zu verbieten, „weil es ihm unmöglich sei, Räume zu betreten, in denen am Abend vorher Dr. R. geatmet habe".

Ein Jahr später kann sich Grell mit Hasses Hilfe nach Halle umhabilitieren.

[2]Die Jahresversammlung der DMV fand vom 18.–21. September 1933 in Würzburg statt. Scholz hielt dort einen Vortrag über die Lösbarkeit der Gleichung $t^2 - Du^2 = -4$.

[3]Wie Scholz später schreibt, ist der Brief verloren gegangen.

3.43 09.10.1933, Scholz an Hasse

Freiburg, 9. X. 33.

Lieber Herr Hasse!

Für Ihren Brief vielen herzlichen Dank! Ich kann Ihnen die erfreuliche Mitteilung machen, dass die Klage jetzt zurückgezogen ist und ich nur noch Differenzen mit dem Rechtsanwalt wegen der Höhe der Kosten habe. Wie mir der auskunftgebende Beamte des Amtsgerichts bestätigte, konnten die bisher entstandenen Gerichtskosten nur 50–60 M betragen, und er riet mir, trotzdem die Klage nach der Zeugenaussage normalerweise abgewiesen werden müsste, die dem Rechtsanwalt 'gesetzlich zustehenden' Gebühren, aber keine 'besonders mit dem Kläger vereinbarten' zu übernehmen. So habe ich nun geschrieben, und daraufhin wurde die Klage zurückgezogen; ich bekam aber eine Rechnung von 100 M zugesandt, von der 45 M unberechtigt sind. Davon 40 M für „Beweisaufnahme", die vor der Hauptverhandlung gar nicht zulässig war. — Obwohl ich also jetzt die 55 M höchstwahrscheinlich überflüssigerweise bezahle, so verliere ich doch jetzt keine Zeit mehr damit, die ich so notwendig brauche. — Wenn übrigens der Prozess weitergegangen wäre, so hätten zum Zweck des Wahrheitsbeweises sowieso Autoritäten herangezogen werden müssen. Möglicherweise wären Sie dann auch der Schweigepflicht in puncto Habilitation entbunden worden. — Sich darauf zu stützen, dass bisher schon König[1)] verklagt war, wäre ein zweifelhafter Vorteil. In Ausdrücken, die ich gebrauche, bin ich jedenfalls ein klein o(König). — Eigentlich könnte König etwas zu den Unkosten beitragen; denn in der Zeugenaussage ist sein Institut mit 'sehr gut' bezeichnet.

Das N. G.–Gesuch hab' ich an F. K. Schmidt abgeschickt. Wenn ich das Stipendium schon ab Januar bekommen könnte, wäre mir sehr lieb.

In der letzten Woche bin ich in der Untersuchung der zweistufigen Körper ein grosses Stück voran gekommen. Vor allem weiss ich jetzt, dass es immer Körper mit einer zweistufigen Gruppe $\mathfrak{G}$ gibt, wenn die maximale Abelsche Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ nur zwei Erzeugende (beliebiger Ordnung) hat. Nach meinen Reduktionen kommt das darauf hinaus, die Existenz eines Zweigkörpers K vom Typ $(\ell^{h_1}, \ell^{h_2}; \ell^k)$ zu beweisen. Ich habe jetzt sogar notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gestalt des maximalen Kreisunterkörpers von K, die schon notwendig sind für die Fortsetzbarkeit der Konstruktion überhaupt und zugleich hinreichend für ihre Vollendung:

Nehmen wir den nächstliegenden Fall, dass wir als maximalen Kreiskörper einen Körper $K^\circ = K_{p_1}^{\ell^{h_1}} \cdot K_{p_2}^{\ell^{h_2}}$ (Unterkörper angegebenen Grades der p_1^{ten} und p_2^{ten} Einheitswurzeln; p_1 und p_2 Primzahlen $\equiv 1 \bmod \ell^{h_1}, \ell^{h_2}$). Damit es überhaupt einen Nichtabelschen Normalkörper von ℓ–Potenz–Grad

gibt, der K° als maximalen Kreisunterkp. enthält, ist schon notwendig (und hinreichend), dass p_1 und p_2 gegenseitige ℓ^{te} Potenzreste sind[2)]. Und diese Bedingung ist auch schon hinreichend für die Erweiterung von K° zum Zweigkörper. — Wählt man etwas allgemeiner K° als Produkt $K_1 \cdot K_2$ mit zueinander teilerfremden Diskriminanten, so lautet die Bedingung so, dass ein Diskriminantenteiler von K_1, der Norm einer ganzen Zahl in K_1 ist, in der zu K_2 gehörigen Hauptklasse liegt, und umgekehrt. Ist eine Diskriminante durch ℓ teilbar, so tritt eine Abschwächung der Bedingung ein. — Immer lassen sich die Konstruktionen durch rein verzweigte Klassenkörper bewerkstelligen, und das ist auch wichtig für die Konstruktion von mehrstufigen Körpern. — Die jetzt gefundenen auch hinreichenden Bedingungen sind viel einfacher, als ich es erwartet hätte, und jetzt glaube ich auch bald die Konstruktion von Körpern mit beliebiger zweistufiger Gruppe zu haben. Die Bedingung wird einfach so lauten, dass je zwei zyklische Körper vom gleichen Primzahlpotenzgrad die Potenzrestbedingungen erfüllen müssen.

Meine jetzigen Ergebnisse stellen eine Vereinfachung und Erweiterung der Annalen–Note dar, die ich im März Frl. Noether eingesandt habe, und von der ich jetzt die 2. Korr. abgeschickt habe. Ich will die Fortsetzung bald aufsetzen und wieder Frl. Noether schicken. Wenn es Sie aber interessiert, den Beweis bald kennen zu lernen, schicke ich Ihnen das Manuskript zuerst zu. Der Beweis ist sehr kurz und wird ohne die vorangehende Arbeit verständlich sein. Nach dieser kommt es nur darauf an, in K° die Gültigkeit der Ungleichung[3)]:

$$r \neq \rho^{XY}\sigma^{\ell} \qquad \begin{pmatrix} X & = & S_1 - 1 \\ Y & = & S_2 - 1 \end{pmatrix}$$

zu beweisen, wo r die Norm eines Ideals $\mathfrak{r}$ der erzeugenden Idealklasse in K° ist und ρ und σ Idealpotenzen von $\mathfrak{r}$ sind. Dies hab' ich jetzt unter den genannten Voraussetzungen bewiesen.

Mit freundlichen Grüssen

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 09.10.1933

[1]Vermutlich war damit Robert König gemeint, der damals Professor in Jena und damit Kollege von F.K. Schmidt war. Robert König untersuchte quadratische Formen über algebraischen Funktionenkörpern, also das, was man heute die Arithmetik hyperelliptischer Kurven nennt. Seine bedeutenden Arbeiten auf diesem Gebiet wurden bis heute nicht ausreichend zur Kenntnis genommen.

[2]Rédei hat später den Spezialfall der Diedergruppe der Ordnung 8 (also $\ell = 2$) wiederentdeckt; dessen Ergebnisse aus [253, 254] sind weitaus bekannter geworden als die viel allgemeineren Resultate von Scholz.

[3]Die Scholzsche „Hauptirrealität“.

3.44 10.11.1933, Scholz an Hasse

Freiburg, 10. Nov. 1933.

Lieber Herr Hasse!

Sie bekommen doch jedenfalls mein Notgemeinschafts–Stipendiums–Gesuch zur Begutachtung in die Hand? Darf ich Sie fragen, ob es schon bei Ihnen gewesen ist, und ob Aussicht besteht, das Stipendium schon ab Januar zu bekommen? Furtwängler will mir noch ein Zeugnis schicken, das ich dann wohl nach Berlin an die Notgemeinschaft nachsenden muss. Mein Brief vom Ende August, in dem ich damals Furtwängler darum bat, war verlorengegangen. Zeugnisse waren ja 'erwünscht', wenn auch nicht vorgeschrieben.

Es wäre schon gut, wenn ich bald von Doetsch unabhängig wäre, auch im Interesse der Algebra, die D. dadurch, dass ich sein Assistent bin, leichter niederhalten kann. Kapferer ist ja nicht sehr aktiv, und man spricht auch davon, dass das 2. Ordinariat noch eine Zeitlang eingespart werden könnte, und Doetsch sagte selbst, dass es fraglich sei, ob es ein Algebraiker würde. Er denkt wohl an einen Geometer. Jedenfalls merke ich, dass ich als Assistent garnicht mehr angebracht bin. Ich glaube ja zwar nicht, dass Doetsch viel Einfluss auf die Neubesetzung hat. Ich will mal nächstens den Kanzler sprechen, einen planm. Extraord. unserer Fakultät, der vielleicht noch am meisten Einfluss hat. Flüchtig sprach ich ihn neulich schon, und er sprach selbst von Krull. Also darf man wohl annehmen, dass K. am meisten Aussichten hat, wenn mit der Abstammung alles klappt. Nach meiner Meinung müsste man sehr auf der Hut sein, dass die Algebra nicht noch mehr zurückgedrängt wird. Wenn Bieberbach jetzt Zahlentheorie und Algebra zusammen in einer 4 st. Vorlesung hält, ist das doch eine schlechte Vorbedeutung. Ebenso wenn auf der Würzburger Tagung die ganze Algebra auf einen Nachmittag zusammengedrängt wird, Herr Behnke für einen Vortrag, den er nicht hält, 30 Min. bekommt, während bei meinem Vortrag die angekündigten 30 Min. nicht einmal im Programm berücksichtigt waren. Können Sie nicht darauf drängen, dass künftig immer ein ganzer Tag für Algebra und Zahlentheorie reserviert bleibt?

In meinem Arbeitsplan für die Notgemeinschaft habe ich am Anfang absichtlich die konkreten Erfolge der Algebra in letzter Zeit hervorgehoben, wegen des Vorwurfes der uferlosen Abstraktheit, die man häufig den Algebraikern macht. Auch in meiner Vorlesung (Galois–Theorie) habe ich zu Anfang zur Genüge daraufhingewiesen, die vernünftige Algebra einmal gegen den „amerikanischen Typus“ verteidigt, dem alles gleich wichtig ist und der

Sinn für das Wesentliche fehlt; anderseits gegen die kurzsichtige Anschauung so mancher Analytiker, die das Wesentliche in der unmittelbaren Anwendbarkeit erblicken. — Man kann wirklich nicht genug darauf hinweisen, dass die Algebra der schönere und erhabenere Teil der Mathematik ist, ohne den die Mathematik schliesslich zu einer Hilfswissenschaft für die Physik herabsänke. Wobei nicht geleugnet werden soll, dass es auch analytische Schönheiten gibt, für die aber dann ebenfalls der Sinn allmählich verloren ginge.

Zermelo steht hier ganz auf Seiten der Algebra. Namentlich spricht er gegen den „Koebismus“[1)], die Funktionentheorie als die Königin der Mathematik anzusehen. Mit Zermelo zusammen mach' ich dies Semester „Übungen für Fortgeschrittene“ über 'Beziehungen zwischen Algebra und Analysis'. Wir wollen diskutieren, wie weit man überhaupt die Algebra von der Analysis abgrenzen kann und dabei vor allem die Artin–Schreiersche Arbeit über Reelle Körper[2)] (auf deren Ergebnis Zermelo fast gleichzeitig gekommen ist) besprechen, ferner Artins Kennzeichnung[3)] des Körpers aller reellen Zahlen, und Dedekinds „Permutationen des Körpers aller algebraischen Zahlen“[4)]. Der Begriff 'unabzählbar' macht Dedekind merkwürdig verwirrt; er bringt ihn immer gleich mit Stetigkeit zusammen und hält darum den Körper aller Complexen Zahlen nur der zwei trivialen Permutationen für fähig.

Leider sind dies Semester nur ganz wenige Studenten da; nur Zermelo hat in der Mengenlehre über 10 Hörer, und Doetsch in der Diff. Int. II, die ja auch die noch reichlich vorhandenen Physiker, Chemiker und Forstleute hören müssen. Selbst in der analyt. Geom. sind nur 5 Hörer.

Haben Sie übrigens bemerkt, dass Herr Rédei in den Fussnoten zu den durch 8 teilbaren Invarianten seinen Vornamen verwechselt hat? Da steht auf einmal R. Rédei statt L. Rédei. Hat Rédei schon von seinem Stipendium geschrieben, das er, ich glaube, nächsten Sommer für Weiterstudium in Deutschland zu bekommen hofft? Ich habe ihm Marburg warm empfohlen. — Fräulein Noether ist doch noch in der Redaktion[5)] der Annalen? Sie schrieb mir wenigstens, dass ich ihr das weitere Manuskript nach Bryn Mawr schicken soll.

Mit vielen herzlichen Grüssen.

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 10.11.1933

[1]Wohl eine Anspielung auf die Richtung des Kubismus, der zu einer Spielart der Kunst gehört, die die Nationalsozialisten als „entartete Kunst“ zu bezeichnen pflegten. Paul Koebe (1882–1945) war ein Funktionentheoretiker, dem man nicht übertriebene Bescheidenheit vorwerfen konnte. Seine Unterstützung des Gnadengesuchs für Landau und Emmy Noether hat er, wie F.K. Schmidt an Hasse schreibt, verweigert, weil Perron darin von Göttingen als dem „Mekka der Mathematik“ geschrieben habe. Bieberbach dagegen habe seine Unterschrift verweigert, weil er Landau „für keine Zierde der deutschen Wissenschaft“ halte.

[2]Artin & Schreier, [12].

[3]Artin [10].

[4]Dedekind [65].

[5]Vgl. Briefwechsel Hasse–Noether [171].

3.45 14.01.1934, Scholz an Hasse

Freiburg, 14. I. 34.
Kybfelsenstr. 9.

Lieber Herr Hasse!

Unsere letzten beiden Karten haben sich gekreuzt. Auf Ihre Karte vom 5. I., für die ich Ihnen vielmals danke, will ich gleich antworten, dass ich von der N. G. in ihrem Bescheid vom 29. 11. (nicht 12. 11., wie dort falsch notiert) zwar die Zusendung eines neuen Fragebogens angekündigt bekommen, aber keinen erhalten habe. (Bbb., den ich inzwischen traf, behauptete, der Fragebogen müsse dann auch abgegangen sein, d. h. also verlorengegangen wie mein erstes Schreiben an Fw.[1)] betreffs Zeugnis. Sollte jetzt wieder mehr verloren gehn ?) Ich schrieb dann 30. 11. und 7. 12. an F. K. Schmidt, da er ja meinen Fragebogen hatte und ich erwartete, dass es auf diese Weise schneller geht als wenn ich die N. G. noch mal um Zusendung eines Fragebogens bäte. Dann wandte ich mich am 14. 12. an Sie, am 28. läutete ich die N. G. an, liess mir Fragebogen zusenden und reichte am 3. 1. nochmals ein. Nun ist das meiste doppelt da. (Soweit F. K. Schmidt ausser dem Antrag auch die anderen Papiere eingereicht hat; am 3. 1. ist mir noch kein weiterer Eingang bestätigt worden.) — Dass der Geschäftsgang normalerweise 4 Wochen dauert, bei Privatdozenten aber erst das betreffende Ministerium befragt werden muss, schrieb ich wohl schon. Wenn ich stattdessen von Baden aus ein Privatdoz. stipendium bekäme, auf Veranlassung der N. G., wäre das ja noch besser; dann wäre das Risiko für später geringer, da diese Stipendien von vornherein nicht befristet sind. An sich ist ja jetzt ein neuer Fond in Baden da, da Kolleggelder über 3000 M im Semester nicht mehr ausgezahlt werden und der Überschuss restlos den Privatdoz. zu gute kommen soll. Da hätten, meine ich, die den ersten Anspruch darauf, die freiwillig ihre Assistentenstelle aufgeben, da doch dann wieder neue Arbeitskräfte eingestellt werden können. Es würden sich sowieso nicht viele Privatdozenten darum reissen, wenn dieses Stipendium gleichzeitig eine Einkommensverminderung bedeutet, sondern mehr die, die an der wissenschaftlichen Forschung wirklich interessiert sind. — Ich werde einmal mit dem Vorsitzenden des Nichtordinarienvereins darüber sprechen. Jedenfalls habe ich dadurch, dass ich mich zuerst an die N. G. gewandt habe, mehr Aussicht.

Mit meinem Wohnungswechsel bin ich sehr zufrieden: ganz im Freien, in guter Luft, wenn auch $^1/_2$ Std. von der Stadt weg. Mein letztes Zimmer lag allzu windstill, und Wind brauche ich noch mehr als Sonne.

Mit der Übersetzung von Solotarjow (3 O Π O T A P E B) scheint es etwas schwierig, einen Verleger zu finden, auch wenn ich nur die 200 Seiten Dissertation übersetze. Vor allem scheint da die alberne Vorstellung zu bestehen, man dürfe heut' keinen Russen übersetzen, auch wenn er schon 1878 gestorben ist. Wenn die Russen das Autorenrecht nicht achten, braucht man ja auch umgekehrt bei der Übersetzung russischer Autoren keine Rücksicht darauf zu nehmen. — Springer war ziemlich ablehnend; bei W. d. G. empfing mich wenigstens Grethlein. Auf Feigls Rat hab' ich Sie zitiert. Ich soll noch Nachricht bekommen. Grethlein klagte natürlich auch über die schlechten Verhältnisse auf dem Büchermarkt und kam dann noch damit, dass man heute die Algebra als undeutsch zurückdrängen wolle. Da hatte ich wenigstens mal Gelegenheit, etwas an immerhin mit ausschlaggebender Stelle richtig zu stellen: Ich sagte ihm, dass im Gegenteil gerade die Algebra deutschen Ursprungs sei, die Analysis mehr französisch. Insbesondere seien die heutigen zahlentheoretischen Leistungen ganz deutsch, bzw. stehen unter deutschem Einfluss wie im Norden und Süden (Skandinavien, Ungarn)[2]. Die westlichen Leistungen seien unerheblich, und gerade im Osten werde noch einiges geleistet, was sich dem deutschen Einfluss entzieht. Eben darum lohne sich die Übersetzung mancher russischer Werke. — Grethlein kam auch noch auf Zeitschriften zu sprechen und sagte, dass dort Dissertationen i. allg. nicht mehr aufgenommen würden. Darauf erwiderte ich, dass die mathematischen Diss. i. allg. doch ein gewisses Niveau hätten u. z. B. in der Math. Zeitschr. bestimmt den Durchschnitt der dort in den letzten Jahren erschienenen Arbeiten hielten, und dass manche andre nur deswegen aufgenommen würden, weil sie von bekannten Autoren stammen. Als er von der Länge der Diss. sprach (für Math. ja garnicht zutreffend), wies ich auf die Lichtensteinsche 88 S. lange Note über Hydrodynamik hin. — Ich finde wenigstens, man soll den Doktoranden nicht dadurch noch die Promotion erschweren, dass man ihre Diss. nicht in eine Ztschr. aufnimmt, wodurch manchmal auch wertvolle verloren gehen können. — Gut fand ich einen Anschlag, den ich neulich in der Leipziger Phil. Fak. fand: dass man bei der Abfassung einer Diss. gleich an die Kosten denken und alle unnötigen Darlegungen weglassen solle. Manche philologischen Arbeiten lassen sich ja wegen ihrer Länge kaum durchlesen.

In Leipzig war ich am 9. 1., besuchte da auch Deuring und v. d. Waerden. v. d. Waerden beschäftigt sich jetzt auch mit der Konstruktion zweistufiger Gruppen, auf dem Wege der Umkehrung der R. Brauer–schen Sätze über Existenz von Schiefkörpern. Allerdings braucht er, um festzustellen, ob der Körper zyklische Erweiterungen n^{ten} Grades zulässt, die wieder zu absoluten Normalkörpern vorgeschriebener Gruppe führen, dass die n^{ten} Erw. im Unterkörper liegen, was bisweilen eine wesentliche Einschränkung sein kann. Ohne Ew. ist alles viel straffer; weniger Möglichkeiten. v. d. Waerden wusste auch noch, dass Bbb. jetzt i[n] einer 4 st. Vorlesung Zahlentheorie, Algebra u. Gal. Th. zusammen liest, wie es die Studenten haben wollten, und zwar zu der Zeit, wo Schur sonst seine Elementarvorlesung las. Ausserdem wollte

Bbb. Feigl das bewährte Einführungskolleg abnehmen, was Feigl ihm jeden 2. Sommer zugestanden. — Nun ist es ja augenblicklich so, dass Schur sowieso seine Idealtheorie vom Sommer nachholen muss, und immer noch eine Anzahl Hörer mit wirklichem Interesse hat (weniger im Seminar). So ist es vielleicht ganz gut, dass sich Bbb. während der Zeit verausgabt, wo das wissenschaftliche Interesse doch geringer ist. Dann werden später die Interessierten um so freudiger zu Schur[3)] zurückkehren, und wenn B. nächsten Sommer die Einführung liest, wird Feigl dann im Winter die Hörer nochmal haben, und die Schlaueren werden gleich darauf warten. — Übrigens ist Schur ziemlich optimistisch, was das Verhältnis Algebra–Analysis betrifft: er hält die Verundeutschung der Algebra für einen Verzweiflungsschritt gewisser Analytiker, die ihren Nachwuchs aussterben sehn. Ich bin ganz Ihrer Meinung, dass man die Fahne der Algebra und insbesondere der Zahlentheorie in erster Linie durch Leistungen hochhalten muss. Man darf aber auf der andern Seite nicht versäumen, Entstellungen richtigzustellen. So habe ich es für richtig gehalten, über die mathematischen Verhältnisse in Berlin (und die fragwürdigen in Freiburg) möglichst viele Algebraiker zu unterrichten. In Frankfurt kommt immer Magnus an die Bahn. Wenn ich wieder nach Berlin fahre, fahre ich vielleicht mal über Marburg. Wenn Sie dann noch da sind. Wie ich hörte, ist es sehr wahrscheinlich, dass Sie nach Göttingen berufen werden. Das wäre sehr wünschenswert. Zwar haben Sie ja auch jetzt in Marburg viele Gäste gehabt; aber in Göttingen haben Sie das grosse Institut.

Neulich las ich Ihre Comptes–Rendus–Noten[4)], in denen Sie durch Normenrestbetrachtungen auf die Führer–Diskr.–Formel kommen. Dieser Beweis ist doch bedeutend einfacher als die früheren ? Jedenfalls besonders übersichtlich. Bei meiner jetzigen Note, der Fortsetzung der eben erschienenen verwende ich auch Normenreste zum Beweis der ‘Hauptirrealität’ $r \neq \rho^{xy}\sigma^{\ell}$. — Finden Sie übrigens auch, wie v. d. Waerden, dass ich zuviel Namen einführe ? Ich hätte gedacht, dass es sich dadurch besser lesen lässt. Im ganzen ist die neue Note auch wohl lesbarer als die meisten früheren von mir ? Die Bezeichnung ‘Vollkörper’ finde ich allerdings selbst nicht schön. Hätte als etwas allgemeineren Begriff gleich ‘monogener’ (eingeschlechtiger) Körper sagen sollen.

Mit vielen herzlichen Grüssen

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 14.01.1934

[1]Sh. den Brief vom 29.09.1933.
[2]Hier spielt Scholz in erster Linie wohl auf Nagell und Rédei an.

[3]Dieser Optimismus, dass die nationalsozialistische Personalpolitik ein schnell vorübergehender Irrweg sei, kursierte selbst untern den Opfern dieser Politik, wie z.B. Emmy Noether.

[4]Hasse veröffentlichte 1933 zwei Noten zur Theorie der Normenreste in den Comptes Rendus Paris, nämlich [121, 122].

3.46 25.02.1934, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) 25. II. 34.

Lieber Herr Hasse!

Da ich noch immer keinen Bescheid vom Arbeitsdienst habe — es scheint hier grosser Mangel an Arbeitsplätzen zu sein — werde ich wohl, wenn ich nicht noch diese Woche eingestellt werde, am Freitag, 2. März reisen und mich erst für die Zeit um Ostern melden. Am 2./3. März sind Sie wohl in Marburg? Ich käme dann (13^{56}) 16^{11} an. Passt es Ihnen gut, wenn ich Sie dann ($^1/_2$ 4) 5 Uhr besuche? Am 2. März? Ich reise dann entweder nachts weiter oder am 3. um 13^{58}. Ich schreibe noch mal am Mittwoch, wenn ich mich genau entschieden habe, ob ich jetzt reise oder erst 20./22. März. Ich wollte Ihnen nur schon schreiben, bevor Sie nach Darmstadt fahren. Falls ich erst später reise: passt es Ihnen da besser auf der Hinreise oder Rückreise (13. 4. etwa)? Sie werden wohl inzwischen auch eine Zeitlang verreisen? — Die Korrekturen hab' ich neulich an Frl. Taussky[1)] weitergeschickt, die sie Ihnen senden wird. Ich habe möglichst nicht allzuviel äusseres verbessert. Die $\boldsymbol{f}$ hätte ich gern stärker gehabt, so wie in (5). Unsere □ und ◯, die der Setzer einfach weggelassen, hab' ich durch $\big[\,\big]$ und $\big(\,\big)$ ersetzt. Bei 4027 und 9748 hab' ich die Kapitulanten noch fett erbeten, da sie sonst garnicht hervortreten.

Mit freundlichem Gruss.

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 25.02.1934

[1]Taussky war zu diesem Zeitpunkt noch in Europa; im Oktober ging sie dann nach Bryn Mawr.

3.47 28.02.1934, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) 28. II. 34.

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihren Bescheid! Ich komme nun doch morgen ins Arbeitslager Emmendingen.[1)] Am 23. werde ich dann nach Berlin fahren. Sollten Sie schon vor dem 15. April von Ihrer Reise zurück sein, so könnte ich Sie dann auf der Rückreise besuchen, sonst später einmal. Am 15. April muss ich ja wegen der Urlaubskarte zurück sein. Von der N. G. noch keinen Bescheid. Meine Ass. Stelle, die 31. 3. abläuft, hab' ich nicht mehr erneuern[2)] lassen.

Mit herzlichem Gruss und einer Empfehlung an Prof. Knopp

Ihr

Arnold Scholz.

W. d. G. will jetzt den Zolotareff nicht übernehmen. Ob wohl Teubner ? Oder Vieweg, der ja den Dedekind verlegt hat. Die Z. sche Idealtheorie wäre also ein passendes Gegenstück.

Anmerkungen zum 28.02.1934

[1]Emmendingen liegt bei Freiburg. In der dortigen Psychiatrischen Landesklinik wurde während des Nationalsozialismus auch die nationalsozialistische Variante der „Euthanasie" praktiziert.

[2]Scholz hatte also von sich aus auf die Assistentenstelle bei Doetsch verzichtet; allerdings hätte Doetsch ihn sicherlich ohnehin nicht übernommen. Doetschs nächster Assistent war Eugen Schlotter, den Doetsch im Oktober 1935 wieder vor die Tür setzte, weil er sich mehr um die Politik als um seine Assistentenstelle gekümmert habe.

3.48 01.05.1934, Scholz an Hasse

Freiburg, 1. Mai 1934.

Lieber Herr Hasse!

Sind Sie noch in Marburg? Bleiben Sie diesen Sommer noch da, oder gehen Sie schon nach Göttingen? Ich bin am 19. April zusammen mit meiner Mutter von Berlin abgereist, die jetzt 3 Wochen in Bad Orb ist und mich dann in Freiburg–Günterstal besucht; bin daher wieder die übliche Strecke nach Frankfurt gefahren, habe dort einen Tag Aufenthalt gemacht und durch Reichardt von Ihrer Berufung nach Göttingen erfahren. Jetzt geniesse ich den Frühling im Günterstal, wirklich unvergleichlich schön. Kommen Sie doch auch mal im Frühling hierher! Wie wäre es zu Pfingsten?

Ich bin hier in den letzten Tagen mit dem Körperkonstruktionsproblem plötzlich weit voran gekommen: 1) kann ich für vorgegebene zweistufige Gruppe die Konstruktion eines zugehörigen Körpers angeben, nur durch Zerfallsbedingungen für die Führer. 2) kann ich ebensolche notwendige und hinreichende Bedingungen für den maximalen Abelschen Teilkörper (vom Typ $\ell^{h_1}, \ell^{h_2}, \cdots \ell^{h_n}$) angeben, unter denen die Konstruktion fortgesetzt werden kann. Es darf sogar ein beliebiger Grundkörper K_0 angenommen werden; nur muss der maximal Abelsche Körper K^0/K_0 rein verzweigt sein, damit man die Fortsetzbarkeit der Konstruktion des zweistufigen (Zweig)körpers K allein aus der Primidealzerlegung in K^0/K_0 entscheiden kann, d. h. also: ohne die Entstehungsgeschichte der abs. Klassengruppe von K_0 zu studieren.

Man kann sich, wie ich zeigte, auf Gruppen von Primzahlpotenzordnung beschränken und diese auf Zweiggruppen von einem Typ $(\ell^{h_1}, \ell^{h_2}, \dots \ell^{h_n}; \ell^k)$ zurückführen. Ich will jetzt die notwendigen und hinreichenden Konstruktionsbedingungen dafür angeben, dass sich der rein verzweigte Abelsche Körper K^0/K_0 vom Typ $(\ell^{h_1}, \dots, \ell^{h_n})$ zu einem Zweigkörper K obengenannten Typs erweitern lässt, bequemlichkeitshalber noch unter der Voraussetzung, dass K_0 die ℓ^{ten} Einheitswurzeln nicht enthält (ein „unbeKÜMMERter“ Körper ist), und mit der Forderung, dass die Diskriminante von K/K^0 zu der von K^0/K_0 prim ist (Normalfall):

Notwendig und hinreichend ist:

1) K^0 zerfällt so in $K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_n$, dass die Diskriminanten dieser zyklischen Körper relativ prim sind.

2) (Hauptbedingung). Alle Zerlegungsgruppen in K^0 sind zyklisch. $\big[$Nach 1) heisst das ja nur dass $D(K_\nu)$ in jedem K_μ $(\mu \neq \nu)$ voll zerfällt$\big]$.

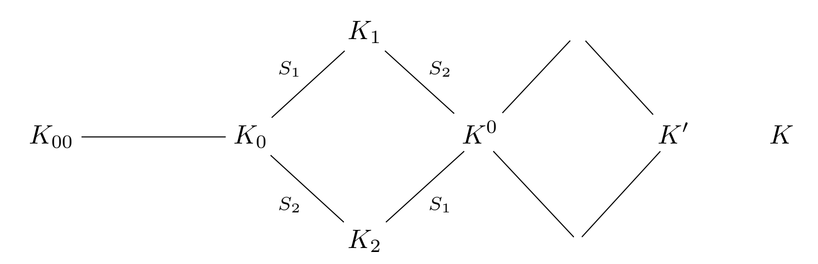
Hierzu ist zu bemerken:

a) Die Notwendigkeit zyklischer Zerlegungsgruppe ist sofort zu beweisen: Sie werde für p in K^0 aus Z und T erzeugt, wo T die Trägheitsgruppe erzeugt. Ist nun etwa T keine Potenz von Z, so sind Z und T in der Zweiggruppe nicht vertauschbar. Dann enthielte aber $\{Z, T\}$ Zerlegungsgruppe eines p–Teils in K, Stücke der Kommutatorgruppe, die dann zur Trägheitsgruppe gehörten, gegen Vorauss. (Im Falle, dass die Diskriminanten nicht prim sind, etwas komplizierter.) — Bei Zweigfaktorgruppen $\mathfrak{G}$ brauchen für die Konstruktion eines zugehörigen Körpers auch tatsächlich nur *die* Zerlegungsgruppen $\{Z, T\}$ in K^0 zyklisch zu sein, wo der Kommutator $(T, Z) \neq \varepsilon$ in $\mathfrak{G}$.

b) Merkwürdigerweise bin ich auch erst diese Tage auf obigen einfachen Beweis gekommen. Etwas länger hab' ich schon bemerkt, dass es beim 'Zusatz in der Korrektur' meiner Annalen–Note doch heissen muss: $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{\ell^{h_2}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\ell^{h_1}} = 1$, wie ja hier aus 2) folgt. Ich hab' es einer Berichtigung noch angefügt.

c) Als günstig erweist sich nach 2), für jede neue zyklische Erweiterung den Führer aus so wenig wie möglich Primidealen zu bilden; jede unnötige Verzweigung der Ordnung e verschlechtert die Auswahl um das e–fache. Eine Erweiterung ohne Führer ist jedoch nicht ratsam, weil dann die Konstruktion irgendwo leicht stecken bleibt. Mir scheint sogar, dass das immer der Fall ist, wenn man beliebig hohe auflösbare Körper bilden will und man auf irgend einer Stufe einen absoluten Klassenkörper zur Erzeugung verwandt hat; insbesondere halte ich's heute für selbstverständlich, dass jeder Klassenkörperturm[1)] abbricht. Vielleicht reichen meine jetzigen Mittel aus, das zu beweisen.

Ich will jetzt das allgemeine Erweiterungsprinzip skizzieren, das ich zur Konstruktion beliebiger Zweigkörper verwandt habe:



K^0/K_{00} sei irgendein Normalkörper. $\mathfrak{G}\left(K^0/K_{00}\right) > S_1, S_2$. S_1, S_2 seien in $\mathfrak{G}$ *vertauschbar* und *Trägheitssubstitutionen*, d. h. K^0/K_1 und K^0/K_2 rein verzweigt. (K_0, K_1, K_2 i. allg. keine Normalkörper.) Jetzt lässt sich ein K^0 enthaltender Zweigkörper K dann (und nur dann) über K_0 bilden, wenn für

K_1/K_0 und K_2/K_0 gegenseitiger Vollzerfall der Diskriminantenteiler erfüllt ist. (Für Zweigkörper vom Typ $(\ell^{h_1}, \ell^{h_2}; \ell^k)$ muss der Konstruktionssatz natürlich zuerst bewiesen sein. (was ich schon länger habe)) — In der Skizze ist dieser Zweigkörper durch das deutlich schraffierte Feld[1] gegeben, in dem jeder Gitterpunkt einen Körper darstellt. — K' lässt sich obendrein so bilden, dass man bei Transformation mit einem vollständigen Restsystem T mod $\{S_1, S_2\}$ in $\mathfrak{G}$ lauter unabh. (also dispositive) Erweiterungen erhält, sodass der ganze angemalte 'Kristall'[2] wieder einen Normalkörper K liefert. Dabei hat K/K^0 eine Gruppe $\{A\}_{\mathfrak{G}}$ mit Ord $A = (\ell^k, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, T^n - 1)$, wo $\mathfrak{F}_1 = \sum S_1^\lambda$, $\mathfrak{F}_2 = \sum S_2^\lambda$ und T (Ordnung n) Restklassen mod $\{S_1, S_2\}$ in $\mathfrak{G}$ durchläuft.

Es ist nun noch nicht gesagt, dass jetzt $A = S_2^{-1} S_1^{-1} S_2 S_1$; das kann garnicht immer sein. Wohl aber ist es richtig, wenn K_1/K_{00} Zweigkörper zu $\{S_1', \cdots S_{n-1}'\}$ und $K^0 = K_1 \times \{S_n'\}$. $\{S_n'\}$ also der neu hinzutretende zyklische Körper über K_{00}. Dann erhält man den Zweigkörper zu $\{S_1', \cdots S_{n-1}', S_n'\}$, indem man $S_2 = S_n'$; $S_1 = S_1', \cdots S_{n-1}'$ der Reihe nach setzt, jedesmal aus dem Körper K der Figur den zweistufigen Bestandteil herausschneidet und diese alle miteinander multipliziert.

Die Konstruktion sieht sehr laienhaft aus, ist aber richtig.

Ganz allgemein wird man mit dieser Methode schliesslich folgende Aufgabe lösen können. Gegeben ein relativ normaler rein verzweigter Körper K^0/K_0 mit der Gruppe $\mathfrak{G}$, erzeugt aus Trägheitselementen T. Gegeben ferner eine relativ *auflösbare* Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G} = \mathfrak{H}/\mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}$ auflösbar), in der die T ihre Ordnung nicht vergrössern. Wie muss die Primidealzerfällung $K_0 \to K^0$ ausfallen, damit Körper K zu $\mathfrak{H}$ existiert?

(Auf die Nichtverlängerung der Trägh. gruppen wird sich der allg. Fall zurückführen lassen.)

Auflösbare Erweiterungen lassen sich, wie ich mir nochmal sorgfältig überlegen muss, einfangen durch allgemeine Zweigerweiterungen wie hier oben und allgemeine Dispositionserweiterungen (Math. Z. **32**, 187–189).
— Kann man ein allg. Kriterium erzielen, wann auf S. 5 oben $\{A\}_{\mathfrak{G}} = \{S_2^{-1+S_1}\}_{\mathfrak{G}}$, und ist die Gruppe $\mathfrak{H}$ (hier einmalige Zweigerweiterung) dann als $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}(S_1, S_2)$ eindeutig bestimmt, so wäre die Aufgabe gelöst. Sicher müssen wieder die Zerlegungsgruppen zyklisch sein.

Am 10. 1. 35 hat Schur seinen 60. Geburtstag. Zu dieser Gelegenheit möchte ich ihm eine Abhandlung widmen, entweder die jetzt fertige Konstruktion zweistufiger Körper, die ich Frl. Noether als Note II für die Annalen[2)]

[1] In der Skizze ist die Raute zwischen K^0 und K' schraffiert.
[2] In der Skizze eine perspektivische Ergänzung der Raute zwischen K^0 und K'.

schicke, oder lieber noch das weitere, das ich mir jetzt neu überlegt habe: die auflösbaren Erweiterungen, wenn ich dort bald zum Abschluss komme. Wie wäre es mit einem Crelle–Festband für Schur? Könnten Sie das nicht machen? Das würde mich sehr freuen!

Mit vielen herzlichen Grüssen.

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 01.05.1934

[1]Diese Vermutung hat sich später bekanntlich als falsch herausgestellt.

[2]Scholz hat diese Arbeit [S18] „Meinem Lehrer I. Schur zu seinem 60. Geburtstag am 10. Januar 1935“ gewidmet. In einer Zeit, in welcher andere Autoren sich sogar dazu bringen ließen, Zitate jüdischer Autoren zu streichen, erforderte eine solche Widmung eine ganze Portion Mut.

3.49 22.05.1934, Scholz an Hasse

Freiburg, 22. Mai 1934.

Lieber Herr Hasse!

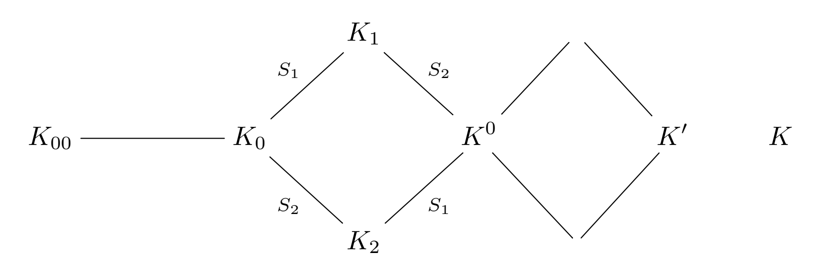
Heut traf ich Süss, Loewys kommenden „Nachfolger“, in der Strassenbahn und erfuhr von ihm, dass Sie möglicherweise schon jetzt, vielleicht aber auch erst im Oktober nach Göttingen gehn. Ich habe nun einen grossen Wunsch, der Sie gern auf Ihrer Übersiedlung begleiten möchte: mich nach Göttingen umzuhabilitieren[1)].

Als ich vor fünf Jahren nach Freiburg ging, verglichen Sie mich mit einer Tanne, die in der Einsamkeit die Möglichkeit zur freien Entfaltung hat. Im Vergleich zu Berlin stimmte das vollkommen, wo Nadelbaum an Nadelbaum steht. Hier in Freiburg können sich die Tannen in der Vereinzelung wirklich eine Zeitlang entfalten; aber allmählich werden sie von Laubbäumen umgeben, die ihnen mit ihren breiten Blättern das Sonnenlicht verdecken. Und dann müssten die Tannen, um wieder an die Sonne zu gelangen, schnell genug über die Laubbäume hinauswachsen oder abwarten, bis diese ihr Laub verlieren. — Lieber möchte ich mich verpflanzen lassen. Sie ersehen aus beiliegendem Plan, wie es hier um die Algebra steht. Dies ist ein scheinbares Produkt gemeinsamer Besprechung, wobei aber Z.'s[2)] und meine Einwendungen unberücksichtigt blieben (auch Heffters[3)] gütige Befürwortung der Gruppentheorie). Gegen die Einteilung der ersten fünf Semester ist kaum etwas einzuwenden; das B.sche[4)] Eintopfgericht (Algebra und Zahlentheorie in einem Semester) ist nicht wieder aufgewärmt worden. Aber 6.–8. Semester und die begleitenden Worte! Die doch ungefähr dazu auffordern, auch nur das zu hören! Dabei hat sich die Analysis noch auffallend vor der Geometrie verbeugt. Wie man so in Biberpantoffeln stecken kann!

Nun ist ja Herr Süss ein sehr netter Mensch, mit dem sich vielleicht eine bessere Aussprache über das Gleichgewicht der Vorlesungsgebiete führen lässt; aber Z.s und meine diesbezüglichen Bemühungen in der Berufungsangelegenheit — Z. hat sogar persönlich mit dem Ministerialreferenten darüber gesprochen und dabei betont, dass das Schwergewicht des wissenschaftlichen Fortschritts heute in der Algebra ruhe und man diesen Gesichtspunkt bei der Berufung nicht ausser acht lassen solle, um nicht die Hörer zu verjagen — sind also gescheitert. Nach diesem Stand der Dinge fühle ich mich nicht mehr hier am Platze, möchte lieber an einer Stätte algebraischer Kultur sein, wie sie Göttingen wieder zu werden verspricht.

Zu meinen Ausführungen von neulich will ich noch bemerken: mein ganzes

Konstruktionsprinzip beruht schliesslich auf der Nicht–Normentreue Abelscher Körper. (Normentreu nannten Sie mal einen Körper, wenn alle totalen Normenreste (μ) Normen (ν) sind.) Der Gruppe (μ/ν) entsprechen die Tschebotarjowschen 'Zentralen Klassenkörper', die ich gerade brauche. Überhaupt ist die Tsch.sche Einteilung der 'elementaren Teilklk.' sehr wichtig, um die verschiedenen Typen absoluter Klassengruppe wirklich kennen zu lernen. In seiner Hensel–Note steht natürlich auch manches, was meine jetzigen Überlegungen berührt, schon weil seine Aufgabe A. auch die meinige ist. Nur lässt sich aus seinen Ansätzen noch wenig erkennen, wie weit sie zur Lösung der Aufgabe beitragen. Eine gewisse Antipathie hatte ich erst gegen die Gruppen, die er 'Scholzsche Gr.' nennt. Nun habe ich inzwischen gemerkt, dass meine disponierten Zweiggruppen



von neulich im weiteren Sinne auch 'Scholzsche Gr.' sind. Nur ist eben die Tsch.sche Eindeutigkeitsvermutung für die Scholzschen Gr. i. allg. falsch, und in dem Spezialfall, wo Tsch. sie bewiesen hat, ist sie trivialerweise richtig; d. i. nämlich der Fall einer charakteristischen Faktorgruppe meiner allg. Disp. gr. Man wird aber aus dem Tsch.schen Fragment noch manches schöpfen können.

Die Baersche Gruppen–Note habe ich mir neulich flüchtig angesehn, glaube aber eher, dass man mit meiner Faktorgruppenmethode die Baerschen Ergebnisse einfacher darstellen kann, als dass ich bei gewissen Konstruktionen auf sie zurückgreifen könnte.

Die Ausarbeitung meiner bel.–zweistufigen Körperkonstruktion hat sich durch den Fall $\ell = 2$ etwas verzögert, in dem sich die notwendigen und hinreichenden Erweiterungsbedingungen nicht so einfach ausdrücken wie für $\ell > 2$. ℓ–te Einheitswurzeln im Grundkörper sind ausserordentlich störend für die Einfachheit des Resultats. Ich begnüge mich daher vorläufig mit schwachen notwendigen und stark hinreichenden Bedingg. Die Existenz beliebig zweistufiger Körper ist damit gesichert.

Meine gemeinsame Note mit Frl. Taussky schicke ich morgen an Ihre Adresse. Ich darf wohl für Hensel und Franz mitschicken? — Von Köthe weiss ich immer nicht, ob er in Münster oder Bonn ist. Ich dachte, er war früher in Münster und jetzt in Bonn; aber neulich meinte jemand umgekehrt.

Frl. Noether schrieb mir neulich, dass sie jetzt zu den Sommerferien bald wieder in Göttingen ist. — F. K. Schmidt ist auch noch in Göttingen? — Süss sagte noch, dass nach Kiel jetzt Hammerstein[5)] zur Vertretung käme.

Mit freundlichem Gruss

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 22.05.1934

[1]Scholz hat sich direkt in Göttingen beworben, weswegen Erhard Tornier diverse Mathematiker, unter ihnen Doetsch, um ihre Meinung bat. Doetsch schrieb (sh. [268, p. 61]):

> *Sch. mag mathematisch befähigt sein; gearbeitet hat er allerdings nur in der Zahlentheorie auf einem sehr engen Gebiet und ist auch dort [...] sehr einseitig. [...]*
> *Sch. hat sich während der viereinhalb Jahre, die er hier Privat-Dozent ist, als akademischer Lehrer von einer Unfähigkeit gezeigt, die einfach nicht überboten werden kann. [...]*
> *Sie werden es jetzt vielleicht begreifen, dass ich bass erstaunt war, dass dieser Mann ausgerechnet zu einer Zeit, wo solchen Drohnenexistenzen schärfster Kampf angesagt wird, mit der Auszeichnung bedacht werden soll, nach auswärts für einen Lehrauftrag geholt zu werden.*

In einem Brief vom 21. November 1936 fragt Süss, ob Hasse in Göttingen eine „Betätigungsmöglichkeit" für Kapferer finden könne; Hasse muss ablehnen, weil „die algebraische Fachrichtung [in Göttingen] bereits so stark vertreten" ist, dass er es nicht verantworten könne, noch einen Algebraiker nach Göttingen zu holen.

[2]Gemeint ist Scholz' Kollege Zermelo.

[3]Heffter nennt in seiner Autobiographie [126] Krull, F.K. Schmidt, Arnold Scholz und R. Baer als diejenigen „jungen Kollegen", die sich in Freiburg zwischen den Weltkriegen am meisten ausgezeichnet hätten.

[4]Bieberbach hatte Algebra und Zahlentheorie in einem Semester abgehandelt; vgl. den Brief vom 10.11.1933.

[5]Adolf Hammerstein, geb. am 7.6.1888 in Mannheim, studierte in Heidelberg und Göttingen, und promovierte nach dem ersten Weltkrieg in Göttingen mit „Zwei Beiträge zur Zahlentheorie" bei Landau. Er habilitierte sich 1924 in Berlin, wurde 1928 dort a.o. Professor, 1935 in Kiel ordentlicher Professor. Er starb am 25.2.1941. Scholz kannte Hammerstein aus seiner Berliner Zeit und hatte ihm 1928 auch ein Separat seiner Arbeit [S1] geschickt.

3.50 20.06.1934, Scholz an Hasse

Freiburg, 20. 6. 34.

Lieber Herr Hasse!

Beiliegend sende ich die Holzerschen Notizen zurück. Meine Mutter sandte sie mir jetzt nach ihrer Rückkunft zu.

Satz I (I^{a}) ist mir bekannt und ebenso zu beweisen wie die Grünsche Aufgabe 153 in D.M.V.: Ist C eine Klasse der Ordnung p von K und $(p, h) = 1$, so ist $N_k^K(C) = 1$ und daher $C^S \neq C$ für irgend ein $S < \mathfrak{G}(K/k)$ — weil sonst $C^{\ell^n} = 1$. Ist $C^S = C^a$, so $C^{S^{\ell^n}} = C^{a^{\ell^n}}$, also $a^{\ell^n} \equiv 1 \ (p)$, während $a \not\equiv 1 \ (p)$. Was nur für $p \equiv 1 \mod \ell$ möglich.

Eine explizite Darstellung findet sich in einfacher Form anscheinend nicht einmal für den einfachen Fall, dass K ein absolut zyklischer Körper ist. (Bei Tschebotarjow Gruppth. der Klassenkörper Crelle 1929 steht er in Satz 11, allerdings mit Bezug auf seine „eigentlichen Klassk.“) Zum ersten Mal stiess ich darauf im Sommer 1927; Furtwängler war das Resultat bekannt. Implizit ist der Satz schliesslich enthalten in meiner „Red. d. Konstr. v. K. mit zweistf. Gr. (Heidelbg. Ak.), dort die „Ringklkp.“ Moriya oder Morishima hat ihn[1)] auch.

Vielleicht stellt Holzer den Satz als Aufgabe in D.M.V., um nochmal darauf hinzuweisen[2)].

Satz II dagegen ist falsch. Vielleicht meint Holzer:

$$(\varepsilon : \eta) = \ell^{e_n - n}$$

Das stimmt wenigstens, wenn die absolute Klassengruppe von k selbst zyklisch ist. Sonst kann aber nicht allein die Gruppe der Normeneinheiten im Grundkörper massgebend sein, sondern es spielen die Einheiten der ganzen Körperkette $k < K_1 < K_2 < \cdots < K_n$ eine Rolle, wie man am einfachsten am Falle eines imaginär–quadr. Körpers und $\ell > 2$ sieht, wo in k noch beide Einheiten ± 1 Normen sind. — Ich vermute, dass Holzer irrtümlicherweise angenommen hat, der Hilbertsche Satz von den relativen Grundeinheiten sei ohne weiteres auf Körper von Primzahl*potenz*grad übertragbar, was ich auch mal glaubte. Aber nur für den Satz 90 richtig ist.

Von der Notgemeinschaft habe ich jetzt glücklich den Bescheid, dass ich von Juni ab auf ein Jahr ein Stipendium bekomme. Jetzt habe ich wenigstens etwas Bewegungsfreiheit, und es scheint mir nach Ihrer Antwort vom 26. Mai nicht ungeeignet, d. h. ich werde nichts versäumen, wenn ich mal eine Zeitlang ins Ausland ginge. Dass ich Ihnen mit meinem Wunsch so ungelegen

wie nur möglich kam, habe ich dem entnommen, was ich über Herrn W. in Göttingen hörte, an den ich allerdings auch gleich bei Ihrem Brief dachte. Es scheint mir aber, dass Sie mir auch zu ähnlichen Umhabilitationen, die aus wissenschaftlichen Gründen geeignet wären, nicht zureden möchten, und so halte ich es für besser, mich von hier aus nur für 1 Jahr beurlauben zu lassen. Ich müsste das nur studienhalber motivieren und will mich darum mit Nagell in Verbindung setzen. In Schweden hielte ich mich am liebsten auf. Vielleicht könnte mir das auch förderlich sein.

Mit den besten Grüssen.

Ihr

Arnold Scholz.

Furtwängler hat glaub' ich bewiesen, dass in einem zykl. Klk. ℓ^n–ten Grades wenigstens ℓ^n Klassen kapitulieren. Ich werde noch mal Frl. Taussky fragen.

Anmerkungen zum 20.06.1934

[1]Die relevanten Arbeiten sind Moriya [207] und Morishima [204].
[2]Holzer stellte die beiden folgenden Aufgaben in den Jahresberichten 1934, die mit dem Eingangsdatum 3.10.1934 versehen sind:

172. *Man beweise: Wenn für eine Primzahl ℓ die absolute ℓ-Idealklassengruppe eines Galoisschen Körpers k zyklisch von der Ordnung ℓ^ν ist und der Körper k keinen Teilkörper hat, über dem er relativ zyklisch vom Grade ℓ und* unverzweigt *ist, so hat jedes nichtkritische Primideal $\mathfrak{p}$ in k mit der Eigenschaft, daß erst $\mathfrak{p}^{\ell^\nu} \sim 1$, aber $\mathfrak{p}^{\ell^\kappa} \not\sim 1$ für $0 < \kappa < \nu$ im Sinne der absoluten ℓ-Klassen gilt, einen zu ℓ teilerfremden Grad.*

173. *Sei k_0 ein algebraischer Zahlkörper, h seine Klassenzahl, ℓ eine ungerade Primzahl, k/k_0 Galoissch vom Grade ℓ^n, $p \nmid h$ eine von ℓ verschiedene Primzahl* $\not\equiv 1 \bmod \ell$. *Dann ist die p-Klassengruppe von k niemals zyklisch, wenn ihre Ordnung* > 1 *ist.*

3.51 06.07.1934, Scholz an Hasse

Freiburg, 6. Juli 1934.

Lieber Herr Hasse!

Vielen herzlichen Dank für Ihren Brief, der mich sehr gefreut hat! Es freut mich auch, dass Sie jetzt wirklich in Göttingen sind und Herrn Tornier zur Seite haben. Ist da F. K. Schmidt wohl jetzt in Marburg? Da mir neulich Tornier auf Veranlassung von F. K. S. schrieb, nahm ich erst an, ich würde in Kiel dann mit F. K. S. zusammen sein; nun höre ich aber von Neiss, der augenblicklich hier ist und Sie vielmals grüssen lässt, dass wohl Hammerstein in Kiel bleibt und dort berufen wird. Und wo Sie nun Marburg verlassen haben, ist es ja wohl nicht schwer zu raten, dass F. K. S. dann nach Marburg kommt.[1)] Hammerstein kenne ich ja aber auch wenigstens, und ich werde sicher in Kiel die Möglichkeit haben, sowohl Anfänger–Vorlesungen als auch höhere algebraische Vorlesungen für einen nicht illusorischen Kreis von Zuhörern zu halten. Ich glaube, dass Sie mir mit Kiel gut raten, und dass es also auch ein friedlicher Boden ist. Herr Neiss hat mir auch zugeredet — und so möchte ich mich also für Kiel bereithalten. Ich beabsichtige, etwa bis Ende September hier zu bleiben (nur im August wollte ich einige Zeit in die Alpen) und dann nach Berlin zu fahren. Dort könnte ich dann die Umhabilitation abwarten; ob sie schon zu Beginn des Winters möglich ist oder erst später, ist für mich gleich gut.

Auf jeden Fall will ich mich Ende Juli hier beurlauben lassen, und da ist es wohl doch ganz gut, dass ich vor einiger Zeit schon an Nagell geschrieben habe; wenn er mir jetzt eine Aufforderung zuschickt, so ist das eine angenehmere Unterlage für eine Beurlaubung als eine noch im Entstehen begriffene Umhabilitation, von der ich besser noch nichts sage. Ich bin ja Nagell gegenüber dadurch garnicht gebunden, habe die in Aussicht genommene Skandinavienreise auch nicht von seiner Aufforderung abhängig gemacht und eine evtl. Aufforderung zu Vorträgen auch nur als Unterlage für die Beurlaubung erbeten. Wenn nun nachträglich sich die Situation ändert, kann ich ja immer noch absagen oder einer Aufforderung etwa im März–April nachkommen. In den Ferien halte ich mich ja sowieso selten in einer vernünftigen geographischen Breite auf, und bis dahin ist vielleicht die Umhabilitation nach Kiel schon entschieden. Es wäre mir sogar am angenehmsten, wenn sie sich im Laufe des WS. zum Sommer 1935 entschiede. In Berlin wäre ich ganz gern im Winter. Natürlich kann ich, wenn es erwünscht ist, auch im Winter schon in Kiel sein und auch jederzeit von Berlin herüberkommen.

Nach Pyrmont zur D. M. V.–Tagung zu kommen, habe ich an sich nicht vor; sollte es jedoch wegen der Umhabilitation erwünscht sein, so werde ich mich darauf einrichten. — Von der N. G. bekomme ich monatl. 150 M, sodass ich alles gut abwarten kann. Darf ich Sie noch bitten, beiliegende Antwort Herrn Tornier zu übergeben und F. K. Schmidt, wenn er noch da ist, meinen herzlichen Dank zu übermitteln, dass er bei Kiel an mich gedacht hat!

Mit herzlichem Gruss!

Ihr

Arnold Scholz

Anmerkungen zum 06.07.1934

[1]Tatsächlich erhielt F.K. Schmidt einen Ruf nach Jena, wo er von 1934 bis 1941 lehrte.

3.52 24.08.1934, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) 24. 8. 34.

Lieber Herr Hasse!

Viele herzliche Glückwünsche zu Ihrem Geburtstag! In Kiel hat es mir gut gefallen, wohnte am Wall gegenüber Landesbank, nette Hafenecke. Mein Vortrag hat gefallen. War ausser den Dozenten noch ein früherer Schüler[1)] von mir aus Fbg. da, der jetzt in Kiel stud. Den Nachm. waren wir in Laboe, das mir besonders gefallen hat.

Die Note von Iyanaga[2)] hab' ich jetzt eingehend studiert. Natürlich ist in Def. $1'$ Schur wieder nicht zitiert.[3)] Leider hab' ich auch gerade diese Note nicht für die F. d. M. bek. Darum dies Zitat Feigl noch als Zusatz übergeben. Denn wenn Sie nicht gerade das Referat haben, denkt der Referent sicher nicht dran. — Die Darstellung des Beweises gefällt mir ausserordentl. Man wird so vieles andere schliessen können. Ich reise jetzt nach der Schweiz.

Ihnen und Ihrer Frau Gemahlin alles Gute!

Herzlichst Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 24.08.1934

[1]Vielleicht Hannink, der später (sh. den Brief vom 30.11.1935) bei Scholz zu promovieren begann.

[2]Iyanagas Strahlidealsatze-Note [144]; vgl. den Brief vom 05.06.1931.

[3]Eine Anspielung auf das politische Klima, in welchem es nicht mehr opportun war, jüdische Autoren zu zitieren.

3.53 05.10.1934, Scholz an Hasse, mit Anlage

Arnold Scholz
Bln–Schöneberg 5
Badensche Str. 54

Berlin, 5. X. 34.

Lieber Herr Hasse!

Für Ihre Karte aus Tuttlingen und die Wünsche für Kiel und alle zukünftigen Geburtstage herzlichen Dank! Mein Geburtstag 24. 12. 04. ist übrigens an der Kompositionsreihe der $\mathfrak{S}_4$ leicht zu merken[1)]. Von Kiel hab' ich betreffs Lehrauftrag noch nichts wieder gehört; nur durch Kaluza, dass er noch zumindest sehr unsicher ist. Nun, das hat ja vorläufig noch Zeit, da ich ja noch mein Notgemeinschafts–Stipendium hab', das mir jetzt allerdings von 150– auf 125– herabgesetzt ist und für Oktober noch nicht eingegangen. Jedenfalls geh' ich Ende Oktober nach Kiel; vom Bad. Min. aus bin ich vorläufig „zur Aufnahme einer Lehrtätigkeit an der Uni Kiel beurlaubt". So ist es am besten.

Freu' mich auch, dass die Pyrmonter Tagung schliesslich gut abgelaufen ist. Nur verstehe ich nicht, dass man nicht Perron als Führer behalten hat, wo er sich doch so gut bewährt hat. Wollte er nicht mehr?

Während der Tagung war ich noch in Cresta–Avers (1963 m). Leider hab' ich Fräulein Taussky nicht mehr gesehen. Wir wollten eigentlich von Sargans bis Basel zusammenfahren; sie konnte dann aber erst 4 Tage später fahren und ist jetzt wohl in Bryn Mawr angelangt. Hoffentlich wird Frl. Noether sie später als Assistentin[2)] behalten können. Sie sprach im Juli von Assistenzmöglichkeiten.

Ihre D. M. V.–Aufgabe hab' ich mir jetzt überlegt. Ich hab' die Frage nicht ganz im Kopf, aber ich glaube, sie lautete: Wann lässt sich ein gegebener Körper K_m/K_0, zyklisch vom Grade ℓ^m, zu einem zyklischen Körper K_n/K_0 vom Grade ℓ^n erweitern?

Antwort: Dann und nur dann, wenn alle in K_m/K_0 verzweigten Primstellen $\mathfrak{p}$ entweder in ℓ aufgehen oder ihre Norm $N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \ (\ell^{n'})$; $n' = n - n_0$; K_{n_0} Trägheitskörper von $\mathfrak{p}$.

Dabei bedeute

$$N(\mathfrak{p}) \quad \text{die} \quad \text{gewöhnliche (pos.) Idealnorm für Ideale } \mathfrak{p}\,,$$
$$N(\mathfrak{p}_\infty) \quad = \quad -1 \qquad \text{(oft zweckmässige Bezeichnung')}\,.$$

Insbesondere ist ein *absoluter* Klk. immer erweiterbar; es dürfen aber keine verzweigten unendl. Primstellen vorkommen: wenn K_m total imaginär, muss es auch K_0 schon sein. Klassenkörpertheoretisch — sicher am einfachsten so zu behandeln — lautet die Frage: Gegeben in K_0 eine zyklische Einteilung in ℓ^m Idealklassen (Führer f); wann in ℓ^n Klassen zyklisch aufspaltbar?

Zu be–weisen:

1. Dann und nur dann, wenn es die hierdurch gegebene Zahlrestklasseneinteilung mod f zulässt. (Man kann also den absoluten Klassenkörperteil von K_m/K_0 gleich zum Grundkörper machen.)

2. Für eine Zahlrestklasseneinteilung mod f ist die Aufspaltung in eine Einteilung mod fq, zyklisch von der Ordnung ℓ^n, möglich, wenn für $\mathfrak{p}|f$ entweder $\mathfrak{p}|\ell$ oder $N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \ (\ell^{n'})$.

   (Bei 2. brauchen die Einheiten nicht in der Hauptklasse liegen zu bleiben, und es reicht dann schon $q = 1$ für $(\ell, f) = 1$.)

Beweis für 2. Kann ich übergehen. **Beweis für 1.**:

a) $\boldsymbol{f = 1}$: Ideale $\mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2, \ldots, \mathfrak{j}_r$ repräsentieren ℓ–Basis der abs. Idealklgr. in K_0. $\mathfrak{j}_1$ etwa $\not< H(K_m/K_0)$. $\mathfrak{j}_1^{\ell^m} < H$. $\dfrac{\mathfrak{j}_\rho < \mathfrak{j}_1^{a_\rho} H}{\mathfrak{j}_\rho \mathfrak{j}_1^{-a_\rho} = \mathfrak{h}_\rho < H}$.

Hier jedes Hauptideal $(\gamma) < H$: Speziell:

$$(\gamma) = \mathfrak{j}_1^{c_1 \ell^{m_1}} \mathfrak{j}_2^{c_2 \ell^{m_2}} \cdots \mathfrak{j}_r^{c_r \ell^{m_r}} = \mathfrak{j}_1^{k \ell^m} \prod_{\rho=2}^{r} \mathfrak{h}_\rho^{c_\rho \ell^{m_\rho}} < H .$$

wenn $m_1, \ldots, m_r$ die Ordnungen der Basisklassen.

(Weil $\prod \mathfrak{h}_\rho^{\cdots} < H$, muss der Exp. von $\mathfrak{j}_1$ durch ℓ^m teilbar sein, damit $(\gamma) < H$.)

Nun soll in K_0 ein Primideal q mit $N(q) \equiv 1 \ (\ell^{n-m})$ bestimmt werden, für das

$$\left(\frac{\gamma}{q}\right)_{\ell^{n-m}} = \zeta^k = \chi(\gamma) ,$$

wenn γ ein Potenzprodukt der $\mathfrak{h}_\rho$ ist und $= \mathfrak{j}_1^{k\ell^m} \prod \mathfrak{h}_\rho^{\cdots}$. (Am besten wählt man $\mathfrak{j}_1, \ldots \mathfrak{j}_r$ als Primideale; dann sieht man sofort die Eindeutigkeit der Darstellung.)

Da man diese Potenzrestbed. ja nur für $\gamma_1 = \mathfrak{j}_1^{\ell^{m_1}}, \ldots \gamma_r = \mathfrak{j}_r^{\ell^{m_r}}$ zuzüglich eines ℓ–Fundamentalsystems von Einheiten aufzustellen braucht und diese ℓ–unabh. sind, lassen sie sich nach dem Hilbertschen Existenzsatz befriedigen. Insbesondere gilt $\left(\frac{\varepsilon}{q}\right) = 1$.

Jetzt gibt es eine zyklische Idealklasseneinteilung mod q von der Ordg. ℓ^n, deren Hauptklasse H^n in H enthalten ist:

Ist $\mathfrak{j} = \alpha \mathfrak{j}_1^{x_1} \cdots \mathfrak{j}_r^{x_r} = \alpha \mathfrak{j}_1^{x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r} \prod_{\rho=2}^{r} \mathfrak{h}_\rho^{x_\rho}$ und $\chi(\alpha) = \zeta^{x_0}$ (Charakter der Ordg. ℓ^{n-m} mod q), so $\mathfrak{j} < H^n$ für $x_0 \ell^m + x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_r x_r \equiv 0 \; (\ell^n)$.

b) $\boldsymbol{f = \prod_{\tau=1}^{t} \mathfrak{p}_\tau^{v}}$: $\mathfrak{j}_1, \ldots \mathfrak{j}_r$; $\mathfrak{h}_2, \ldots \mathfrak{h}_r$ wie vorher. Ausserdem

(Primitivreste Basis) $\alpha_1, \ldots \alpha_{t'}$ mod f $\big(t' \geqq t;\; t' = t$ für $(f, \ell) = 1\big)$

$\alpha_\tau = \alpha_1^{c_\tau} \cdot \beta_\tau$ mit $\beta_\tau < H$

Dazu: $\boldsymbol{\mathfrak{h}_1 = \alpha_1^{-1} \mathfrak{j}_1^{\ell^{n_1}} < H}$, wo K_{n_1} vom Grade ℓ^{n_1} maximaler Unterkörper von K_m mit $f = 1$.

($\mathfrak{p}_1$ sei dann ein maximal–verzweigter Primteiler von $f(K_m)$, also eine ℓ^{m-n_1}–te Potenz in K_m, allgemein sei $\mathfrak{p}_\tau$ eine ℓ^{m-n_τ}–te Potenz, und es sei α_1 ein Primitivrest mod $\mathfrak{p}_1$ — d. h. für $\mathfrak{p}_1 | \ell$ eines der Basiselemente, das nicht mehr zu K_{n_1+1} gehört — der gleichzeitig $\equiv 1$ nach den übrigen Teilern von f.

In der gegebenen Klasseneinteilung $[K_m]$ wird die Hauptklasse H^m erzeugt aus

$$\boxed{H^m} \qquad \left.\begin{matrix} \mathfrak{h}_1, & \mathfrak{h}_2, & \ldots & \mathfrak{h}_r \\ \alpha_1^{\ell^{m-n_1}}, & \beta_2, & \ldots & \beta_{t'} \end{matrix}\right\} \text{ und dem Strahl mod } f\,.$$

Diese lässt sich zu einer zyklischen Einteilung $[K_n]$ der Ordg. ℓ^n aufspalten, deren Hauptklasse H^n wieder

$$\mathfrak{h}_1, \ldots \mathfrak{h}_r;\; \beta_2, \ldots \beta_{t'}$$

enthält, statt $\alpha_1^{\ell^{m-n_1}}$ aber erst $\alpha_1^{\ell^{n-n_1}}$:

$$\boxed{H^n} \qquad \left.\begin{matrix} & \mathfrak{h}_1, & \mathfrak{h}_2, & \ldots & \mathfrak{h}_r \\ \alpha_0^{-1} \cdot \alpha_1^{\ell^{m-n_1}}, & \alpha_1^{\ell^{n-n_1}}, & \beta_2, & \ldots & \beta_{t'} \end{matrix}\right\} \text{ und Strahl mod } fq\,^{1}.$$

Wo q passend gewähltes Zusatz–Primideal und α_0 Primitivrest mod q, $\equiv 1$ mod f.

Bedingungen für q:

1) $\boldsymbol{N(q) \equiv 1 \; (\ell^{n-m})}$

2) Wie diese Bedingungen explizit ausfallen, ist für den Beweis nebensächlich. Da sie zu wenig anschaulich, lässt man sie vielleicht besser aus der Darstellung. Man verrechnet sich sonst bloss, d. h. ich wenigstens, sobald ich mit Buchstaben rechne!

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{j}_\sigma^{\ell^{m_\sigma}} &= \gamma_\sigma \quad (\sigma = 1, \ldots r) \\ &= \alpha_1^{k_\sigma} \cdot \prod_{\rho=1}^{r} \mathfrak{h}_\rho^{\cdots} \end{aligned}\right\} : \quad \begin{aligned} &\Big(\frac{\gamma_\sigma \alpha_1^{-k_\sigma}}{q}\Big)_{\ell^{n-m}} = \Big(\frac{\gamma_\sigma^{-1} \alpha_1^{+k_\sigma}}{\mathfrak{p}_1}\Big)_{\ell^{n-n_1}}^{-1}. \\ &\text{Einheiten: } \Big(\frac{\varepsilon}{q}\Big)_{\ell^{n-m}} = \Pi \Big(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}_\tau}\Big)_{\ell^{n-n_\tau}} \end{aligned}$$

Folgt wie oben für $f = 1$.

[1] Vermerk in offenbar anderer Handschrift: 'wo .. ?' oder 'wo .. !'

H^n ist auch so charakterisierbar:[2]

$$\mathfrak{j} = \alpha \mathfrak{h}_1^{i_1} \cdots \mathfrak{h}_r^{i_r} < H^n, \quad \text{wenn} \quad \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{q}}\right)_{\boldsymbol{\ell^{n-m}}} \prod \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\mathfrak{p}_\tau}}\right)_{\boldsymbol{\ell^{n-n_\tau}}} = \mathbf{1}\,.$$

(Dies für $\mathfrak{p}_\tau \nmid \ell$; andernfalls muss man direkt vom Charakter sprechen. Die Exponenten c_τ auf S. 4 unten fallen bei passender Wahl der Primitivreste aus: $c_\tau = \ell^{n_\tau - n_1}$).

Die formale Durchführung macht mal wieder mehr Schwierigkeiten als die ganze Überlegung. Die verschiedene Behandlung der Fälle $f = 1$ und $f \neq 1$ scheint mir unvermeidlich. — Ich werde dann die Sache mit besseren Bezeichnungen und ohne unnötiges Überspringen auf die zugehörigen Klassenkörper während des Klasseneinteilungsbeweises als D. M. V.–Lösung einsenden.

Mit herzlichem Gruss.

Ihr

Arnold Scholz.

[2] Mit Pfeil $\updownarrow$ zwischen der Zeile 'Einheiten: ...' oben und der Gleichung '$\cdots = 1$' unten.

D. M. V.

Lösungen

169. Antwort: Dann und nur dann lässt sich der zyklische Körper K_1/k vom Grade ℓ in einen zyklischen Körper K_n/k vom Grade ℓ^n einbetten, wenn alle Diskriminantenprimteiler von K_1/k entweder in ℓ aufgehen oder eine Norm $\equiv 1 \bmod \ell^n$ haben — bei Adjunktion des Körpers L_n der ℓ^n–ten Einheitswurzeln also Relativnormen (K_1L_n/K_1) sind — und ausserdem $(\ell = 2)$ eine und damit jede Gleichungsdiskriminante für K_1/k total positiv (Quadratsumme in k) ist.

Insbesondere lässt sich über k *jeder* K_1 in einen K_n einbetten, wenn L_n in k liegt. (Es genügt, dass der ℓ–Teil von L_n in k liegt, und dies ist auch notwendig, was auf ähnliche Weise bewiesen werden kann wie das Resultat der gegebenen Aufgaben)

Beweis: Aufgrund der Klassenkörpertheorie ist die gestellte Frage gleichbedeutend mit der folgenden: Gegeben im Körper k eine zyklische Idealklasseneinteilung mod $\mathfrak{f}$ von der Ordnung ℓ, d. h. eine Einteilung der zum ganzen Ideal $\mathfrak{f}$ teilerfremden Ideale aus k in eine Gruppe von ℓ Klassen, deren Hauptklasse alle Ideale (α) mit $\alpha \equiv 1\ (\mathfrak{f})$ enthält. Wobei noch $\mathfrak{f}$ der Führer der Einteilung, d. h. durch keinen Teiler von $\mathfrak{f}$ ersetzbar sei. Frage: Wann gibt es eine zyklische Klasseneinteilung der Ordnung ℓ^n, die eine Aufspaltung der gegebenen ist ?

Antwort: wenn für Primteiler $\mathfrak{p}|\mathfrak{f}$ entweder $\mathfrak{p}|\ell$ oder $N(\mathfrak{p}) \equiv 1\ (\ell^n)$ gilt.

Bei dieser Umschreibung der gestellten Frage haben wir die Möglichkeit übergangen, dass die zu einem Klassenkörper gehörige Klasseneinteilung von Vorzeichenbedingungen für das obengenannte α und seine absoluten Konjugierten abhängig sein kann, und dies ist dann der Fall, wenn $\ell = 2$ und K_1/k „relativ–imaginär", d. h. wenigstens ein K_1^S imaginär (–quadratisch) über reellem k^S ist bei Anwendung irgendeines Isomorphismus S. Oder eben: wenn die Gleichungsdiskriminante nicht total–positiv ist. Da aber der Unterkörper 2^{n-1}–ten Grades eines zyklischen Körpers 2^n–ten Grades bei reellem Grundkörper noch reell ist, kommt ein relativ–imaginärer K_1/k für unsere Erweiterungsaufgabe nicht in Frage. Ebenso gehören bei einer zyklischen Klassen–2^n–Teilung in k alle total–positiven $\alpha \equiv 1$ nach gewissem $\mathfrak{m}$ in die Hauptklasse und dann auch jedes $\delta \equiv 1$ (mit beliebiger Vorzeichenverteilung) im Quadrat. Daher ist die untergeordnete Klassen–2^{n-1}–Teilung noch frei von Vorzeichenbedingungen und erst recht jede Klassenzweiteilung, die sich zu einer zyklischen 2^n–Teilung aufspalten lässt.

Wir dürfen also die Frage in der angegebenen Klassenkörpertheoretischen Umschreibung beantworten und tun dies erst für $\mathfrak{f} = 1$, wo die Aufspaltung immer möglich sein soll, und dann für $\mathfrak{f} \neq 1$.

I. $\mathfrak{f} = \mathbf{1}$. Wie beweisen: Es gibt eine zyklische Einteilung in ℓ^n Klassen nach einem Primführer $\mathfrak{q}$, die die gegebene einbegreift.

Es sei $\mathfrak{j}_1, \dots, \mathfrak{j}_e$ ein Repräsentantensystem für eine Basis der vollständigen absoluten ℓ–Klassengruppe von k, d. h. für jedes Ideal $\mathfrak{j}$ gilt eine Gleichung $\mathfrak{j}^x = \xi \mathfrak{j}_1^{x_1} \cdots \mathfrak{j}_e^{x_e}$ mit $(x, \ell) = 1$ und x_i $(i = 1, \dots, e)$ eindeutig mod ℓ_i, der kleinsten Potenz von ℓ, für die $\mathfrak{j}_i^{\ell_i} = (\gamma_i)$ Zahlideal. Ferner sei $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ eine ℓ–Basis der k–Einheiten: jede Einheit aus k darstellbar $\varepsilon = \varepsilon_1^{x_1} \cdots \varepsilon_r^{x_r} \eta^\ell$; r minimal.

Da die gegebene Idealgruppe H vom Index ℓ aus einem Teil der absoluten Idealklassen besteht, liegt wenigstens einer der Repräsentanten, etwa $\mathfrak{j}_1$, ausserhalb H, während sich dann die andern $\mathfrak{j}_i = \mathfrak{j}_1^{a_i} \mathfrak{h}_i$ mit $\mathfrak{h}_i < H$ ausdrücken lassen. Nun setze man einen Charakter

$$\chi(\gamma_1) = \zeta^{\ell_1},\ \chi(\gamma_2) = \zeta^{a_2 \ell_2},\ \dots,\ \chi(\gamma_e) = \zeta^{a_e \ell_e};\ \chi(\varepsilon_\rho) = 1$$

an, wo ζ primitive ℓ^n–te Einheitswurzel ist, die Charaktere aber schlimmstenfalls ℓ^{n-1}–te Einheitswurzeln sind, da die Exponenten durch ℓ teilbar sind, und bestimme einen zugehörigen Primmodul $\mathfrak{q}$, dessen Primitivrest α den Charakter $\chi(\alpha) = \zeta^\ell$ habe. Also χ soll ein ℓ^{n-1}–ter Potenzrestcharakter mod $\mathfrak{q}$ sein und daher $N(\mathfrak{q}) \equiv 1$ (ℓ^{n-1}). Ein solches $\mathfrak{q}$ existiert nach Hilbert, weil $\gamma_1, \dots, \gamma_e, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ ℓ–unabhängig sind. Jetzt ist folgende Klasseneinteilung möglich:

Die Hauptklasse $\overline{H}$ soll aus $\mathfrak{h}_1 = \alpha^{-1} \mathfrak{j}_1^\ell, \mathfrak{h}_2, \dots, \mathfrak{h}_e$ und den ℓ^{n-1}–ten Potenzresten mod $\mathfrak{q}$ erzeugt werden. Es gilt $\overline{H} < H = \overline{H}(\alpha)$, und die Klassengruppe nach $\overline{H}$ ist zyklisch von der Ordnung ℓ^n, repräsentierbar durch die Potenzen von $\mathfrak{j}_1$, wobei $\mathfrak{j}_1^\ell$ durch α ersetzbar ist, und es liegt wirklich erst $\alpha^{\ell^{n-1}}$ in $\overline{H}$: unser Charakter χ lässt sich wegen $\chi(\varepsilon) = 1$ als Idealcharakter (mod $\mathfrak{q}$) auffassen und dann auf alle (zu $\mathfrak{q}$ fremden) Ideale ausdehnen durch die Festsetzung

$$\chi(\mathfrak{j}_1) = \zeta\,;\ \chi(\mathfrak{j}_2) = \zeta^{a_2},\ \dots,\ \chi(\mathfrak{j}_e) = \zeta^{a_e}\,.$$

$\chi(\mathfrak{j}) = 1$ definiert dann die Hauptklasse $\overline{H}$. Insbesondere gilt $\chi(\mathfrak{h}_i) = 1\,;\ i = 1, \dots, e$, und jedes aus den $\mathfrak{h}_i$ zusammengesetzte Zahlideal ist ℓ^{n-1}–ter Rest mod $\mathfrak{q}$.

II. $\mathfrak{f} \neq \mathbf{1}$. Da hier die Zahlideale nicht alle in der gegebenen Idealgruppe H vom Index ℓ liegen, verteilen sie sich auf alle ℓ Klassen; diese definieren daher einen ℓ–ten Restcharakter χ_1 mod $\mathfrak{f}$ durch $\chi_1(\gamma) = 1$ für $(\gamma) < H$. Die Basisrepräsentanten $\mathfrak{j}_1, \dots, \mathfrak{j}_e$ für die *absoluten* Idealklassengruppen lassen sich hier im Gegensatz zu I. als Ideale aus H wählen durch Multiplikation mit einem passenden Rest mod $\mathfrak{f}$. Bei der Aufspaltung der Klasseneinteilung zu einer zyklischen der Ordnung ℓ^n bleibt nun ein Zahlideal (α_1) mit $\chi_1(\alpha_1) = \zeta_1$ (primitive ℓ–te Ew.) in der erzeugenden Idealklasse. Es muss also einen ℓ^n–ten Potenzrestcharakter χ_n geben, dessen ℓ^{n-1}–te Potenz χ_1 ist.

Wir beweisen nun: **1)** Wenn es einen χ_n gibt, so auch einen χ_n mod $\mathfrak{f}'$, wo $\mathfrak{f}'$ dieselben Primteiler wie $\mathfrak{f}$ enthält, nur die ℓ–Teiler in höherer Potenz. Es muss dann $N(\mathfrak{p}) \equiv 1\ (\ell^n)$ sein für $\mathfrak{p}|\mathfrak{f}$ und $(\mathfrak{p}, \ell) = 1$.

2) Es gibt dann auch eine zugehörige Idealklasseneinteilung mod $\mathfrak{f}'\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}$ passendes Primideal.

Zu **1**. Ist $\mathfrak{p}_1$ ein nicht in ℓ aufgehender Primteiler von $\mathfrak{f}$, der also $\mathfrak{f}$ nur in erster Potenz teilt, so gilt z. B. $\chi_1(\alpha_1) = \zeta_1$ für einen Primitivrest α_1 mod $\mathfrak{p}_1$, der etwa $\equiv 1$ mod $\mathfrak{k}$, wo $\mathfrak{k}\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{f}\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}$ beliebig prim zu $\mathfrak{p}_1$ ist. Soll nun χ_n mit $\chi_n(\alpha_1) = \zeta$ (primitive ℓ^n–te Ew.) ein Charakter mod $\mathfrak{f}\mathfrak{m}$ werden, so muss α_1 eine durch ℓ^n teilbare Ordnung mod $\mathfrak{f}\mathfrak{m}$ haben, also $N(\mathfrak{p}_1) \equiv 1\ (\ell^n)$ sein. — Die Ordnung wenigstens eines Basiselementes mod ℓ^x kann dagegen mit x beliebig hoch geschraubt werden. Unter den angegebenen Bedingungen für $\mathfrak{f}$ existiert daher auch ein Charakter χ_n mod $\mathfrak{f}'$, dessen ℓ^{n-1}–te Potenz χ_1 ist.

Zu **2**. Dieser Charakter χ_n braucht noch keine Idealklasseneinteilung der Ordnung ℓ^n zu liefern; denn es braucht hier für $\gamma_1, \ldots, \gamma_e$; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ (Bezeichnung wie oben) nur $\chi_1 = 1$, nicht $\chi_n = 1$ zu gelten, damit $\mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_e < H$; $(\alpha) < H$ nur für $\chi_1(\alpha) = 1$. Bestimmt man jetzt aber ein Primideal $\mathfrak{q}$ mit einem ℓ^{n-1}–ten Potenzrestcharakter χ so, dass

$$\chi(\gamma_i) = \chi_n(\gamma_i)\,;\ \chi(\varepsilon_\rho) = \chi_n(\varepsilon_\rho)\,,$$

so definiert der Quotientencharakter eine zyklische Klassen–ℓ^n–Teilung mod $\mathfrak{f}'\mathfrak{q}$, deren Hauptklasse in H liegt.

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 05.10.1934

[1]Anscheinend hatte Hasse das Datum von Scholz' Geburtstag vergessen, und als Scholz ihm zum Geburtstag gratulierte, diesem zu allen zukünftigen Geburtstagen gratuliert. Die Kompositionsreihe der symmetrischen Gruppe, $S_4 \vartriangle A_4 \vartriangle V_4$, enthält Gruppen der Ordnung 24, 12 und 4.

[2]Taussky ging nur ein Jahr nach Bryn Mawr, da sie ein mehrjähriges Stipendium am Girton College in England erhalten hatte.

3.54 11.10.1934, Hasse an Scholz

H/Tr. Göttingen, 11. Oktober 34

Herrn
Dr. A r n o l d S c h o l z

Berlin–Schöneberg 5 .

Badenschestr. 54

Lieber Herr Scholz!

Herzlichen Dank für Ihren Brief mit der Lösung meiner Aufgabe. Diese Aufgabe lautet:
169. (Im Anschluss an die v. d. Waerdensche Aufgabe 156) (Dieses Heft S. 57 ff).

> *„Unter welchen Bedingungen lässt sich ein über einem algebraischen Zahlkörper zyklischer Zahlkörper vom Primzahlgrade in einen über zyklischen Körper vom Primzahlpotenzgrade einbetten?"*

Sie haben also sogar mehr gelöst, als ich gefragt hatte[1)] und die Lösung ist dem Resultat nach jedenfalls durchaus befriedigend, wenn auch der Beweis ziemlich kompliziert ist. Bitte senden Sie die endgültige Formulierung gleich an mich ein, denn sie würde mir ja doch zur Prüfung zugesandt werden.

Ich würde es für wünschenswert halten, wenn man die Aufgabe auch auf rein algebraischem Wege lösen könnte, sodass statt der Zahlkörper dann auch abstrakte Körper stehen können. Das dürfte aber sehr schwierig sein, v. d. Waerden hat sich auch daran versucht. Es kommt die R. Brauersche Theorie der regulären Faktorensysteme hinein, die kürzlich von Shoda in besser verständlicher Form dargestellt und verallgemeinert worden ist. (Jap. Journ. of Math. Band 11/1934).

Mit herzlichen Grüssen und besten Wünschen für Kiel

I h r

H. Hasse

Anmerkungen zum 11.10.1934

[1]Hasse hatte nach der Einbettbarkeit eines zyklischen Körpers von Primzahlgrad gefragt, Scholz etwas allgemeiner Körper von Primzahlpotenzgrad betrachtet.

3.55 18.10.1934, Scholz an Hasse

Berlin, 18. Okt. 1934.

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihren Brief vom 11. X.! Es ist mir sehr angenehm, dass ich die Lösungen Ihnen zuschicken kann. Ich habe auch noch gleich 171 – 173 gelöst. Ausserdem habe ich Ihre Aufgabe lieber so gelöst, wie Sie sie gestellt haben, weil dann der Beweis für $f \neq 1$ einfacher und durchsichtiger wird, und möchte dann die Erweiterung $K_m \longrightarrow K_n$ als neue Aufgabe stellen (beiliegend mit Angabe des Resultats). Übrigens hatte ich gerade, als Ihr Brief ankam, entdeckt, dass ich das letzte D. M. V.–Heft mit auf die Reise genommen habe. Den Beweis Ihrer Aufgabe hoffe ich durch das weitgehende Operieren mit Charakteren verständlich gemacht zu haben. Eigentlich denke ich ja immer auch in Charakteren. Die formalen Rechnungen fallen dadurch wirklich fort, wie ich allerdings auf S. 5. Mitte beinah zu spät merkte. Ich habe die Darstellung für meine Begriffe sehr breit gemacht, damit es auch für Aussenstehende verständlich ist. Ausserdem eine ganz gute Darstellungsübung für mich. – Dass die Sache auch rein algebraisch zu beweisen geht, möchte ich fast glauben. Ich will mal Neiss anfragen, ob er sich's schon überlegt hat. Er arbeitet doch immer in der Richtung. Im ganzen ist es doch so: wenn man zum Grundkörper den ℓ^n–ten Kreisteilungskörper adjungiert, dann geht es immer (das wird wohl auch bei abstrakten Körpern richtig sein). Nun fragt es sich: wieweit kann man den adjungierten Teil wieder abhängen? Ist der über dem kreiserweiterten Grundkörper zyklische Körper ℓ^n–ten Grades überhaupt noch Abelsch, Galoissch über dem ursprünglichen Grundkörper?

Beispiel: K_7^3 lässt sich in keinen K^9 einbetten (Grk. rational).[1]

$$*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Aber} K_9^3 \cdot K_7^3 \text{einbettbar in einen} M = K_9^3\ (K^9), \text{d. h.} \\ \text{einen } K^9 \text{ über} K_9^3\ . \\ M \text{ist keinesfalls absolut–Galoissch.} \end{array} \right.$$

Ersetzt man 7 etwa durch 61 oder 73, so ist $K_9^3 \cdot K_{61}^3$ noch in einen absolut–Galoisschen M einbettbar, M aber kein Kreiskörper. Es kommen also hier

[1] Fußnote zur Zeile ∗): „K_n^ℓ bedeutet natürlich wieder: Unterkörper ℓ–ten Grades der n–ten EW. 61 und 73 haben 3 als kubischen Rest. Daher kann M Normalkörper sein. Diesbezügl. füge ich noch eine zweite Aufgabe[1)] für die D. M. V. hinzu."

wieder Prüfung symbolischer Potenzen unter einer ℓ–ten Wurzel zur Untersuchung der Galoisschen Struktur Kummerscher Körper in Frage.

Sonntag, 21. Okt.

Ich habe eben mit Neiss telefoniert; er kann Ihre Aufgabe rein algebraisch lösen, ist aber wegen seines Umzugs (Charlbg. 9, Reichsstr. 103) noch nicht dazu gekommen, sie auszuarbeiten. Ich besuche ihn Mittwoch.

Was die Lösung der v. d. W.–schen Aufgabe 171 betrifft, habe ich die natürlichere 2. Lösung erst nach der kuriosen 1. Lösung gefunden. Vielleicht habe ich aber im Beweis noch einen Umweg gemacht: ich operiere mit dem fertigen Hilbertschen Resultat: $p^{\sum f(e-1)}|\gamma$, das nach Dedekind ebenso für den Kongruenzzerfall richtig, weil γ hier kein ausserwesentl. akzessorischer Diskriminantenteiler. Ich habe aber nicht mehr im Kopf, wie Hilbert schliesst. Vielleicht ist darum der Übergang von der Zerlegung $f(x) \equiv \prod(x - \vartheta_\nu)^{e_\nu}$ mod φ zur rationalen Zerlegung mod φ ein Rücklauf, und ebenso die nur in Gedanken geschehene Benutzung der Dedekindschen Korrespondenz zwischen Kongruenz– und Idealzerfall, indem man hier ganz bei den Kongruenzen bleiben kann und die Teilbarkeit der *Gleichungs*diskr. durch $p^{\sum f(e-1)}$ aus der Kongruenzzerlegung $f(x) \equiv \prod (x^f + a_1 x^{f-1} + \cdots)^e$ mod p direkt folgt. Ich könnte schliesslich den Beweis noch etwas anders fassen.

Bei den Holzerschen Aufgaben (173) fiel mir ein:
ich hatte einmal eine Lösung der Grünschen Aufg. 153 eingesandt und auch Korrekturen bekommen. Soviel ich weiss, ist aber die Lösung nicht erschienen. Harrt sie noch auf weitere?

Wann waren Sie eigentlich in Helsingfors? Sie haben doch da vorgetragen? Schöne Lage, nicht?

Wie geht es Herrn Deuring? Ist er jetzt eigentlich in Göttingen? Bleibt er da? Ich habe gerade seine Cebotarev-sche[2] Dichtigkeitsnote[3] für die Fortschritte referiert. Gibt es denn aber einen Beweis des Artinschen Rez. gesetzes, der die Tschebotarjowsche Durchkreuzungsmethode nicht benutzt? Es ist dort so auf Vermeidung dieser Methode Wert gelegt. Natürlich hat es auch ohne das Sinn, zu zeigen, dass der Tsch. sche Dichtesatz so viel einfacher aus dem Reziprozitätsgesetz folgt. Methodisch ist diese Umgruppierung so ähnlich, wie, wenn man die Theorie der Charaktere, nachdem man sie schon für Kongruenzklassen hat, dann auf Abelsche Gruppen erweitert.

Grüssen Sie, bitte, Herrn Deuring und auch Herrn Rédei! Er hat mir bei unserer Begegnung in Gött. noch gerade von seinem Dichtigkeitsresultat[4] über die 2–Klgr. quadratischer Zahlkörper berichtet, das bisher einzig seiner Art ist. Andere als Dichtefragen lohnen sich bei $N(\varepsilon) = \pm 1$ kaum mehr. – Das Epsteinsche Resultat (Crelle 171, 243)[5] bleibt übrigens weit hinter

unserem[6)] zurück. Was er beweist, folgt viel einfacher direkt aus der Theorie der quadratischen Formen. Kettenbrüche sind hier ein Umweg.

Mit herzlichem Gruss & besten Semesterwünschen!

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 18.10.1934

[1]Aufgabe 194 wurde in den Jahresberichten mit dem Eingangsdatum 29.10.1934 versehen.

[2]Der Name Cebotarev ist in kyrillischer Schrift geschrieben.

[3]Deuring [70].

[4]Rédei [255].

[5]Sh. Epstein [74]. Paul Epstein wurde am 24. Juli 1871 in Frankfurt/Main geboren. Nach Studium und Promotion in Straßburg war er von 1903 bis 1918 dort Privatdozent; nach dem Krieg wurde das Elsass französisch, und Epstein kehrte nach Frankfurt zurück, wo er eine Anstellung als nichtbeamteter außerordentlicher Professor erhielt. Als Teilnehmer am ersten Weltkrieg durfte Epstein trotz jüdischer Abstammung noch lehren; erst 1935 musste er auf seinen Lehrauftrag verzichten. Als er im August 1939 eine Vorladung der Gestapo erhält, begeht er Selbstmord. In der Körberstraße 16 hat er im Oktober 2014 einen Stolperstein erhalten.

[6]Gemeint sind die Ergebnisse zur Lösbarkeit der Nicht-Pellschen Gleichung von Scholz und Rédei.

3.56 29.10.1934, Hasse an Scholz, Abschrift

Abschrift!

Göttingen, den 29. 10. 34.

Lieber Herr Scholz!

Besten Dank für die Zusendung der Lösungen und Aufgaben. Ich habe die Lösungen von 171 – 173 und die beiden Aufgaben an Bb. eingesandt. Die beiden Lösungen von 171 müssen noch von v. d. Waerden begutachtet werden, was Bb. veranlassen wird. Für 172, 173 habe ich die Garantie übernommen. Wenn Sie bereits Korrekturen einer Lösung der Grünschen Aufgabe 153 bekommen haben, wird wohl die Lösung bald erscheinen. Ich frage deswegen noch einmal bei Bb. an.

Zu Ihrer Lösung meiner Aufgabe 169 möchte ich folgendes bemerken:[1)]

....

Besonders interessieren würde mich, gerade von diesem Gesichtspunkt aus, wenn Neiss wirklich eine rein–algebraische Lösung hätte.

In Helsinki war ich mit Rücksicht auf die Lage hier nicht. Vielleicht gehe ich nächstes Frühjahr.

Herr Deuring ist noch in Leipzig. Er beabsichtigt, sich nächstes Jahr hier zu habilitieren.

Ein Beweis des Artinschen Rez. Ges. ohne Durchkreuzungsmethode ist mein hyperkomplexer in Annalen 107.

Rédei arbeitet jetzt an der Bestimmung aller reell–quadr. Körper mit Eukl. Algorithmus.

Mit herzlichen Grüssen und der Bitte um Stellungsnahme zu meiner obigen Kritik

Ihr.

P. S. Ich habe Ihre Aufgabe, die sich an meine anschliesst, mit Rücksicht auf obige Kritik zunächst gestoppt.

Anmerkungen zum 29.10.1934

[1]Hasse teilt Scholz einen Fehler in dessen Lösung der D.M.V.-Aufgabe 169 mit, welcher vermutlich von Richter entdeckt worden ist; vgl. dessen Zusatz in den Jahresberichten.

Der Scholzsche Fehler steht im Zusammenhang mit der Geschichte des Satzes von Grunwald-Wang, die deshalb hier kurz rekapituliert sei. Grunwald, ein Schüler von Hasse, hatte 1933 in [104] einen Existenzsatz bewiesen, wonach es zu endlich vielen vorgegebenen zyklischen Erweiterungen $L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$, deren Grade eine Zahl n teilen, immer eine globale Erweiterung L/K vom Grad n mit diesen Lokalisierungen gibt. Whaples [332] gab 1942 einen zweiten „Beweis“, doch 1948 fand Wang [328] ein Gegenbeispiel für gerades n. In seiner von Emil Artin betreuten Dissertation [329] bewies Wang dann eine korrigierte Version des Satzes (in der außer den lokalen Bedingungen noch eine globale für die Primzahl 2 auftaucht), der heute Satz von Grunwald-Wang heißt.

Zum Zeitpunkt dieses Briefes, als Scholz seine „Lösung“ des Hasseschen Problems einsandte, arbeitete Richter unter van der Waerden bereits an seiner Dissertation [270] über Einbettungsprobleme. Dass die Scholzsche Lösung, die nur lokale Bedingungen enthielt, falsch sein musste, war ihm sofort klar; dass das Richtersche Gegenbeispiel auch eines für den Grunwaldschen Satz ist, hat Richter anscheinend ebensowenig bemerkt wie Hasse.

3.57 06.11.1934, Scholz an Hasse, Fragment

Arnold Scholz
Kiel, Schlossgarten 5^{II}.

Kiel, 6. XI. 34.

Lieber Herr Hasse!

Für Ihren Brief vom 29. X., der mir hierher nachgesandt wurde, vielen Dank! Also so ist das, dass der Aufgabensteller jedesmal die eingegangenen Lösungen zur Begutachtung vorlegt bekommt! Ich dachte erst, Sie kriegten die ganze Algebra.

Am 30. X. bin ich in Kiel[1)] angelangt, mittags, und hab' erst abends eine einigermassen brauchbare Wohnung gefunden, d. h. ein ziemlich längliches Zimmer, kein Bad, wenigstens zentral gelegen und guter Blick; hab' ausserdem den zweifelhaften Vorteil, in der selben Wohnung zu hausen, wo der Komponist Loewe – wenigstens noch einen Tag vor Ph. Furtwänglers Geburt – gestorben ist. Angenehm ist aber unten im Haus die Konditorei Rolfs, deren Schlot das Haus so wärmt, dass ich noch nicht zu heizen brauche. Wir hatten in einer Woche bereits $2^1/_2$ sonnige Tage; am 1. Nov. war ich mit einem ganz neuen Dampfer (Heikendorf) in Labö; es war eigentlich noch eine schönere Stimmung und schärfere Beleuchtung als am 27. Juli. – Die Vorlesungen fangen so allmählich an; wir konnten erst gestern einen einstweiligen Anschlag der Vorlesungen machen, weil wir wegen Hammerstein noch nichts wussten. Er ist noch in Bln. Auf Anfrage beim Min. kam nur der Bescheid, dass man die Akten augenblicklich nicht im Kopfe habe. Wahrscheinlich soll nun Hammerstein berufen wd. Ich habe indessen schon die Erlaubnis zu lesen und muss mich auf zweierlei einrichten: falls H. nicht kommt, übernehme ich Do die Algebra, sonst nächste Woche Mengenlehre u. reelle F. wird dann von der Fakultät gleichzeitig meine Umhabilitation und Lehrauftrag beantragt werden. Hoffentlich klappt nun alles!

Was meine Lösung Ihrer 169 betrifft[2)], so halte ich bei meinem einmal eingeschlagenen Weg die Trennung von $f = 1$ und $f \neq 1$ für wesentlich, wie ich auch schon in meinem ersten Brief (5./8. X. ?) schrieb. Deutlich sieht man das bei der verallgemeinerten Aufgabe: Erweiterung von K_m zu K_n, wo der Beweis für $f = 1$ im Wesentlichen derselbe bleibt, für $f \neq 1$ dagegen komplizierter ausfällt, weil da K_m weder absolut noch rein verzweigt zu sein braucht, sondern einen echten unverzweigten Teil K_h enthalten kann. Man ist

in diesem Falle gezwungen, beim Repräsentantensystem der zugehörigen Idealklassen $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{j}^2$, ... schliesslich $\mathfrak{j}^{\ell^h}$ durch ein Zahlideal α zu ersetzen ($\mathfrak{j}^{\ell^h} \sim \alpha$), um die Charaktere passend bestimmen zu können. Diese Einteilungsmöglkt. enthält den rein–verzweigten Fall, wenn auch in reichlich umständlicher Form, nicht aber den unverzweigten. Auch hier halte ich darum die Vorwegnahme des rein–verzweigten Falles (praktisch durch Vorwegnahme von $m = 1$) für übersichtlicher.

Anmerkungen zum 06.11.1934

[1]Der Transfer von Scholz von Freiburg nach Kiel hat trotz des Doetsch'schen Störfeuers geklappt. In einem Brief vom 31.07.1934 an Tornier, den dieser an den Kieler Dekan Kaluza weiterleitete, steht (sh. [344, S. 461 ff]):

> *Ich kann nur das eine sagen, dass mir ein derartiger Mangel an Pflichtgefühl an deutschen Hochschulen noch nicht vorgekommen ist. Dabei hat der Mann immer verstanden, ganz gut wegzukommen. Er hat das einzige Prinzip: Mit möglichst wenig Anstrengung oder besser gesagt, überhaupt ohne Anstrengung möglichst viel für sich herauszuholen. [...]*
> *Ich verlange von niemandem, dass er Nat[ional]-Soz[ialist] ist, ich bin selbst nicht Parteimitglied. Ich würde aber im Einklang mit den Intentionen der Regierung nur jemanden fördern, der zum mindesten eine positive Einstellung zum heutigen Staat hat. Davon kann bei Sch[olz] keine Rede sein. [...]*
> *Er ist im Gegenteil hier zusammen mit seinem einzigen Freund, den er hat, nämlich Zermelo, als der typische Meckerer bekannt, der nichts lieber sähe, als wenn das nat[ional]-sozialistische Regiment, das im Gegensatz zu dem früheren solchen Charakteren wie er ist, zu Leibe zu gehen droht, so bald wie möglich wieder verschwände. Dass ein solcher Waschlappen wie Sch[olz] einen politischen Einfluss ausüben könnte, ist allerdings ausgeschlossen. [...]*
> *Die Studenten stehen ihm völlig ablehnend gegenüber, sie wollten sogar im vorigen Semester eine Aktion gegen ihn unternehmen, allerdings wohl hauptsächlich, weil er ausschließlich mit Juden und Kommunisten herumlief. Der Führer der Fachschaft hat mir aber erklärt, dass sie, falls sie von irgendeiner Berufung von Sch[olz] an eine andere Universität hören sollten, bei der dortigen Studentenschaft den schärfsten Protest dagegen erheben würden. [...]*
> *Scholz mag mathematisch befähigt sein; gearbeitet hat er allerdings nur in der Zahlentheorie auf einem sehr engen Gebiet und ist auch dort, wie Hasse mir einmal sagte, sehr einseitig. Von allen anderen Dingen versteht er auch rein gar nichts. [...]*
> *Ich persönlich wäre heilfroh, diesen unerfreulichen Menschen hier los zu sein. In dieser Beziehung tun Sie mir also den größten Gefallen, wenn Sie ihn hier wegholen. Aber um der Gerechtigkeit und Objektivität anderen gegenüber willen hielt ich mich dafür verpflichtet, nachzuforschen, auf welchem Wege dieser Etappenkrieger wieder zu einer so schönen Heimatstellung gekommen sein sollte. [...]*
> *[...] und da wundert man sich immer noch, warum es mit der Durchdringung der Hochschulen mit dem neuen Geist gar nicht vorwärts gehen will.*
> *Heil Hitler!*

[2]Zu diesem Zeitpunkt hatte Scholz wohl noch nicht realisiert, dass seine Lösung falsch war; vgl. den folgenden Brief.

3.58 15.11.1934, Scholz an Hasse

Arnold Scholz
Kiel, Schlossgarten 5^{II}.

Kiel, 15. XI. 34.

Lieber Herr Hasse!

Da ich vorige Woche mit meinem Brief nicht weitergekommen bin – ich habe ausser meiner Mengenlehre vorläufig Hammersteins Algebra übernommen, bis zu seinem Eintreffen – will ich unter Einlage des noch gültigen alten Teils lieber wieder von vorn anfangen.

Dass meine Beantwortung Ihrer Aufgabe 169 für Diskr. teiler ℓ falsch ist, hatte ich zuerst aus Ihrer Kritik noch nicht entnommen, da ich in meinem Optimismus glaubte, dass das an Ihrer Beweismethode läge, dass da noch nicht alles herauskäme. Nun hatte ich aber auch die Frage wie Neiss auf Kummersche Weise versucht – der Neisssche Ansatz[1)] [Bln Sitzb. 1920] liefert erst einmal die Notwendigkeit meiner Bedingungen, wie er mir noch vor der Abreise zeigte – und dort vergebens nach der Hinreichendheit gesucht. Bis ich dann ein Gegenbeispiel fand:

$$k = (\sqrt{-3},\ \sqrt{-11})\ ;\ K_1 = k(\sqrt[3]{\omega}),\ \text{wo}\quad \boxed{\varepsilon = \sqrt{-11} + \sqrt{-12} \quad \text{ist Norm.}}$$

$$\longrightarrow \omega = 3 + 2\sqrt{-11}$$

$$\big(\text{Entspr. } R = (\sqrt{-3},\ \sqrt{-p})\ ;\ p \equiv -1\ (4)\big)\ .$$

Soll sich K_1 zu K_2 überhaupt erweitern lassen und ist $K_1(\zeta_\ell) = k(\sqrt[3]{\omega})$ mit $\omega < k(\zeta_\ell)$ so muss $\omega = N(\widetilde{\omega})$ in $k(\zeta_{\ell^2})$ gelten. Notw. u. hinr. Bed. Folgt aus dem Neiss schen Ansatz. Nun ist oben

$$\begin{aligned} \omega &\equiv 3 \pm 8 \pmod{\lambda^3/27} \\ &\not\equiv \pm 1 \pmod 9) \end{aligned}$$

Irgend so ein ω muss es wegen $3 = \lambda\lambda'$ (Zerfall in *versch.* Fakt.) ja auch geben; denn wenn wie hier (und überhaupt bei $(\sqrt{-3},\ \sqrt{-p})$) $\varepsilon = \sqrt{-11} + \sqrt{-12}$ oder $\varepsilon^2 = -23 + 4\sqrt{33}$ Norm in $k(\zeta_9)$ ist, sind die 3–Primteiler dort keine Hauptideale (im 3–Klassenteilungssinne) vor allem ist $k(\zeta_9)$ nicht

eingeschlechtig, und daher gibt es Idealnormen [in] $k(\zeta_9)/k$, die keine Zahlnormen sind, also keine Normenreste mod 3. Mein Idealnormkrit. reicht also nicht aus, weil hier Zahlnorm erforderlich. Im andern Fall, wo ε schon Nichtnorm $\big(R = (\sqrt{-3}, \sqrt{p})\ ;\ p \equiv 1\ (4)\big)$, streikt $\omega = \varepsilon$.

Richtig bleibt an meinem Beweis: I) K_1 ist einbettbar, also die Idealklasseneinteilung aufspaltbar, wenn die korrespondierende Zahlrestklasseneinteilung aufspaltbar. („Trivial" finde ich auch das schon nicht mehr, sobald der Grundkörper nicht rational, weil man doch erst wissen muss, was die Einheiten und Idealklassen machen und die *Ideal*einteilung i. allg. auch einen grösseren Führer erfordert als die *Zahl*einteilung; ich finde es eher überraschend, dass sich ein absoluter Klk. immer einbetten lässt.) II) Die Zahlrestkl. einteilg. ist bei zu ℓ primem Führer verfeinerungsfähig, wenn die Führerteiler Idealnormen in $k(\zeta_{\ell^n})$ sind.

Ob sich für die ℓ–Teiler eine bessere Formulierung findet als die immerhin schon starke Reduktion der Frage durch I), ist die Frage. Eher noch auf Kummerschem Wege; es fragt sich ja auch, wie man den Körper K_1 einführt. Wenn als Wurzelausdruck mit $\sqrt[\ell]{\omega}$ (Lagrange sche Resolvente), so lautet die Antwort:

„Dann und nur dann, wenn es ein η in $k(\zeta_{\ell^n})$ gibt $\big(\eta^\ell < k(\zeta_\ell)\big)$, dass

$$\omega\eta^\ell = N(\xi) \quad \text{in} \quad k(\zeta_{\ell^n})\ .\text{``}$$

Würden Sie das als befriedigende Antwort ansehn für den Fall, dass K_1 durch ω gegeben ist? Es folgt unmittelbar aus dem Neiss schen Ansatz. Man kann aber die Beantwortung noch zerlegen, indem man Ihren Normensatz für zykl. Körper in der zerlegten Form heranzieht:

$$\text{Norm einer Zahl} \quad \approx \quad \begin{cases} \text{Norm eines Ideals } \textit{und} \\ \text{Normenrest nach den Diskr. teilern.} \end{cases}$$

Dann hätte man, dass $\omega\eta^\ell$ und dann auch ω und η^ℓ einzeln Idealnorm sein müssten, und ausserdem $\omega\eta^\ell$ Normenrest mod ℓ. Das wäre eine notw. u. hinr. Bed. Evtl. liesse sich hieraus eine Bedingung für ω allein mod ℓ als Zusatzbedingung zur Idealnormbedingung gewinnen. Für $n = 2$ fällt ja η heraus.

Auf Nicht–Kummerschem Wege muss man eine Bedingung der Art hinzufügen, dass Einheitswurzelreste nach gewissen Potenzen der *einzelnen* Primteiler von ℓ in der Idealgruppe von K_1 liegen müssen, was nur für den Fall eine wirkliche Zusatzbedg. liefert, dass ℓ in k in *verschiedene* Faktoren zerfällt und ausserdem – ich hab' mir das noch nicht genau überlegt – zwar ζ_ℓ, aber nicht ζ_{ℓ^n} in k liegt. ($\zeta_\ell < k$, $\zeta_{\ell^n} \not< k$ war auch beim Reziprozitätsgesetz der unangenehme Fall für den Übergang vom speziellen zum allg. Rez. gesetz.)

Es hat wohl bis Weihnachten Zeit mit der Verbesserung? Ich will dann auch nochmal mit Neiss über seine Methode sprechen. Vielleicht, dass wir dann zusammen eine weitere Lösung einsenden.

Meine Erweiterungsaufgabe $K_m \longrightarrow K_n$ will ich dann überhaupt zurückziehen, wenn Sie nicht meinen, dass es sich lohnt, sie bloss für den Fall der Unverzweigtheit von ℓ in $K_1|k$ zu stellen, oder die Frage lediglich auf die Aufspaltbarkeit der Zahlrestklassen zurückzuführen. Darüber hinaus erwarte ich kein übersichtliches Resultat.

Die Trennung $f = 1$ und $f \neq 1$ (I, II) möchte ich in meinem Beweis beibehalten, da sonst, wie mir scheint, doch nur eine Transformation von $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{II} \end{pmatrix}$ herauskommt. (Selbst bei blosser Reduzibilität von Beweisen $\sim \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$ ziehe ich Trennung vor. Wenn diese nicht zu weit getrieben wird, halte ich sie für übersichtlicher. – Ebenso nehme ich beim Beweis lieber gleich die Angelegenheit der unendlichen Primstellen voraus, weil sie ja doch gleich herausfallen und es sich dann nicht lohnt, sie zu koordinieren. Ausserdem ist hier die direkte Behandlung einfacher als die über die zugehörige Klassengruppe. Trotzdem hab' ich hier beide Methoden nebeneinandergebracht, weil ich das für instruktiv hielt; dieser einfache Zusammenhang wird sonst wenig hervorgehoben.

Wenn ich nur die Fehlerstelle und die Resultatformulierung ändere, wird es wohl so gehen, dass ich Ihnen die Verbesserungen zuschicke, ohne dass Sie mir nochmal das Manuskript schicken. Oder ist das besser?

Mit freundlichem Gruss. Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 15.11.1934

[1]Vgl. Neiß [224].

3.59 19.11.1934, Hasse an Scholz

Professor Dr. H. H a s s e .

Göttingen, den 19. November 34.

Bunsenstr. 3–5

Herrn

Privatdozenten Dr. A. Scholz

K i e l .

Schlossgarten 5 II

Lieber Herr Scholz !

Besten Dank für Ihren Brief 0 und ω [1]. Ich kann mir die Lage Ihrer Wohnung sehr lebhaft vorstellen, da ich selbst sehr oft im Café Rolfs gesessen habe.

Was die Lösung meiner Aufgabe[1)] betrifft so möchte ich selbst dabei nicht als Autor auftreten. Ich finde die Antwort auf klassenkörpertheoretischer Grundlage befriedigend, wenn für die Teiler von ℓ nur gesagt wird, dass die Zahlrestklasseneinteilung aufspaltbar ist. Die Lösung auf Kummerscher Grundlage finde ich insofern nicht befriedigend, als dabei die Voraussetzung über die Einheitswurzeln im Grundkörper gemacht werden muss. Für Ihre Erweiterungsaufgabe würde ich demgemäss ebenfalls vorschlagen, die vorwegzunehmende Antwort so zu fassen, dass die Aufspaltbarkeit der Zahlrestklassen als Bedingung genannt wird und für die Nichtteiler von ℓ die explizite Norm– bezw. Vorzeichenbedingung dafür angegeben wird.

Die Trennung von $f = 1$ und $f \neq 1$ soll mir egal sein. Dagegen finde ich nach wie vor die Vorwegnahme der unendlichen Primstellen bei Ihrer Anordnung der Lösung verständnisstörend und –erschwerend – Es kommt dadurch, meiner Ansicht nach, die Zweiseitigkeit des Beweises nach „notwendig“ und „hinreichend“ nicht klar zum Ausdruck. Diese Zweiseitigkeit muss nach meinem Gefühl das Grundprinzip der Einteilung des Beweises sein und dann erst innerhalb des Beweises für „hinreichend“ eine Unterteilung von $f = 1$ oder $f \neq 1$ kommen. Ich wäre Ihnen sehr dankbar, wenn Sie

[1] Letzterer ist offenbar der Brief vom 15. 11. 1934, dessen Seiten mit ‘ω’ ... ‘$\omega + 3$’ numeriert sind.

sich entschliessen würden, Ihre Lösung nach diesen Gesichtspunkten neu zu schreiben. Natürlich hat es damit Zeit bis Weihnachten, denn es dauert doch einige Zeit, bis die Lösung zum Druck kommt.

Was Sie sonst über Kiel schreiben, hat mich sehr interessiert. Ist Hammerstein inzwischen eingetroffen und wird er dort wirklich zum Nachfolger Fraenkels ernannt werden ?

Mit herzlichen Grüssen

stets Ihr

H. Hasse

Anmerkungen zum 19.11.1934

[1]Hasses Aufgabe 169; vgl. die letzten Briefe.

3.60 04.12.1934, Hasse an Scholz

H./Tr/ 4. Dezember 34

Herrn
Privatdozenten Dr. Arnold Scholz

K i e l .

Schlossgarten 5

Lieber Herr Scholz!

Deuring fragt mich: „Gibt es für einen unverzweigten abelschen Körper K/k stets eine Untergruppe der Ordnung $(K : k)$ der Klassengruppe des Grundkörpers k, die in K kapituliert?“ Könnten Sie mir wohl sagen, ob diese in meinem Bericht II S. 173 ausgesprochene Vermutung inzwischen bewiesen, durch Beispiel widerlegt, oder noch unentschieden ist. Deuring ist auf diese Frage gestossen bei einem Versuch, den Haupt–Idealsatz nach einer Methode zu beweisen, die eine Verallgemeinerung der Hilbertschen Methode für den zyklischen Fall[1)] darstellt.

Mit herzlichen Grüssen Ihr

H. Hasse

Anmerkungen zum 4.12.1934

[1]Gemeint ist Hilberts Satz 94. Die meisten der dazu benutzten Methoden lassen sich kohomologisch auf beliebige abelsche Erweiterungen verallgemeinern; eine Ausnahme, an der bisher alle Versuche gescheitert sind, den Beweis von Satz 94 auf abelsche Erweiterungen auszudehnen, ist das Hebrandsche Lemma. Die kleinsten Gruppen, für die das Hilbertsche Verfahren bisher zu wenig liefert, sind Klassengruppen vom Typ (ℓ^2, ℓ^2) und (ℓ, ℓ, ℓ).

3.61 09.12.1934, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) 9. XII. 34.

Lieber Herr Hasse!

Dass im unverzweigt–Abelschen K/k eine Kapitulation mindestens von der Ordnung $(K : k)$ stattfindet, ist bisher weder bewiesen noch widerlegt, höchstwahrscheinlich aber richtig[1]. Jedoch scheint es mir aussichtslos, diesen verschärften Hauptidealsatz wie überhaupt den H.–I.–Satz auf Hilbertschem Wege zu bew. ohne Zweistufigkeitsbetrachtungen. Schon für zykl. K/k vom Primzahlpotenzgrad ist Satz 91 (Grundeinh.)[2] nur gültig, wenn man unter $[\varepsilon]$ „Einh. der Zwischenk. von K/k und Wurzeln daraus“ versteht, und das hat zur Folge, dass keine *zykl.* Kapitulation der Ordg. $[K : k]$ stattzufinden braucht, sondern nur überhaupt eine dieser Ordg.
Ich weiss nicht, ob Fw. dies Resultat „Hilbertsch” gewonnen hat oder gruppth. Bei zwei Basisel. jedenfalls nur gruppth. Dieser Fall ist, glaub' ich, allg. bew., wenigstens[3] für (ℓ, ℓ). Ich werde Deuring gelegentlich ausführlicher darüber berichten. – Tschebotarjow schickte mir neulich sein Lehrbuch[4] der Galois–Th. I, leicht zu lesen. – Hammerstein ist 24. XI. eingetroffen; hatte einen Reitunfall (Schlüsselbeinbruch). Nächstens mehr. Herzlichen Gruss.

Ihr
Arnold Scholz.

2. XII. besuchte ich Artin.

Anmerkungen zum 09.12.1934

[1]Der Hauptidealsatz der Klassenkörpertheorie besagt nur, dass alle Ideale eines Zahlkörpers im Hilbert-Klassenkörper zu Hauptidealen werden. Hilbert hatte zuvor in seinem Zahlbericht (Satz 94) bewiesen, dass in einer zyklischen Erweiterung von Primzahlgrad immer eine Untergruppe der Ordnung p kapitulieren muss. Dass in jeder unverzweigten abelschen Erweiterung vom Grad $(K : k)$ mindestens eine Untergruppe der Klassengruppe der Ordnung $(K : k)$ kapituliert, ist eine natürliche Vermutung, die sich bereits im zweiten Teil des Hasseschen Klassenkörperberichts findet. Bewiesen wurde diese Vermutung allerdings erst viel später durch Suzuki, und zwar, wie Scholz richtig vorausgesagt hat, durch gruppentheoretische Methoden. Eine andere mögliche Verschärfung, mit der sich Furtwängler [91] und Olga Taussky [Ta32a] befasst hatten, besagte, dass die in den zyklischen Teilerweiterungen des Klassenkörpers eines Zahlkörpers mit elementarabelscher Klassengruppe kapitulierenden Idealklassen die Klassengruppe erzeugen; dazu hatte Scholz bereits im Brief vom 06.02.1931 ein Gegenbeispiel konstruiert.

[2]Hilberts Satz 91 ist die Grundlage für seine Sätze 92 und 94; in Satz 91 wird die Existenz gewisser Relativeinheiten gezeigt; Satz 92, der im wesentlichen kohomologischer Natur ist, besagt, dass in zyklischen Erweiterungen K/k von Primzahlgrad p die Gruppe $E_K[N]$ aller Einheiten mit Relativnorm 1 echt größer ist als die Untergruppe der Einheiten $E_K^{1-\sigma}$, wo σ eine Erzeugende der Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ ist. Derartige kohomologische Ergebnisse, in deren Beweis u.a. auch Herbrandquotienten verwendet werden, lassen sich nur sehr schwer oder gar nicht auf nicht-zyklische Erweiterungen verallgemeinern.

[3]In der Tat lässt sich die Behauptung, dass in einer unverzweigten Erweiterung vom Typ (ℓ, ℓ) immer eine Untergruppe der Ordnung ℓ^2 kapituliert, durch Zurückführung auf den zyklischen Fall beweisen. Allgemeiner geht der Beweis sogar für den Typ (ℓ^m, ℓ) durch; mehr scheint aber nicht drin zu sein.

[4]Tschebotarjow [320].

3.62 03.01.1935, Scholz an Hasse

Arnold Scholz
Schlossgarten 5^{II}

Berlin, 3. I. 35.

Lieber Herr Hasse!

Ein frohes Neues Jahr wünsche ich Ihnen vor allem! Zugleich möchte ich Sie als Schatzmeister der D. M. V. bitten, meinen Jahresbeitrag auf 3 M zu ermässigen, da eine Bezahlung für den versprochenen Lehrauftrag in weite Ferne gerückt ist. Es wird jetzt, wie ich hörte, „bestenfalls ein unbezahlter Lehrauftrag“ vorläufig daraus werden, der wenigstens den Zweck hätte, alle eine Umhabilitation verzögernden Formalitäten als erledigt gelten zu lassen. So muss ich mich vorläufig noch mit der N. G. behelfen. – Die Berufung Hammersteins wird jetzt in den Weihnachtsferien gleichzeitig mit der von F. K. Schmidt[1)] und Sperner[2)] erfolgt sein. (Dass Sperner in Kgsbg. und Hoheisel wieder in Breslau, wissen Sie wohl. Ebenso dass Krafft Szegö vertritt. Specht und Fitting[3)] bleiben in Kgsbg.)

Die neue Semestereinteilung ist ja für skandinavische Vorträge ungünstig. Wenn man noch einmal im dortigen Semester erscheinen will, muss man wohl diesen März benutzen. Reisen Sie da noch nach Helsingfors? Ich denke jedenfalls noch daran, um die Zeit nach Uppsala zu fahren, falls ich einen Kreditbrief bekomme. Im April wär’s natürlich schöner.

Endlich sende ich Ihnen auch erneut die Lösung[4)] von 169. Die Neuformulierung machte schon eine gleichmässige Behandlg. der endlichen und unendl. Primstellen nötig, und ich habe sie nun eng zusammengeschmiedet. Um so weiter habe ich $f = 1$ und $f \neq 1$ auch in der Formulierung auseinandergerissen. Da sonst leicht die Übersicht verloren geht, wegen der Extrawurst für die ℓ–Teiler, habe ich den Beweis für die Notwendigkeit und Hinreichendheit der Bedingungen ganz getrennt, und da ich die unendlichen Primstellen doch erst los werden wollte, mit der Notw. begonnen, wodurch $f = 1$ an den Schluss geriet.

Die Erweiterungsaufgabe[5)] lege ich in veränderter hoffentlich brauchbarer Fassung auch wieder bei.

Ich komme jetzt öfters mal nach Hamburg. Bei Artins blüht eine Kultur alter Hausmusik.[6)] Bei Kaluza wird vielleicht nächstens auch wieder Hausmusik sein, wenn Hammerstein auch mit seinem linken Arm wieder in Ordnung sein wird. Er ist nämlich auch in Kiel noch mal vom Pferd gestürzt. Hamburg und Kiel könnten ruhig noch ein bischen näher aneinander sein. Nur gut, dass ich aus der Sackgasse Freiburg raus bin! Es ist doch jetzt ein ganz anderes Leben.

Mit den besten Grüssen an Sie und Ihre Frau Gemahlin

Ihr Arnold Scholz.

Neiss hatte auch schon die volle Lösung II, die ich Ihnen mal mitteilte.

Anmerkungen zum 03.01.1935

[1]F.K. Schmidt erhielt 1934 eine Professur in Jena.
[2]Sperner wurde zum 1.11.1934 als Nachfolger von Reidemeister nach Königsberg berufen. Er hatte sich 1932 in Hamburg habilitiert und war dann als Gastprofessor in Peking.
[3]Hans Fitting, geboren am 13.11.1908 in Mönchengladbach, hatte 1932 in Göttingen promoviert, war dann bis 1934 in Leipzig, 1934 Assistent in Königsberg, wo er sich 1936 habilitierte. Am 15.6.1938 ist er in Königsberg gestorben.
[4]Diese Lösung wurde, versehen mit dem Eingangsdatum 9.1.1935, im Jahresbericht veröffentlicht.
[5]Aufgabe 195 im Jahresbericht.
[6]Emil Artin spielte Querflöte.

3.63 29.01.1935, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) 29. 1. 35.

(auf dem Dampfer)

Lieber Herr Hasse!

Da ich hörte, dass Ore (Öystein) Sie um diese Zeit bei seiner Rückfahrt von Amerika besuchen will, habe ich beim Versand meiner Note II auch ein Exemplar für Ore beigelegt. Hoffentlich erreicht es ihn noch und stimmt das so. Grüssen Sie ihn, bitte, von mir! Wie geht es Rédei[1)] ? Hat er es in der deutschen Sprache schon zu einigen Erfolgen gebracht? Wann wird seine Note[2)] über die Häufigkeit der durch 4 teilbaren Klassenzahlen ... erscheinen?
– Heut ist mal wieder herrliches Wetter, was ich gleich zu einer Dampferfahrt benutzte (daher die kraklige Anschrift; jetzt weiss ich wenigstens, wie die Frakturschrift entstanden ist). Es war eine einzigartige Beleuchtung auf den leicht beschneiten Wegen Möltenort – Labö und dem Wasser. – Ich hoffe, dass mein Wechsel noch bis Semesterschluss perfekt wird. – Im Sommer wird Zermelo zu Vorträgen nach Kiel[3)] kommen. Grundlageninteresse ist hier entschieden vorhanden. – Die Verhältnisse in Fbg. scheinen immer unerquicklicher zu werden; selbst Süss hat sich schon etwas von D.[4)] zurückgezogen.

Herzl. Gruss. Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 29.01.1935

[1]Rédei war ein ungarischer Mathematiker, der Anfang der 1930er Jahre damit begann, Arbeiten in Zahlentheorie zu publizieren, und zwar erst auf Ungarisch (es war für Ungarn damals Pflicht, Arbeiten erst auf Ungarisch zu veröffentlichen, bevor sie auf Deutsch erscheinen konnten), danach in deutscher Sprache. Bekannt wurden vor allem seine Ergebnisse über den 4-Rang quadratischer Zahlkörper und seine Arbeiten zu 2-Klassenkörpern quadratischer Zahlkörper in Verbindung mit der Lösbarkeit der Nicht-Pellschen Gleichung $T^2 - dU^2 = -1$.

[2]Rédei [255] Vgl. auch Gerth [96].

[3]Scholz musste diese Vorträge schließlich absagen, weil er fürchtete, man würde Zermelo in Kiel nicht anständig behandeln.

[4]Gemeint ist Doetsch, der sich bereits ziemlich bald mit Süss überworfen hat.

3.64 01.07.1935, Scholz an Hasse

Arnold Scholz
Kiel – Kitzeberg
Drosselhörn 6.

1. Juli 1935.

Lieber Herr Hasse!

Für Ihre beiden Briefe vom 19. und 29. Juni vielen Dank! Durch das Semesterende, in dem noch manches nachzuholen war – nicht nur an Vorlesungsstunden, sondern auch Enzyklopädie[1] $C\,7a$ – und wir auch mehrfach mathematischen Besuch aus Hamburg u. a. hatten, komme ich erst jetzt dazu, auch auf Ihren Brief vom 19. zu antworten, der mich insbesondere bezüglich der in Aussicht genommenen zahlentheoretischen Tabellen gefreut hat.

Ich will zuerst auf den letzten Brief antworten, weil das schneller geht. Natürlich werde ich das und alles, was Ihnen sonst noch für $C\,7a$ einfällt, dort aufnehmen. Ich hatte ja zuerst wenig Anhaltspunkte für die Gestaltung von $C\,7a$, musste daher erst mal die Disposition aus dem Handgelenk schütteln. Dabei fiel mir erst, dem Wortlaut von $C\,7a$ gemäss, ganz Spezielles ein, und als ich's mir dann mal aufschrieb, merkte ich, dass da auch etwas allgemeinere Ansätze hineingehörten, die wegen der Spezialität der Ausgangsfrage und Unabgerundetheit der Systematik schlecht in allgemeine Kapitel passten. So hätte ich beinahe nicht an Kap. 6 gedacht. Nun fragt es sich: Sollen gerade Lagr. Wurzelzahlen, Gausssche S., Kreiseinheiten zusammen in einen Abschnitt, oder ist es nicht richtiger, Wurzelzahlen und Kreiseinheiten in Abschn. 1. bei zyklischen Körpern unterzubringen, Gausssche Summen dagegen in 2. (Quadr. K.) ?
Das kann sich ja auch noch bei der Ausarbeitung ergeben. Ich werde es wohl erst alles einzeln auf Zettel aufschreiben und dann Sammeln.

Nun zum zahlentheoretischen Tafelwerk: Ich würde daran festhalten, die Körper mit Führer 1 – 100 vollständig aufzunehmen und darüber hinaus, etwa zwischen 100 und 10000, eine gewisse Auswahl zu treffen; denn es sind ja nicht alle Führer gleich interessant, und gerade in solchen Fällen, wo man schon bald sieht, dass die Klassenzahl 1 ist und die Verhältnisse sonst primitiv liegen, würde ja eine solche Aufzählung nur eine Wiederholung sein. Natürlich, wo jemand durch Aufschlagen der Tabelle schnell Daten eines Körpers ablesen will, ist eine Vollständigkeit der Tabelle am Platz; aber das kann man ja nicht zu weit fortführen. Aber wenn man nach Beispielen von Körpern

gewisser Eigenschaften sucht, so müsste man in der Tabelle Körper recht verschiedenartigen Charakters aufnehmen. – So hat z. B. Gauss in seinen Quadr. Formen–Klassentabellen Diskr. bis 3000 vollständig behandelt, weit darüber hinaus aber die von der Form $15n + 7$, 13, wahrscheinlich um festzustellen, ob hier anderes Verhalten der Klassenzahlverteilung auftritt. Und Schaffstein hat (Math. Ann. 98 ?)[2)] neben den (Prim ?)–Diskriminanten bis + 10000 (reell quadr.) Klassenzahlen vollständig berechnet, und dann noch einige über 1 Million, um festzustellen, dass die Klassenzahl 1 nicht seltener wird.

So könnte man Primführer vielleicht bis 300 fortführen. Klassenzahlresultate stehen teilweise wohl durch Vandivers Schule zur Verfügung. Das Sammeln macht allerdings auch wohl viel Arbeit. Wenn aber hier sämtliche (zykl.) Körper eines (Prim–)Führers untereinander stehen, so hat man eine gute Übersicht, von welchem Unterkörper des Körpers der ℓ–ten Einhw. z.B. ein Klassenzahlfaktor stammt u. s. w.

Ferner würde ich Körper von Primzahlpotenzgrad bevorzugen, insbesondere von 3–er Potenzgrad, die als Beispiele für allgemeine Fälle am besten dienen. Ich würde also etwa für alle Führer qp oder $9p < 10000 \quad p, q \equiv 1\ (3)$ eine Tabelle der Kubischen Körper, Körper 9 ten Grades ... aufstellen mit Beziehungen der Körper eines Führers zueinander. Z. B. $f = 7 \cdot 13$: ε_7, ε_{13}, ε_{91}, ε'_{91} Grundeinheiten[3)] der vier kubischen Körper[4)] mit $f \mid 91$; etwa durch Gleichung angeben und ungefähre Zahlgrösse. Dann beim *Abelschen* Körper 9-ten Grades, Führer 91: Einheitensystem: $\{\varepsilon_{13}\,,\ \sqrt[3]{\varepsilon_7\varepsilon_{91}\varepsilon'_{91}}^{F(s)}\}$, Klz. 1. (Allgemeiner Fall: Klassengruppe i. Verhält. zu Teilkörpern)
Diese Tabelle würde insbesondere einschliessen eine Tabelle gegenseitiger Kubischer Reste, die vielleicht weiter ausgedehnt werden könnte, wie ich überhaupt weitgehende Potenzresttabellen begrüssen würde. – Auch Kubische (....) Charakterentabelle bis mod 1000 mit Angabe einer passenden Auswahl von Charakteren–Argumenten (Primz.), aus denen sich alle anderen leicht oder mit einigem Geschick berechnen lassen.

Allgemein würde ich bei Körpern an die Angabe der Stücke aus der Klassenzahlformel denken. Grundeinheit angeben wie in den Reidschen (Kubischen) Tabellen. (L. Wilber *Reid*, Diss. Gött. 1899)
Gleichung für $\vartheta :\ x^9 + \cdots = 0$ Einheit $\varepsilon = \varphi(\vartheta)$.
Ähnlich evtl. Repräsentanten für die Idealklassen, soweit das nicht zu weit führt. (Schon bei Sommer nimmt das unverhältnismässig viel Platz weg.)

Die Arbeitszeit lässt sich wirklich schlecht abschätzen. Es ist vielleicht auch besser, wenn jedes Beispiel mindestens von einem anderen nochmal nachgerechnet wird oder die Nachrechnung nach einer gewissen Frist erfolgt.

Hatten Sie an einen grossen Mitarbeiterkreis gedacht ? Evtl. in der Form, wie jetzt an der T. H. Berlin aus einem besonderen Fond analytische Tabellen (trigonom ...) hergestellt werden ? Es war doch mal so'n Rundschreiben,

dass für Anfertigung von Tabellen–Werken u. s. w. Mittel zur Verfügung stehen, und ich dachte da gleich, dass man auch zahlenth. Tabellen gebrauchen könnte.

Ich wüsste allerdings ausser Frl. Taussky – und die käme wohl bei diesem Fond[5)] nicht in Betracht – kaum jüngere Leute mit zahlth. Rechnungsgeschick.

Vielleicht könnten wir über die Angelegenheit uns noch mündlich in Stuttgart[6)] unterhalten. Ich würde mich jedenfalls freuen, wenn ich an der Anfertigung der Tabellen einen beträchtlichen Anteil haben könnte.

Wie sind übrigens die finanziellen Verhältnisse der D. M. V. ? Könnte man für einen Tagungs–Vortrag evtl. einen kleinen Reisezuschuss bekommen ? – Die Notgemeinschaft hat ja mein Stipendium nicht mehr verlängert[7)] und will mir nur noch die 200 M nachzahlen, die sie seit Oktober durch Kürzung einbehalten hat. An sich rechne ich ja noch mit dem Lehrauftrag in Kiel, dessen Beantragung hier sehr bummelig vor sich gegangen ist.

Bei meiner „Berichtigung von 169“ für die D. M. V.–Jb. scheint mir Herrn Richters Einfügung „für $\ell \neq 2$ “ überflüssig; denn wenn $k(\zeta_a)$, $k(\sqrt[\ell^a]{\alpha_1})$, $\ldots$, $k(\sqrt[\ell^a]{\alpha_r})$ unabhängig [sind], heisst das doch, dass ζ_a noch in $k(\sqrt[\ell^a]{\alpha_1}$, $\cdots$, $\sqrt[\ell^a]{\alpha_r})$ seinen Grad behält und dann auch in $k(\sqrt[\ell]{\alpha_1}, \cdots \sqrt[\ell]{\alpha_r})$ noch keine Teiladjunktion von $k(\zeta_a)$ steckt. Denn ein Teilkörper ℓ–ten Grades des Durchschnitts $\left[k(\zeta_a), \ldots, k(\sqrt[\ell^a]{\alpha_\varrho})\right]$ müsste doch in $\prod_\varrho k(\sqrt[\ell]{\alpha_\varrho})$ liegen.

Mit herzlichem Gruss.

Ihr

Arnold Scholz.

Zassenhaus ist wohl
wieder in Rostock ?
Er war doch bei Ihnen ?
Ich lernte ihn neulich in Hambg.
anlässl. Cara's[8)] Vortrag kennen.

Anmerkungen zum 01.07.1935

[1]Scholz soll einen Artikel über spezielle Zahlkörper für die Enzyklopädie verfassen. Von diesem ist nur ein Bruchstück [S27] erhalten geblieben.

[2]Sh. Schaffstein [276].

[3]Ein zyklischer kubischer Körper hat zwei unabhängige Einheiten; mit ε ist auch immer deren Konjugierte Grundeinheit, und zusammen erzeugen sie eine Untergruppe von endlichem Index. Für Untersuchungen der Kapitulation genügt eine Untergruppe, deren Index nicht durch 3 teilbar ist.

[4]Zu einem Primzahlpotenzführer $f = 9$ oder $f = p \equiv 1 \bmod 3$ gibt es genau einen kubischen Körper; bei einem Produkt von zwei Primzahlen wie $f = 7 \cdot 13$ gibt es die beiden Körper mit Primzahlführer 7 bzw. 13, sowie zwei mit Führer f, insgesamt also vier Körper: einen zu jeder Untergruppe von $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$. Man beachte, dass mit ε_{91}' nicht etwa die Konjugierte von ε_{91} gemeint ist, sondern eine Fundamentaleinheit im zweiten Teilkörper mit Führer 91.

[5]Scholz geht anscheinend davon aus, dass es sich um deutsche Gelder handelt; Taussky ist jüdischer Herkunft.

[6]1935 fand die Jahresversammlung der DMV in Stuttgart und Tübingen statt, und zwar vom 23.-27. September.

[7]Remmert [268] schreibt: „Für den Verlängerungsantrag wurde im Mai 1935 ein Gutachten von Schlotter eingeholt“. Eugen Schlotter (geb. 1909) war SS-Untersturmführer und Assistent von Doetsch bis Oktober 1935, als ihm Doetsch kündigte. Schlotter schreibt:

> *Politisch ist Scholz nicht zuverlässig. Mit dem Nationalsozialismus scheint er sich immer noch nicht abgefunden zu haben, bis zu seinem Abschied von Freiburg war er dauernd mit Juden und ehemaligen Kommunisten zusammen. Scholz will den Nationalsozialismus nicht verstehen. [...]*

Bei Segal [292, S. 177] kann man nachlesen, was Schlotter in einem ähnlichen Gutachten über seinen ehemaligen Lehrer Kapferer geschrieben hat.

Nach dem Krieg war Schlotter Lehrer und ging 1974 als Schuldirektor in den Ruhestand. Noch in den 90er Jahren verteidigte er die SS als heroische Verbindung, deren geschichtliche Rolle das Aufhalten des Bolschewismus gewesen sei.

[8]Gemeint ist Caratheodory.

3.65 03.07.1935, Hasse an Scholz

Professor Dr. H. H a s s e .

Göttingen, den 3. Juli 1935.

Bunsenstr. 3–5

Herrn

Dr. A. S c h o l z

Kiel–Kitzeberg.

Drosselhörn 6 .

Lieber Herr Scholz,

besten Dank für Ihren Brief vom 1. Juli.

1. **Enzyklopädie.** Bei Gauss'schen Summen hatte ich an die allgemeinen Gauss'schen Summen gedacht, nicht nur die mit quadratischen Charakteren. Es kommen vor allem in Frage eine alte Arbeit von Stickelberger (Math. Ann. 37), die Davenport und ich neulich neu aufgezogen haben (Crelle 172), und zwar nur die rein arithmetischen Teile daraus (absoluter Betrag, Primzerlegung, Zusammenhang mit dem „Resolventen" $\pi(\chi, \psi)$ von Gauss und Jacobi, Berechnung der Primzerlegung von p für die einfachen Fälle $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-3}$, Relationen zwischen den Gauss'schen Summen). Ich würde einen besonderen Abschnitt „Kreiskörper" empfehlen, in den das alles passt.

2. **Tafelwerk.** Herzlichen Dank für Ihre wertvollen Anregungen und Ausführungen. Es handelt sich nicht um eine deutsche Stiftung[1)], sondern um das Cunningham Request in Händen der British Association for advanced science, verwaltet von Dr. Comrie und Sadler im Nautical Almanach Office der englischen Admiralität. Siehe die bereits veröffentlichten Bände 1–4 von Tafeln (Kreis und hyperbolische Funktionen etc., Emdensche Funktionen, Zerlegung in 5. Potenzen, Zyklen reduzierter Ideale in quadratischen Körpern). Ich stehe mit meinem Freund Sadler in Korrespondenz über ein weiteres Tafelwerk dieser Sammlung. Dickson hat dazu schon eine Kleinigkeit geliefert, nämlich Tabellen für $1+r^m \equiv r^n$, wo r eine Primitivwurzel modulo p, wie sie zur Berechnung der oben genannten Resolventen brauchbar sind. Ich habe bereits empfohlen, Sie zur Mitarbeit heranzuziehen. Ich werde nun auch Frl. Taussky nennen. Bei dieser passt es besonders gut, da sie ja jetzt

zum Winter nach Cambridge, Girton–College geht. Vorläufig ist allerdings die ganze Frage noch stark in der Schwebe.

Wegen der Frage $\ell \neq 2$ bei Ihrer Berichtigung setzen Sie sich doch bitte mit Richter direkt auseinander und regeln das ev. bei der Korrektur.

Wegen eines Reisezuschusses für Stuttgart werde ich einmal bei Hamel anfragen.

Herr Zassenhaus war hier und hat uns einen schönen Vortrag über transitive Erweiterung von Permutationsgruppen gehalten. Wo er die Ferien verbringt, weiss ich nicht.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

Anmerkungen zum 03.07.1935

[1] Scholz hatte im letzten Brief Bedenken angemeldet, weil er fürchtete, dass Taussky „bei diesem Fond“ wohl nicht in Frage käme.

3.66 09.07.1935, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) Kiel, 9. Juli 1935.

Lieber Herr Hasse!

Haben Sie vielen Dank für die Bewilligung eines Reisezuschusses von 50 – zur Stuttgarter Tagung! Am einfachsten wird es wohl sein, wenn Sie ihn auf mein Postsch. Kto. **Bln.** 169920 überweisen lassen. Sonst hat's natürlich bis zur Tagung Zeit. Meinen Vortrag werde ich besser betiteln: „Einfach verzweigte auflösbare Körper" oder „Zur Theorie der ... ". – Früher hatten wir in der Math. doch immer 20 Min. Redezeit! Lässt sich „Gruppe Hasse" nicht auf den ganzen Freitag[1)] ausbreiten?

Auch für Ihren Brief bzgl. der zahlentheoretischen Tabellen vielen Dank! So liegt es ja sehr schön! Hoffentlich kommt es zustand! – Man könnte z. B. auch Tabellen über Normalkörper 6., 12., **18.** Grades aufstellen. Bei 18. Grad ist es z. B. sehr interessant, wie die abs. Kub. Klk., Ringklkp. und Kubische Kreiskörp[er]erw. des quadr. Körpers[2)] aufeinanderstossen. Ich werde überhaupt bis zur Tagung noch einige Wünsche sammeln, und dann können Sie ja sondieren. Auf Körper 18. Gr. bin ich gerade durch Beispielbildg. zur Tschebotarjowschen Einteilung der Klk. gekommen. – Würde mich sehr freuen, wenn auch Frl. Taussky zur Mitarbeit herangezogen würde.

Mit herzlichem Gruss!

Ihr
Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 09.07.1935

[1]Scholz hielt zwei Vorträge, einen vormittags und einen zweiten nachmittags. Die „Gruppe Hasse" hat also den ganzen Freitag bekommen.

[2]Ein quadratischer Zahlkörper mit durch 3 teilbarer Klassenzahl hat eine unverzweigte kubische Erweiterung, zu deren Konstruktion man die dritten Einheitswurzeln adjungieren muss; so kommt man sofort auf einen Körper vom Grad 12; die 3-Klassenkörper quadratischer Zahlkörper mit 3-Klassengruppe vom Typ $(3,3)$, die Scholz und Taussky untersucht hatten, haben bereits Grad 18. Die Adjunktion von Kubikwurzeln ganzer Zahlen zu dem Körper der dritten Einheitswurzeln liefert Ringklassenkörper.

3.67 10.07.1935, Hasse an Scholz

Herrn
Dr. A. Scholz

Kiel–Kitzeberg
Drosselhörn 6 .

Göttingen, den 10. Juli 1935.

Lieber Herr Scholz,

besten Dank für Ihre Karte. Eine Vorauszahlung des bewilligten Reisezuschusses kann ich leider aus grundsätzlichen Gründen nicht machen. Wenn es Ihnen sehr dringlich ist, könnte ich es aber so einrichten, dass Sie den Betrag in Stuttgart selbst abheben können oder auch von mir persönlich in Empfang nehmen.

Die Tabellen–Angelegenheit ist, wie ich gerade heute aus England erfahre, auf die nächste Sitzung des Komittees Mitte September vertagt worden. Die Anregung betr. Frl. Taussky[1)] wurde willig aufgegriffen.

Herzlichst Ihr

H. Hasse

Anmerkungen zum 10.07.1935

[1]Scholz hatte Taussky in seinem Brief vom 01.07.1935 als Mitarbeiterin vorgeschlagen.

3.68 28.10.1935, Scholz an Hasse

Arnold Scholz
Kiel – Kitzeberg
Drosselhörn 6.

Berlin, 28. X. 1935.

Lieber Herr Hasse!

Mittwoch geht's wieder nach Kiel[1]. Gewisse Hoffnungen auf einen Lehrauftrag bestehen. Dem Jenaer Rektor wurde bei seinem Besuch in Berlin (Ministerium) gesagt, man wünsche, dass ich in Kiel bliebe. Wahrscheinlich auch mit Rücksicht auf den Kieler Vorlesungsplan; denn so schnell wird wohl R. Schmidt nicht von der Marineschule loskommen, dass er im Winter bereits wieder voll lesen wird. Für den Sommer ist ja zu erwarten, dass er an Kaluzas Stelle berufen wird, was ich auch wünschen würde. Ausserdem war der Kieler Dekan letzte Woche in Berlin; vielleicht hat er schon irgendwelche Zusicherungen für mich erreicht; jedenfalls sollte Hammerstein mit dem Anschlag der Vorlesungen solange noch warten, bis Se. Spektabilität aus Bln. zurück.

Besten Dank nochmals für die inzwischen überwiesenen 50 M für Stuttgarter Vortrag!

Die Sextanten–Tabelle im Matthew[2] für $p = 6n + 1 < 500$ scheint mir keine genügenden Anhaltspunkte für die Verteilung $1 : 3 : 2$ zu geben. Bis 250 hat man $5 : 13 : 8$, dann $2 : 11 : 6$, also der zweite Teil, also eine Überladung des zweiten Sextanten um 3. Immerhin ist ja die Verteilung noch einigermassen gleichmässig, aber man darf hier nicht allzuviel Unabhängigkeit der Wahrscheinlichkeit von der Lage des ausgewählten Abschnitts verlangen. [Was natürlich für ein geringeres Vorkommen des ersten Sextanten spricht][3] (ich denke an die eine Einhw. 1, die ja aber keine Rolle spielt.)

Um einen etwaigen Zusammenhang mit dem Sextanten von ω der Kongruenz $\omega^2 + \omega + 1 \equiv 0\ (p)$ zu prüfen, nahm ich die

kleinste Gruppe $p = 97,\ 139,\ 157,\ 199,\ 211\ \cdots$ (soweit ich's auswendig weiss)
kleinste Lösung ω: III II I II I

Eine klein–o–Chance hat der zweite Sextant mod p schon wegen $\sqrt{p} - 1 < \omega < \frac{p}{2} - \sqrt{p} + 1$. – Eher glaube ich, dass die Matthewsche Verteilung mit den Sequenzen von kubischen Resten was zu tun haben könnte; allerdings kamen schon die sequenzarmen $p = 7,\ 13$ in verschiedenen Sextanten der Gausschen Summen vor.

In meiner Aufgabe (207) über Dirichlet–Dichte habe ich nun doch die Def. $\lim\limits_{s\to 1}(s-1)\sum\limits_{\mathfrak{M}} m^{-s}$ für die Dirichlet–Dichte der Menge $\mathfrak{M}$ stehen lassen, um den Bruch lim $\frac{\sum m^{-s}}{\sum n^{-s}}$ zu vermeiden. – Bei ζ–Quotienten von Körpern brauche ich auch am liebsten die Produktdarstellung, die man bei geeigneter Kürzung und Zus. fassung schreiben[4)] kann: $\dfrac{\prod_p \varphi(p^{sn})}{\prod_p \varphi_n(p^s)}$, was beim Grenzübergang $s \longrightarrow 1$ einfach

$$\boxed{\prod_p \frac{\varphi(p^n)}{\varphi_n(p)}}$$

ergibt, wie ich früher bereits im Wiener Monatsh. 40 notierte. Dabei bedeutet φ Eulersche Funktion im Grundkörper, φ_n die im Körper n–ten Grades. (Ich hab's hier so geschrieben, dass der Grundk. der rationale ist; natürlich ist die Formel entspr. für Relativkörper verwendbar.)

In der Note, die ich nächstens für die Wirtinger–Festschrift einsende, bringe ich Beispiele von rel.–Ab. Körpern vom Typ $(\ell,\ \ell)$, wo eine *Einh.* des Grk. zwar totaler Normenrest, aber nicht Norm ist. Bei einer Grundeinh. im Grundkörper haben diese Ab. K. etwa die Dichte $\ell - 1/\ell^3$.

Mit herzlichem Gruss!

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 28.10.1935

[1]Scholz war zu einer Tagung nach Stuttgart gekommen. Am Freitag (also am Tag zuvor, dem 27.X.1935) hielt er zwei Vorträge: vormittages über „Gruppenerweiterungen nach Tschebotarjov“, nachmittags „Zur Theorie der einfach verzweigten Körper“, deren Ausarbeitungen dann in der Math. Zeitschrift als [S20] erschienen.

[2]Es geht hier um das Kummersche Problem, in welchem Sextanten die Gaußschen Summen zu Charakteren der Ordnung 3 liegen. Gauß hatte das entsprechende Problem für quadratische Charaktere gelöst, und diese Vorzeichenbestimmung der quadratischen Gaußschen Summen hatte sich als enorm tiefes und wichtiges Problem auch in anderen Zusammenhängen (Klassenzahlformel; Funktionalgleichung von L-Reihen) erwiesen. Das Problem für kubische Summen wurde in einem Brief von Artin an Hasse vom 10.02.1926 (sh. [75]) aufgegriffen; danach hat es vor allem Hasse in der mathematischen Öffentlichkeit bekannt gemacht, auch durch sein Zahlentheoriebuch, das nach dem 2. Weltkrieg erschien. Schließlich wurde es von Patterson und Heath-Brown [125] gelöst, ist aber bis heute isoliert geblieben, da der Zusammenhang mit L-Reihen zu fehlen scheint. Vgl. dazu das Buch von Berg [24].

[3]Der Satz in eckigen Klammern ist im Brief durchgestrichen.

[4]Für beliebige reelle (oder gar komplexe) Zahlen macht $\phi(p^{sn})$ gar keinen Sinn; das ϕ_n im Nenner bedeutet jedenfalls die Eulersche Phi-Funktion im Zahlkörper K, wenn es wie hier um den Quotienten $\zeta(s)/\zeta_K(s)$ geht.

Ist $p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_g^{e_g}$ die Primidealzerlegung von p in K, so gilt erst einmal die Gradformel $e_1 f_1 + \ldots + e_g f_g = n = (K : \mathbb{Q})$, sowie

$$\phi_n(\mathfrak{p}_j^{e_j}) = \phi_n(\mathfrak{p}_j) N(\mathfrak{p}_j^{e_j - 1}) = (p^{f_j} - 1) p^{(e_j - 1) f_j} = p^{e_j f_j}(1 - p^{-f_j}),$$

also

$$\phi_n(p) = p^n \prod_j (1 - p^{-f_j}).$$

Wegen $\phi(p^n) = p^n(1 - p^{-1})$ erhalten wir also

$$\frac{\phi(p^n)}{\phi_n(p)} = \frac{1 - p^{-1}}{\prod_j (1 - p^{-f_j})}.$$

Im Nenner stehen jetzt genau die für $s = 1$ in der ζ-Funktion von K auftretenden Eulerfaktoren für die Primideale über $\mathfrak{p}$. Ersetzt man in dieser Gleichung formal p durch p^s, erhält man genau die Quotienten der zu p gehörigen Faktoren von $\zeta(s)$ und $\zeta_K(s)$, und das war es wohl, was Scholz gemeint hat.

3.69 30.11.1935, Scholz an Hasse

Arnold Scholz
Kiel – Kitzeberg
Drosselhörn 6.

30. November 1935.

Lieber Herr Hasse!

Kürzlich habe ich eine Note fertiggestellt mit dem Titel:

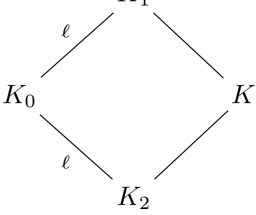
> *Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nicht-abelscher Körpererweiterungen* < .

Es handelt sich hauptsächlich um biquadratische und bikubische Beispiele, wo es schon für die Einheiten klappt. Diese Note war ursprünglich als Beitrag für den Wirtinger–Festband der Monatsh. gedacht, wozu mich Mayrhofer aufgefordert hatte, obwohl ich Wirtinger kaum gekannt habe. Nun war ich begreiflicherweise im Oktober nicht in sehr produktiver Verfassung, und als ich die Sache im November richtig bearbeitete, kamen mir erst vernünftige Beispiele und Ideen, woraufhin ich die Sache eigentlich für die Monatshefte zu schade fand und hoffte, es würde dafür schon zu spät sein, und ich könnte sie Ihnen dann fürs Crelle–Journal schicken. Ich schickte sie darum neulich gleich mit dem Bemerken ab, dass ich um Rücksendung bäte, falls es für den Festband zu spät sei. – Nun schreibt mir Mayrhofer, dass der Festband seinen Umfang schon überschritten habe und daher die Aufnahme in diesen nicht mehr möglich sei, dass aber bald nach dem Festband im Frühjahr das nächste reguläre Heft erscheinen soll, und fragt mich, ob mein Wunsch auf Retournierung endgültig sei oder ob ich bei den Monatsh. bleiben wolle.

Nun bitte ich Sie um recht baldige Antwort, ob Sie meine Note (etwa 6 Seiten) für das Crelle–Journal bald gebrauchen könnten[1]; dann würde ich Mayrhofer einfach schreiben, er möchte Ihnen das Manuskript zusenden. Ich denke, dass Sie das doch gerade interessieren wird, und ich glaube, ich hatte Ihnen schon längst versprochen, mal wieder eine Note fürs Crelle–Journal zu schicken, und nachdem die letzte Doppelnote[2], als sich Frl. Noether[3] für Konkreteres zu interessieren anfing, in die Annalen gewandert sind, hat mir F. K. Schmidt auf der Tagung[4] das Versprechen abgenommen, dass ich ihm die Ergebnisse des Vorgetragenen[5] für die M. Z. schicke, wenn sie vollendet sind – was allerdings noch einiges dauern kann. – Da mir Mayrhofer auf meine frühere Verzögerungsankündigung nicht geantwortet hatte – offenbar

war er bei dem Überschuss an Beiträgen ganz froh über meinen Ausfall – und jetzt auch meine Note Furtwängler noch nicht vorgelegt hat, kränke ich ja niemanden, wenn ich die Note aus den Monatsheften mit ihren scheusslichen Typen, Druck und recht kleinen Seiten zurückziehe.

Nun ist die Note an einigen Stellen mit Rücksicht auf den beschränkten Raum sehr knapp gefasst, besonders da, wo es sich um die Bildung von Ab. Körpern mit zusammengesetztem Führer



K_2/K_0 handelt, bzgl. der Frage, ob das Klaffen zwischen Normenresten und Normen in K/K_0 an den Einheiten oder an den Hauptidealen liegt. Dies könnte ich, falls Sie es für wünschenswert hielten, auch noch näher ausführen. Systematisch könnt' ich's jedoch erst in einer weiteren Note, die ich Ihnen dann auch zuzuschicken gedenke, machen, da ich hier erst die Sache durch Beispiele erläutere.

Meine Hauptbeispiele mit Einheits–„Knoten“ sind:

$K_0 = (1)$	:	-1	Normenrest–Nichtnorm	in	$K_0(\sqrt{13},\ \sqrt{17})$
$K_0 = (\sqrt{-3})$	:	ϱ	″ ″	″	$K_0(\sqrt[3]{17},\ K^3_{73})$
$K_0 = (\sqrt{17})$	:	$\varepsilon = 4 + \sqrt{17}$	″ ″	″	$K_0(\vartheta,\ K^3_{61})$ $\downarrow$ $x^3 - 11x - 11 = 0\,.$

Dagegen $\varrho = N(\gamma)$ in $K_0(\sqrt[3]{17},\ \sqrt[3]{73})$, wo die Hauptideale die Bescherung liefern wie immer bei rat. K_0 und $\ell > 2$.

Den Potenzrestcharakteren nach erhält man folgende Rangordnung:

(0) Normenrestsatz gilt; Nichtvollzerfall der Diskr. teiler; Körperkonstr. stockt.

(1) ″ scheitert an Einh.; Vollzerfall der Diskr. teiler; Körperkonstr. geht weiter.

(2) ″ scheitert, aber nicht an Einh. Vollzerfall der Diskr. teiler; Körperkonstr. geht weiter.

Eigentlich sollte man meinen, dass $\left(\frac{\varepsilon,k}{p}\right) = 1,\ \varepsilon \neq N$ ein besonders krasser Fall sei.

Den Fall $K_0 = (\sqrt{-3})$; $K = K_0(\sqrt[3]{u+v\varrho},\ \sqrt[3]{u+v\varrho^2})$ mit $N(u+v\varrho) = p \equiv 1\ (9)$ will ich noch untersuchen; d. h. es kommt nur (1) oder (2) in Frage, und es wäre je ein Beispiel zu suchen.

Vielleicht, dass ich die dann gegebenenfalls noch anfügen könnte. Im ganzen lässt man's wohl am besten. (Übrigens muss auf dem Setzerzettel die

Bemerkung gestrichen werden, dass sich griech. ν von lat. v nicht zu unterscheiden brauchte; denn im Crelle ist ja das Kl. Vau geknickt.)

Jetzt möchte ich Sie noch was fragen; vielleicht können Sie mir da auch gleich kurzen Bescheid geben. Sie sind vielleicht unterrichtet, dass ich meinen Lehrauftrag[6)] immer noch nicht hab', obwohl ich im Oktober den Bescheid bekommen habe, dass ich in Kiel bleiben solle, und daraufhin die Jenaer Verhandlungen abgebrochen wurden. Der Dekan hat nun indessen noch ein Schreiben mit Hinweis darauf losgelassen ans Ministerium; aber ich weiss nicht, ob man der Sache noch trauen soll (in Kiel selbst kann ich auf völlige Redlichkeit rechnen); und darum muss ich weiter mit anderen Möglichkeiten rechnen. Wissen Sie über das Stipendium Bescheid, das Ore zu vergeben hat? Geht das nur für Amerika, oder könnte man damit z. B. auch nach Cambridge gehen? Bis wann müsste man für $^{36}/_{37}$ einreichen? Könnten Sie gegebenenfalls Ore bereits für mich interessieren[7)]? – Oder kann man auf andere Weise vielleicht zu einem Research–Fellow–Stip kommen? Wie steht es jetzt in Manchester? Baer ist doch jetzt bei Weyl? Das Gegebene wäre ja, und daran haben Sie wohl auch gedacht, wenn jetzt mal Alfred Brauer[8)] nach Manchester käme; denn er ist ja zum 1. 1. 36 gekündigt und bereits seit 21. Okt. von seiner Ass. tätigkeit beurlaubt. Wenn das aber doch immer nur für 2 Jahre vergeben wird, käme das die darauffolgd. zwei Jahre evtl. für mich in Frage, falls eine so lange Überbrückung der Schwierigkeiten noch nötig wär? Ich möchte dann wenigstens für etwas länger als ein Jahr mal wieder gesichert sein. Lieber natürlich wär' mir etwas ganz Festes, wenn sich das böte. Vorläufig geht es ja noch so bis Ende des S. S. 36; länger aber nicht und man muss da rechtzeitig vorsorgen. Vielleicht war es ein taktischer Fehler, dass ich so bereitwillig meine Vorlesungen wieder aufnahm, ohne mir eindeutig schwarz auf weiss geben zu lassen, dass ich den Lehrauftrag wirklich erhalte. Aber man rechnet ja eben immer noch mit einer gewissen Loyalität, und schliesslich wurde ich im Oktober mürbe und war froh, wieder an der Universität zu lesen, wo ich hinpasse. Vielleicht ist es aber auch richtig, sich erst etwas mehr festzusetzen um dann später besser fordern zu können. Jedenfalls will der Dekan, dass ich in die Staatsex.–Prüfungskommission komme, und einen Doktoranden hab' ich auch schon von Kaluza übernommen, einen Herrn Hannink[9)] aus Altona, der früher schon bei mir in Freiburg gehört hatte. – Wenn ich hier einen dauernden festen Lehrauftrag hätte, wär' mir's schon das liebste; ich möchte mich nur bald darauf einrichten können

Mit herzlichem Gruss! Ihr Arnold Scholz.

(Entschuldigen Sie, bitte, die Flecke!
Es hat nachts reingeregnet.)

Anmerkungen zum 30.11.1935

[1]Das Scholzsche Manuskript wurde schließlich als [S19] tatsächlich im Crelle-Journal publiziert. In einem Brief an seinen Mitherausgeber Hensel vom 09.01.1936 skizziert Hasse den Inhalt wie folgt:

> *A. Scholz verfolgt in der ihm eigenen, vielfach an Zahlenbeispielen orientierten Art die interessante Frage, mit was es zusammenhängt, wenn in einem algebraischen Zahlkörper die Gruppe derjenigen Zahlen, die an allen Primstellen Normenreste eines abelschen Körpers sind, wirklich kleiner ist als die Gruppe der Zahlnormen aus diesen Körpern.*

[2]Gemeint sind die Arbeiten [S14, S18] über die Kreisklassenkörper und die Konstruktion von Körpern mit zweistufiger Gruppe.

[3]In ihrem Nachruf auf Scholz hatte Olga Taussky bemerkt, dass Scholz bis zu Noethers Tod mit ihr gearbeitet habe, und dass es ihm gelungen sei, „ihr die Schönheit und Bedeutung von Zahlenbeispielen" nahezubringen.

[4]Die Tagung in Stuttgart.

[5]Darin ging es dann um die Konstruktion von Zahlkörpern mit einer gegebenen p-Gruppe als Galoisgruppe; sh. [S20].

[6]Daran sollte sich nichts mehr ändern. Noch im Oktober 1938 fragte Hammerstein bei Süss nach einem Gutachten über Scholz an und schrieb (sh. [268, p. 62–63]):

> *Ich muß ehrlich gestehen, daß ich in diesem Sinne Herrn Scholz der Regierung des Dritten Reichs jedenfalls im Augenblick noch nicht vorschlagen würde. Seine Haltung scheint Jahre hindurch sehr viel zu wünschen übrig gelassen zu haben.*

[7]Hasse schrieb am 21.12.1935 an Ore; zu den Gründen, warum Scholz immer noch keinen Lehrauftrag hatte, bemerkte er:

> *Da er aber offenbar irgendwo einen Feind hat, ist es bisher nicht zur Erteilung eines solchen Lehrauftrags gekommen.*

Am Schluss des Briefes schreibt er noch:

> *Ich hoffe immer noch, dass die bisher bestehenden Schwierigkeiten sich heben und man Scholz hier in Deutschland eine Existenzmöglichkeit gibt.*

In ihren autobiographischen Notizen [Ta95] wird Olga Taussky deutlicher:

> *Scholz was a very talented man, and also a very fine human being. He was one of the few young people in mathematics who harmed their careers by not making a secret about their dislike of the Nazi movement.*

[8]Sowohl Alred Brauer wie auch sein Bruder Richard hatten bei Schur promoviert.

[9]Gunter Hannink, geb. 12.12.1912 in Hamburg, studierte ab 1931 in Hamburg, Freiburg und Kiel; Lehramtsexamen 1939 Hamburg; promovierte 1940 in Kiel mit dem Thema „Verlagerung und Nichteinfachheit von Gruppen" (publiziert in [111]; diese Arbeit wurde im bekannten Gruppentheoriebuch von Zassenhaus zitiert). Hannink war während des Kriegs und danach Lehrer in Hamburg.

3.70 02.12.1935, Hasse an Scholz

Prof. Dr. H. Hasse.

Göttingen, den 2. Dezember 1935.

Bunsenstr. 3–5

Herrn

Dr. Arnold Scholz

Kiel–Kitzeberg

Drosselhörn 6

Lieber Herr Scholz!

Besten Dank für Ihre beiden Briefe vom Ende Oktober und Ende November.

Sehr gern möchte ich Ihre Note, die ursprünglich für den Wirtinger–Festband vorgesehen, in Crelles Journal aufnehmen. Ich würde es, nach dem, was Sie schreiben, aber doch für zweckmässig halten, wenn Sie trotz der beabsichtigten weiteren Note, schon in dieser ersten Note die bisher zu knapp gefassten Stellen mehr ausführen würden, denn die Verständlichkeit scheint mir das Wichtigste zu sein und Sie wissen ja selbst, dass Ihre Arbeiten nicht immer leicht zu lesen sind.

Ihre Annahme, dass in Crelle Journal das kleine v geknickt gedruckt wird, trifft nicht zu. Im Sprachsatz ist das zwar der Fall, aber bei mathematischen Formeln und Typen habe ich, eben wegen der Aehnlichkeit mit dem griechischen Nü seit längerer Zeit durchgesetzt, dass die runde Type gewählt wird. Dementsprechend ist es unzweckmässig das griechische Ypsilon überhaupt zu benutzen, denn es sieht dem kleinen lateinischen v verzweifelnd ähnlich.

Dass Sie noch immer nicht lehrbeauftragt sind, erstaunt mich. Ich möchte zwar glauben, dass das Ministerium Ihnen schliesslich doch den Lehrauftrag geben wird, namentlich, wenn die Kieler Instanzen sich stark dahinter stellen, aber ich sehe ein, dass Sie mit allen Möglichkeiten rechnen müssen. Das Oresche Stipendium kann natürlich nicht für einen Aufenthalt in England vergeben werden. Ob Ore gegenwärtig überhaupt Geld für diesen Zweck hat, weiss ich nicht. Bei seinem Hiersein im Sommer sagte er, dass seine Mittel jetzt sehr beschränkt seien. Jedenfalls, wenn er Geld hat, dann nur für seine

Yale–University. Wenn Ihnen daran liegt, will ich gern einmal bei ihm anfragen. Sie müssen aber bedenken, dass es für Ihre Aussichten in Deutschland nur ungünstig wirkt, wenn Sie jetzt ins Ausland gehen. Was in Manchester geplant ist, hoffe ich in den nächsten Tagen von Davenport zu hören, der vielleicht herkommt. Sonst könnte ich jedenfalls bei ihm oder bei Mordell anfragen.

Für heute herzliche Grüsse

Ihr

H. Hasse

3.71 19.12.1935, Scholz an Hasse

Arnold Scholz
z. Zt. Berlin W 35 } bis 1. Jan.
Dörnbergstr. $3^{\mathrm{I}\,\ell}$

Kitzeberg, 19. Dezember 1935.

Lieber Herr Hasse!

Haben Sie noch viele Dank für Ihren Brief vom 2. Dez. und Ihre Zusage, meine Note, die ich beiliegend sende, ins Crelle–Journal aufnehmen zu wollen! Und entschuldigen Sie bitte, dass ich so spät antworte: ich hatte bereits vor einer Woche einen Brief an Sie begonnen, dann mich aber erst an die Umarbeitung meiner Note[1] gesetzt, die manche Entschlüsse kostete. Ich hoffe aber, dass so eine Umarbeitung nach einer Zwischenzeit die Sache verständlicher macht und auch manche Zusammenfassungen anderer Arbeiten, die ich früher nur unklar ausdrücken konnte, jetzt deutlicher werden, namentlich durch die Beispiele. Das endgültige Formulieren fällt mir bei einer neuen Sache deswegen so schwer, weil ich meist nicht in Worten, sondern in räumlichen Vorstellungen denke, mit Farben und allerlei anderen Assoziationen versehen. – Für den am Schluss hinzugekommenen allgemeinen Existenzbeweis, der ja auch noch eine Frage offen lässt, kann ich vorläufig keine bessere Formulierung finden, hoffe aber, dass der Beweis wenigstens so einsichtig ist wie ein C.–R.–Beweis[2] im Durchschnitt, und ganz das Ergebnis selbst. Hinzugekommen sind sonst die Beispiele H, die Ausführungen zu C, D, F auf S. 13, 14 und auf S. 4.

Gegen die Einführung von griech. v als Einheit neben ε, η, ω habe ich keine Bedenken. Gefällt mir besser als die Vokale o, ι ; wer absolut will, kann es auch für lat. v lesen.

Da sich alle massgebenden Kieler für mich einsetzen, und zwar jetzt ungeachtet aller etwaigen Unbequemlichkeiten, so hoffe ich immer noch auf den Lehrauftrag, solange es möglich ist. Merkwürdig ist nur, dass man über meinen Verbleib in Kiel verfügt hat, ehe die erforderlichen Mittel sichergestellt waren. Nächsten Sommer will ich jedenfalls noch abwarten, werde Analytische Geometrie und Analyt. Zahlentheorie lesen. Hammerstein sucht mich ja sehr zu stützen. Aber inzwischen muss ich mich ja mit den Auslandsmöglichkeiten befassen, und ich rechne schon damit, dass ich, wenn ich ins Ausland geh, auf alles weitere hier verzichte, wenigstens für dieses Zeitalter, so lieb mir die Kieler Universität geworden ist. Aber hier lautet mein Kalkül: Dach = o (Hand) ,

genauer= $O(\frac{1}{n}\,\text{Hand})$, d. h.: ‘Lieber einen Sperling in der Hand als n Tauben auf dem Dach’. Bei dem Ore–Stipendium hab’ ich wohl das durcheinandergebracht, dass Fräulein Taussky damals auf dem Wege Ore, Noether das Stipendium für Bryn Mawr hatte und jetzt das Research–Fellow-Stip. in Cambridge. Natürlich, wenn es jetzt keine europäischen Möglichkeiten gäbe, könnte ich ja, falls Mittel da sind, auch mal für ein Jahr nach New Haven gehen. Es wäre jedenfalls sehr freundlich von Ihnen, wenn Sie auf alle Fälle mal Ore auf mich aufmerksam machen und nach dem letzt einreichbaren Termin für Okt. 36 – Sommer 37 fragen wollten. Ore kennt mich ja; ich sah ihn noch im Mai in Hamburg. – Oder wäre ein Research–Stip. in Cambridge zu erreichen? – Mit festen Sachen scheint es ja überhaupt sehr schwierig; ganz unmöglich Skandinavien und Schweiz; auch über Holland hörte ich von Freudenthal nichts Gutes. In Amsterdam oder irgendwo da wär ich auf die Dauer schon gern, besonders weil meine Schwester von April ab in Brüssel ist. Nun muss ich noch hören, was Blaschke von Jugoslawien zu sagen hat. Er riet mir zwar schon einmal ab von den ‘primitiven Lebensverhältnissen’, aber das würde mich nicht stören, wenn alles entsprechend primitiv lebt, ist mir jedenfalls lieber, als primitiv unter Nichtprimitiven zu leben. Ausserdem muss es sich in Zagreb z. B. bestimmt angenehm leben (da ist ja auch Bohniček, der Zahlentheorie treibt),[3] und in Beograd und Ljubljana auch nicht schlecht. Es käme eben darauf an, ob zufällig irgendwo was Passendes frei wär. Man kann eben nur viel rumfragen.

Hatte ich Ihnen schon mitgeteilt, dass mir Herr Wielandt–Bln.[4] eine gruppth. Vermutung von Magnus und mir umgehend bewiesen hat: Ist für $G = \sum S_1^{\alpha_1} \cdots S_m^{\alpha_m}\, G'$, G' Kommutator, immer schon $G = \{S_1, \dots S_m\}$, wie das Repräs.–System S_n auch ausgewählt sei, so ist G direktes Produkt von Primärgruppen? (Umkehrung des Burnsideschen Satzes).

Herzliche Grüsse

und Ihrer Frau Gemahlin und Ihnen ein frohes Weihnachtsfest!

Ihr

Arnold Scholz.

Hammerstein wird Ihnen wohl noch antworten wegen Springer; ich finde natürlich auch, dass sich der Verleger auf alle Fälle an seine Abmachungen mit dem Kunden zu halten hat und jede faktische Preissteigerung gegen das Preisbildungsgesetz verstösst. Auch auf die F. d. M. müsste man einwirken!

Anmerkungen zum 19.12.1935

[1]Hasse hatte wohl angeregt, dass Scholz seine Note über die Normenreste etwas ausarbeiten solle, um sie verständlicher zu machen.

[2]Gemeint ist ein „Comptes-Rendus-Beweis". Die Noten in den Comptes Rendus sind in der Regel nicht länger als drei oder vier Seiten.

[3]Bohniceks Eltern stammten ursprünglich aus Tschechien; Stjepan Bohnicek wurde geboren am 15.12.1872 in Vinkovci (jetzt Kroatien), wo er auch das Gymnasium besuchte. Danach studierte er Mathematik an der Universität Wien und promovierte dort 1894. Danach arbeitete er als Gymnasiallehrer in Vinkovci und Zagreb, wo er 1904 habilitierte. 1909 wurde er associate professor, 1921 full professor in Zagreb. Gestorben ist Bohnicek am 14.03.1956 in Zagreb. Er beschäftigte sich mit Reziprozitätsgesetzen, insbesondere für 4. und 8. Potenzreste.

[4]Die Arbeit [338] von Wielandt wurde von Scholz selbst wie folgt besprochen:

> *Auf Grund des Satzes über die Konjugiertheit der Sylowgruppen wird gezeigt, dass die direkten Produkte von p-Gruppen – die sich auch dadurch charakterisieren lassen, dass ihre Sylowgruppen invariant sind – die einzigen sind, die sich aus jedem vollständigen Restsystem nach der Kommutatorgruppe erzeugen lassen.*

In der Fußnote 2 des Artikels schreibt Wielandt:

> *Herr A. Scholz hat mich auf die Frage aufmerksam gemacht, die ihm bei seinen Untersuchungen über Klassenkörper begegnet ist.*

Wielandt hatte wie Scholz bei Schur promoviert, und zwar noch 1935.

3.72 22.12.1935, Hasse an Scholz

22. 12. 35

Lieber Herr Scholz,

Herzlichen Dank für Ihren freundlichen Brief. Bitte verzeihen Sie, wenn ich mich heute ganz kurz fasse, da ich vor der Abreise in die Weihnachtsferien stehe und noch eine Masse zu erledigen habe.

Ihr Ms. habe ich zum Druck nach Berlin eingesandt.

An Ore habe ich zunächst einmal ganz unverbindlich geschrieben und gefragt, ob unter Umständen nächstes Jahr eine Möglichkeit für Sie bestände, und was dazu gegebenenfalls zu veranlassen wäre.

Ich möchte Sie heute bitten, mir mit folgender Frage zu helfen auf die ich bei dem Versuch gekommen bin, ein bei mir eingegangenes Ms. von U. Wegner[1)] zu widerlegen. Gibt es einen irregulären p–ten Kreiskörper derart, dass über ihm ein absolut–galoisscher zyklischer Klassenkörper p–ten Grades existiert, derart, dass die absolute Galoisgruppe dieses Klassenkörpers die *volle* metazyklische Gruppe[2)] von der Ordnung $p(p-1)$ ist? Ist dies etwa bei $p = 37$ oder einem der anderen Kummerschen Beispiele[3)] der Fall? Sie werden das sicher leicht beantworten können.

Wegner behauptet, beweisen zu können, dass ein Körper K, der über dem rationalen Zahlkörper auflösbar vom Primzahlgrade p ist und dessen Diskriminante von der Form

$$p^m(q_1 \dots q_r)^{p-1} \quad \text{mit} \quad m = p-2,\, p,\, \text{oder } 2p-1$$

ist, notwendig von der Form $R(\sqrt[p]{a})$ mit rationalem a ist[4)]. Ich glaube das nicht, weil ich glaube, dass Körper der oben angegebenen Art existieren, deren Diskriminante sicher diesen Typus (ohne die q_i)[5)] hat.

Mit herzlichen Fest– und Neujahrswünschen

Ihr

H. Hasse

Anmerkungen zum 22.12.1935

[1]Die korrigierte Note Wegners, der wie Scholz bei Issai Schur promoviert hatte, wurde (versehen mit Eingangsdatum 23.04.1936) im Crelle-Journal publiziert: [335]; vgl. auch [334] und [263].

[2]Der Begriff metazyklisch hat, ebenso wie metabelsch, verschiedene Bedeutungen. Ganz allgemein ist eine metazyklische Gruppe eine Erweiterung einer zyklischen Gruppe durch eine zyklische Gruppe. Ein Beispiel hierfür ist die Gruppe

$$M_{m,n,r} = \langle S, T : S^m = T^n = 1, T^{-1}ST = S^r \rangle$$

der Ordnung mn, wo $r^n \equiv 1 \bmod m$ ist. Die Kommutatorgruppe M' von M wird erzeugt von $S^{-1}T^{-1}ST = S^{r-1}$ und hat Ordnung $m/\gcd(r-1,m)$. Im Falle $\gcd(r-1,m) = 1$ ist $M' = \langle S \rangle \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und $M/M' \simeq \langle T \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; dies ist ein Beispiel für eine metazyklische Gruppe G im Sinne von Zassenhaus, der von metazyklischen G verlangt, dass G' und G/G' zyklisch sein sollen. Die von Hasse erwähnte volle metazyklische Gruppe taucht schon bei Kronecker auf (vgl. Netto [226, S. 284]) und hat die Präsentation

$$M_{p,p-1,p-1} = \langle S, T : S^p = T^{p-1} = 1, T^{-1}ST = S^r \rangle$$

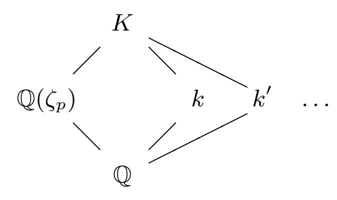
für eine Primitivwurzel r modulo p.

[3]Kummer hatte gezeigt, dass unter den Primzahlen < 160 genau 37, 59, 67, 101, 013, 131, 149 und 157 irregulär sind, also nach der Klassenkörpertheorie unverzweigte Erweiterungen p-ten Grades besitzen.

[4]Das schließt offensichtlich den Fall $a = 1$ der Kreisteilungskörper mit ein

[5]Eine unverzweigte Erweiterung p-ten Grades von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ hat Diskriminante $D = p^{p(p-2)}$; dessen Teilkörper p-ten Grades muss daher Dismriminante $D = p^m$ für ein $m < p-1$ haben.

Die Galoisgruppe der betrachteten Körper ist die metazyklische Gruppe $G = \langle S, T \rangle$ mit den Relationen $S^{p-1} = T^p = 1$ und $T^S = S^{-1}TS = T^r$, wo r eine Primitivwurzel modulo p ist. Die Primzahl p ist in $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ voll verzweigt ($p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}^{p-1}$), und im Klassenkörper L/K voll zerlegt, weil $\mathfrak{p} = (1-\zeta_p)$ ein Hauptideal ist. In L ist also $e = p-1$, $f = 1$ und $g = p$.



Die Primideale $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, …, $\mathfrak{P}_{p-1}$ haben Zerlegungsgruppen $\langle S \rangle$, $\langle ST \rangle$, …, $\langle ST^{p-1} \rangle$. Sei k der Zerlegungskörper von $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$, also der Fixkörper von $H = \langle S \rangle$. Die Hilbertschen Untergruppenreihen zu den Primidealen $\mathfrak{P}_j$ in L/k erhält man aus denjenigen für $L/\mathbb{Q}$ durch Schneiden mit H. In $L/\mathbb{Q}$ hat man $Z(\mathfrak{P}_j|p) = T(\mathfrak{P}_j|p) = \langle ST^j \rangle$ und $V(\mathfrak{P}_j|p) = 1$; also wird für $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{P}_0 \cap k$: $Z(\mathfrak{P}_0|\mathfrak{p}_0) = \langle S \rangle = H = T$, $V = 1$ (mit anderen Worten: $\mathfrak{p}_0$ ist in L/K rein verzweigt), für $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{P}_1 \cap k$ dagegen $Z(\mathfrak{P}_1|\mathfrak{p}_1) = 1$, d.h. $\mathfrak{p}_1$ ist in L/k voll zerlegt. Also muss $\mathfrak{P}_1\mathcal{O}_L = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_{p-1}$ sein, und die Primidealzerlegung in k ist $p\mathcal{O}_k = \mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1^{p-1}$. Die Differente von L/k ist daher $\mathfrak{P}_0^{p-2}$, die Relativdiskriminante $\operatorname{disc}(L/K) = \mathfrak{p}^{p-2}$, und aus $p^{p(p-2)} = \operatorname{disc}(L/\mathbb{Q}) = \operatorname{disc}(k/\mathbb{Q})^{p-1} N_{k/\mathbb{Q}} \operatorname{disc}(L/k) = (\operatorname{disc} k)^{p-1} p^{p-2}$ folgt dann $\operatorname{disc} k = p^{p-2}$.

3.73 30.12.1935, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) 30. 12. 35.

Lieber Herr Hasse!

Vielen Dank für Ihren Weihnachtsbrief und die allerherzlichsten Wünsche zum Neuen Jahr! Gestern wurde ich gerade daran erinnert, dass ich Ihnen noch betr. der Kreiskörper, der irregulären, noch Antwort schuldig geblieben bin. Also: Dann und nur dann ist ein Teilklk. K ℓ–ten Grades des $k(\zeta_\ell)$ vollmetazyklisch, wenn dieser Klassenzahlfaktor noch von keinem echten Teilkörper von $k(\zeta_\ell)$ stammt[1)], wenn also die zu K gehör. Kl. einteilg. $H + H\mathfrak{j} + \cdots + H\mathfrak{j}^{\ell-1}$ mit einem $\mathfrak{j}$ mögl. ist, das in allen Teilkörpern von $k(\zeta_\ell)$ ein Hauptideal als Norm hat. – Wenn insbesondere, wie bei $\ell = 37$, K der volle ℓ–Klk. ist, so genügt, dass alle Unterkörper K_ℓ^m $(m|\ell-1)$ noch eine zu ℓ fremde Klz. haben. Soviel ich weiss, ist das für $\ell = 37$ der Fall;[2)] jedenfalls hat der reelle $K_{37}^{12} : (h,\, \ell) = 1$, der zweite Klz. faktor! Man braucht also dasselbe nur für den K_{37}^{12} zu prüfen. Einfacher[3)]: $\ell = 59 :\ h(K_{59}^2) \cdot h(K_{59}^{29}) \not\equiv 0\ (59)$.

Kein Silvesterscherz: Bei meiner Schlusskonstruktion i. d. Normenrestnote lässt sich die Bedingung $(h,\, \ell) = 1$ f. d. Grk. K_0 entbehren. Ich kann das evtl. in der Korrektur in drei Zeilen hinzufügen.

Herzlichen Gruss! Ihr

Arnold Scholz

Anmerkungen zum 30.12.1935

[1]Etwas allgemeiner sei K/F eine zyklische Erweiterung vom Grade e, in welchem das Primideal $\mathfrak{p}$ rein verzweigt. Sei weiter die Klassenzahl von K gleich p (p prim), und keine Klassenzahl einer Teilerweiterung von K/F durch p teilbar. Dann ist die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/F)$ des Hilbertklassenkörpers L von K gleich $F_{ep} = \langle \sigma, \tau : \sigma^p = \tau^e = 1, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^r \rangle$ für ein r mit $\mathrm{ord}\,(r \bmod p) = e\rangle$ (insbesondere $e \mid (p-1)$).

In der Tat, sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal in L über $\mathfrak{p}$. Der Verzweigungsindex von $\mathfrak{P}$ ist e, und wegen $p \nmid e$ ist $(T : V_1) = e$, wo T und V_1 die Trägheitsgruppe und die erste Verzweigungsgruppe bezeichnen. Die Gruppe T/V_1 ist zyklisch; sei τ ein Erzeugende von T/V_1. Der Fixkörper von T ist dann eine Erweiterung k_p vom Grad p über k. Sei weiter $\sigma = (\frac{L/K}{c})$ der zur Erzeugenden c der Idealklasse $\mathrm{Cl}(K)$ gehörige Frobeniusautomorphismus (Artinsymbol); dann ist sicher $\sigma^p = 1$ und $\tau^e = 1$. Zu bestimmen ist noch $\tau^{-1}\sigma\tau = (\frac{L/K}{c^\tau})$. Da $\mathrm{Cl}(K)$ zyklisch ist, muss $c^\tau = c^r$ für ein $r \in \mathbb{N}$ gelten. Aus $\tau^e = 1$ folgt $c = c^{\tau^e} = c^{r^e}$, also $r^e \equiv 1 \bmod p$. Es bleibt zu zeigen, dass e die Ordnung von $r \bmod p$ ist. Sei daher $r^f \equiv 1 \bmod p$ für ein $f \mid e$. Dann lässt τ^f die Klasse c fest; sei k_f der Fixkörper von τ^f. Dann ist $N_{K/k}c = c^f$, also die Klassenzahl von k_f durch p teilbar; daher muss $f = e$ sein.

[2]Das ist richtig. Vgl. die Körperdiagramme in Hasses [123].

[3]Das folgende Beispiel bringt Wegner in [335, S. 9], mit Verweis auf eine Mitteilung von Hasse.

3.74 27.01.1936, Hasse an Scholz

27. Januar 1936.

Prof. Dr. H. Hasse.

Herrn

Dr. A. S c h o l z

Kiel – Kitzebühl

Drosselhörn 6

Lieber Herr Scholz!

Beiliegend, der Einfachheit halber, im Original die Antwort[1)] von Ore nebst Anlagen. Bitte behalten Sie die Anlagen für alle Fälle und senden Sie mir den Oreschen Brief nach Kenntnisnahme zurück.

Herzlichst
I h r

H. Hasse

Anmerkungen zum 27.01.1936

[1]Hier ein Auszug aus Ores Antwort vom 11.01.1936:

> *I met Scholtz [sic!] in Hamburg last year and he made the best impression upon me. I am afraid I shall have to be rather discouraging about the possibilities for obtaining a position in America at the present time, but there might still be some chances.*

Ore bemerkt, dass sie (u.a. wegen der großen Zahl von Flüchtlingen aus Deutschland) für Zorn noch keine Stelle für das nächste Jahr haben, und er erwähnt auch die Möglichkeit, sich um ein Stipendium für das Institute of Advanced Study zu bewerben.

3.75 31.01.1936, Scholz an Hasse

Arnold Scholz 31. Januar 1936.
Kiel–Kitzeberg, Drosselhörn 6.

Lieber Herr Hasse!

Haben Sie vielen Dank dafür, dass Sie sich um meinetwillen an Ore gewandt haben und bestellen Sie bitte gelegentlich auch Ore meinen Dank! Ores Brief sende ich Ihnen nach Kenntnisnahme zurück; einige Worte, die mir fehlten, hat mir Frau Schmidt übersetzt.

Nun hat sich im Laufe des Januar meine Lage wesentlich gebessert, sodass ich jetzt besser nichts einreiche; aber immerhin werde ich mir die Anlagen für alle Fälle aufheben, da man ja nicht mit einer allzu grossen Kontinuität rechnen. Also: ich bin zum Mitglied des wissenschaftlichen Prüfungsamtes ernannt worden – damit ist ja wohl jede Defamierung beseitigt – und habe bereits Beisitze in Chemie, Geologie und Mathematik gehabt. Ferner hab' ich, ebenfalls vom Ministerium, eine einmalige Beihilfe von 800 M „zur Förderung meiner wissenschaftl. Bestrebungen" erhalten. Das klingt auf einmal viel, aber in Anbetracht dessen, dass ich seit August auf etwas warte und die damals aus der Fakultätskasse ausgeborgten 200 M noch zurückzahlen muss, ist das man sehr knapp. Wenn ich allerdings zu Ostern dann anschliessend den Lehrauftrag erhielte, wäre ich natürlich zufrieden. Und selbst wenn man vorläufig nur ab und zu Beihilfen erhielte, könnte man davon hier ebensogut leben bzw. sich durchwurschteln wie mit einem möglicherweise 'not outcoming application'. Neiss berichtete mir, dass in Bln auch Graeser[1)] und Weber[2)] solche Beihilfen erhalten hätten. Nun ja, wenn man eben erst habilitiert ist wie Graeser, so kann man ja schliesslich einige Jahre so leben; aber wenn man wie ich sechs Jahre habilitiert ist, muss man doch endlich mit einem festen Einkommen rechnen können. Jedenfalls ist es mir angenehm, dass Sie Ore von meiner Lage unterrichtet haben – er schreibt jedenfalls sehr freundlich – ; man muss ja nicht mit Anliegen warten, bis man ganz auf'm Trocknen sitzt; denn so schnell kommt man nirgends zu etwas. So bin ich mal vorgemerkt; sollte sich mal was Geeignetes ergeben und ich habe hier noch nichts, so könnte mir das doch zu was verhelfen. Hoffen wir aber, es kommt zu Ostern der Lehrauftrag; dann braucht' ich mich nicht mehr umzusehen. Schüler krieg ich auch allmählich mehr; neulich hat sich erst einer bei mir zum Staatsexamen gemeldet, der eine Zahlentheorie–Arbeit haben will. Eine Studentin mit einer Grundlagenarbeit werd' ich wohl auch übernehmen.

Es ist sehr gut, dass Hammerstein jetzt einen strengeren Massstab anlegt; da lernen die Leute auch etwas anderes als Funktionentheorie. Auf Algebra und Zahlentheorie legt er ausdrücklich Wert. – Neulich waren wir zu viert in Hamburg (drei Doz., ein Stud.), haben den Sommerbesuch der Hamburger in Kiel erwidert und dort vorgetragen.

Meinen D. M. V.–Jahresbeitrag überweise ich die nächsten Tage. Ich nehme an, dass die Ermässigung auf 3 M auch noch für dies Jahr gilt.

Ich habe gehört, dass Deuring bei seiner Habilitation Schwierigkeiten hatte. Stimmt das? Auch soll Grötzsch seinen Lehrauftrag eingebüsst haben. Das sind wieder mal keine erfreulichen Anzeichen!

Forschung

Beim zweiten Studieren von Richters „Nichtabelscher Einbettung" (Math. Ann. 112, 69–84) hab' ich heute bemerkt, dass sein Satz 1 von grosser Tragweite ist: Vorausgesetzt, dass er unabh. davon gilt, ob K_0 die n–ten Ew. enthält oder nicht – bei Satz 1^{a} muss K_0 bestimmt die n–ten Ew. enthalten; aber erst bei Satz 1^{b} ist eine ausdrückliche Bemerkung darüber vorhanden!–, liefert Satz 1 auch die Hinreichendheit meiner Stuttgarter[3)] Einbettungsbedingungen.[1] Jedenfalls lassen sich daraufhin *Körper mit bel. ℓ–Gruppe konstruieren* – die Konstruktion würde, falls Satz 1 mit Einschränkungen gilt, nur etwas umständlicher ausfallen. Es ist ferner anzunehmen, dass sich die Einschränkungen des Satzes 1^{b} betr. Zentrum beseitigen lassen, und dann könnte man Körper mit bel. auflösbarer Gruppe[4)] konstruieren mit Angabe der günstigen Bedingungen für jeden Konstr.–Schritt.[2] – Im wesentl. lässt sich für die ℓ–Gruppen die Einbettungs–Aufgabe auf die zwei Teilaufgaben reduzieren – mit Rücksicht auf den p–adischen Sachverhalt von Satz 1:

I. VERLÄNGERUNGS-FÄHIGKEIT Einen zyklischen Körper ℓ^{n-1}–ten Grades in einen solchen ℓ^n–ten Grades einzubetten. (Vereinfachung Ihrer Aufg. 169!)

II. VERKNOTUNGS-FÄHIGKEIT Einen Ab. Körper vom Typus (ℓ, ℓ) in einen Nichtabelschen Körper mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ – Gruppe aus meiner letztens Ihnen eingereichten Note – der Ordg. ℓ^3 einzubetten.

[1] Vermerk am Rand der Seite, vermutlich von Scholz geschrieben: „Leider gibt Richter nicht an, welcher der beiden Brauerschen Def. für *reguläre* Zerfällungskörper er meint. – Auf diese Weise habe ich mir wenigstens mal Brauers Crelle 168–Note zu Gemüte geführt. An Richter werd' ich natürl. schreiben."

[2] Randbemerkung, vermutlich von Scholz: „Für mich genügt, dass Satz 1 für Grundkörper K_0 gilt, die einen bel. vorgegebenen Normalkörper enthalten."

Vorläufig gelingt mir die schrittweise Konstruktion eines Körpers mit einer bel. Gr. $\mathfrak{G}$ einer Ordg. ℓ^m erst so, das ich jeden Schritt so ausführe, dass ein Rédeikörper entsteht – Vollzerfall der Diskriminantenteiler[5)] –, dass ferner ein Diskriminantenteiler $\mathfrak{q}$ die Bedingung $N(\mathfrak{q}) \equiv 1 \ (\ell^h)$ erfüllt, wenn seine Trägh.–Substitution in der *ganzen* Gruppe $\mathfrak{G}$ die Ordg. ℓ^h besitzt, und dass nebenbei noch jede Einheit des Grundkörpers Norm in jedem Teilkörper ist, d. h. für alle $\mathfrak{q}$ die Bedingung $(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}}{}_{\ell^h}) = 1$ erfüllt. Ausserdem Reinverzweigtheit der Konstruktion (Nur dann liefert der Vollzerfall der Diskr. teiler immer einen „Knoten" und nenne ich den Körper Rédeikörper).

Die Konstruktion wird sich bestimmt so verfeinern lassen, dass die Bedingung $\varepsilon = N(\gamma)$ überflüssig wird.[3] Auch der Verzicht auf die Reinverzweigtheit muss nach dem Richterschen Resultat möglich sein. Das würde in der Terminologie meiner künftigen Crelle–Note – ich werde dort auch noch Richter zitieren müssen – Verzicht auf einen Zahlknoten überhaupt bedeuten; man würde trotzdem die Aufg. II mit einem Führer lösen können, der im Grundkörper noch nicht in Betracht kam als Führer.

Mit meiner letzten Methode wird sich möglicherweise der Richtersche Einbettungssatz ohne den Umweg über das Hyperkomplexe, direkt klassentheoretisch ableiten lassen:[4] Bettet man K_1/K_0 in K_2 ein mit K_2/K_1 zyklisch, Grad ℓ, Führer $f = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_s$, so muss sich die Gruppe von K_2 teilweise durch die $\left(\frac{K_0(\ell)}{\mathfrak{q}_\sigma}\right)$, wo $K_0^{(\ell)}$ den ℓ–Primärkörper von K_0 bedeutet, in dem alle Zahlen, die ℓ–te Idealpotenzen sind, zerfallen, charakterisieren lassen und zum andern Teil durch die Subst. eines Repräsentantensystems der absoluten Idealklgr.

Mit herzlichem Gruss! Ihr

Arnold Scholz.

---

[3] Bemerkung am Rande, in derselben Handschrift wie die vorhergehenden: „Falls der Richtersche Satz bei bel. K_0 gilt, kann man die Konstr. z. B. vom rat. Körper aus K_0–fremd machen."

[4] Randnotiz: „Ich lass' mich darüber gelegentl. ausführlicher aus."

Anmerkungen zum 31.01.1936

[1]Ernst Graeser, geb. am 28.1.1906 in Großenhain (Sachsen) promovierte 1931 in Leipzig unter Koebe über *konforme Abbildung des allgemeinen zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs auf die Fläche eines Kreisrings.* Nach seiner Habilitation in Berlin 1936 arbeitete er in Göttingen als Dozent; 1944 fungierte er als Gutachter für die Dissertation von Behrbohm in Göttingen, und 1950 schrieb er ein Büchlein über elliptische Funktionen und deren Anwendungen. Ab 1955 war er Professor an der Hochschule für Bauwesen in Leipzig.

[2]Werner Weber, geb. am 3.1.1906 in Oberstein, promovierte 1930 in Göttingen bei Emmy Noether und Landau; 1931 erfolgte die Habilitation, und 1935 ging er als Dozent nach Berlin, wo er, nach 2 Jahren Vertretung in Heidelberg, auch Professor wurde. Weber war Mitherausgeber der Zeitschrift „Deutsche Mathematik" und wurde nach dem 2. Weltkrieg wegen seines NSDAP-Engagements entlassen. Danach arbeitete er ab 1951 am Institut Dr. Brechtefeld in Hamburg als wissenschaftlicher Lehrer; gestorben ist er am 2. Februar 1975 in Hamburg.

[3]Scholz hatte 1935 auf der DMV-Tagung in Stuttgart über die Konstruktion von Galoiserweiterungen mit gegebener p-Gruppe vorgetragen.

[4]Das gelang dann später, aufbauend auf die Arbeiten von Scholz, Schafarewitsch. Vgl. auch Schmidt & Wingberg [278].

[5]Rédei hatte gezeigt, dass die unverzweigten zyklischen Erweiterungen vom Grad 4 über einem quadratischen Zahlkörper mit Diskriminante d im wesentlichen mit den Faktorisierungen $d = d_1 d_2$ in teilerfremde Diskriminanten korrespondieren, deren Faktoren den Bedingungen $(d_2/p_1) = (d_1/p_2) = +1$ für alle primen $p_1 \mid d_1$, $p_2 \mid d_2$ genügen, die also in den Körpern $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}\,)$ bzw. $\mathbb{Q}(\sqrt{d_2}\,)$ voll zerfallen.

3.76 28.03.1936, Scholz an Hasse

Arnold Scholz
Kiel–Kitzeberg, Drosselhörn 6.

28. März 1936.

Lieber Herr Hasse!

Gleichzeitig sende ich Ihnen meine Korrektur, die mir diese Woche genau gelegen kam. Da ich nunmehr zu dem Resultat gekommen bin, dass die Existenz eines Knotens im Ab. K. vom Typ (ℓ, ℓ) die genaue Bedingung für Erweiterbarkeit zum Nichtab. K' der Gruppe $\mathfrak{S}$ ganz allg. ist – bei verzweigtem ℓ ist dann die Vollzerfallsbed. für ℓ lediglich hinreichend – so möchte ich Ihnen bald eine zweite Note gleichen Titels einsenden und habe mir darum in der Korrektur gleich erlaubt, eine „I." hinter den Titel zu setzen. Das allgemein zu erwartende Resultat lautet so:

> Gegeben ein Normal–Körper K/K_0 mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ (beliebig). [$\overline{K}_0$ sei der Klassenkörperteil von K], $T_1, \ldots T_k$ seien die Trägheitssubstitutionen von K/K_0.
>
> Es sei $\mathfrak{K} = \mathfrak{G} \smile \mathfrak{C}$ $(\mathfrak{G} = \mathfrak{K}/\mathfrak{C})$ eine Schursche Darstellungsgruppe von $\mathfrak{G}$, d. h. 1. $\mathfrak{C} < \mathfrak{K}'$ Kommutator. 2. $\mathfrak{C} < \mathfrak{Z}(\mathfrak{K})$ Zentrum. 3. $\mathfrak{K}$ eine maximale Aufspaltg. dieser Eigsch.
>
> Es sei $\mathfrak{H} = \mathfrak{G} \smile \mathfrak{A}$ eine Tschebotarjowsche Aufspaltung von $\mathfrak{G}$ bzgl. $T_1, \ldots, T_k$, d. h. 1. und 2. wie oben: $\mathfrak{A} < \mathfrak{H}'$, $\mathfrak{A} < \mathfrak{Z}(\mathfrak{H})$.
> Ferner 3. $\mathit{Ord}\ T_k$ in $\mathfrak{H}$ $= \mathit{Ord}\ T_k$ in $\mathfrak{G}$. 4. $\mathfrak{K}$ eine maximale Aufspaltg. dieser Eigsch.
>
> [$\mathfrak{H}$ ist eindeutig bei $\mathfrak{G} = \{T_1, \ldots T_k\}$, bestimmt also bei $K_0 = \text{rat.}$]
>
> **Behauptung:** Ist jedes $\mathfrak{H}$ ein $\mathfrak{K}$ (i. allg. nur Fktgr. $\mathfrak{H} \prec \mathfrak{K}$), so gibt es dann und nur dann einen K enthaltenden Körper mit der Gruppe $\mathfrak{H}$, wenn der Knoten von K, d. h. die Gruppe der totalen Normreste nach den Normen von K/K_0, der Gruppe $\mathfrak{A}$ isomorph ist.
> I. allg. aber ist der Knoten nur einer Faktorgr. von $\mathfrak{A}$ isomorph, und dann existiert nur eine entspr. schwächere Erweiterung von K. Zugleich ist dann eine Ausdehnungsschranke für den Knoten gegeben, die nur von $\mathfrak{G}$ abh.
>
> Für die über $\mathfrak{G}$ herausragenden Teile der $\mathfrak{K}$ wird sich eine präzise Antwort i. allg. erst unter Heranziehg. der zu dem verlängerten

T_k gehörigen Zerleg. Fkt.–Gruppen geben lassen, so, dass von den für jedes einzelne Stück von $\mathfrak{C}$ verfolgbaren Eigenschaften: **A)** Vollzerfall der Diskr. teiler **B)** Knotenexistenz **C)** Körpererweiterungen alle drei oder nur eine erfüllt ist – wobei starke Verzweigungen ($\mathfrak{V} \neq 1$) ausser Diskussion stehen (Während innerhalb $\mathfrak{H}$ A), B), C) zus. fallen)

Hiermit dürfte in grossen Umrissen charakterisiert sein, wieweit die Normenresttheorie über die Klassenkörpertheorie hinausragt, wieweit sie das Nichtabelsche beherrscht.

$\mathfrak{H} \neq \mathfrak{K}$ kann z. B. bei Ab. $\mathfrak{G}$ vom Typ (ℓ, ℓ) nur auftreten, wenn $\ell = 2$ und alle drei Subst. $\neq 1$ der Vierergruppe Trägh. subst. sind. Oder z. B. wenn $\mathfrak{G}$ Diedergruppe d. Ordg. 8 ist, nicht aber, wenn $\mathfrak{G}$ Nichtab. v. d. Ordg. ℓ^3 ; $\ell \neq 2$. Bei Körperkonstr. lässt sich die Unbequemlichkt. $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{K}$ vermeiden, indem man die Ordg. en der El. der Abelschen Faktgr. genügend hoch ansetzt.

Bei der Konstruktion von Körpern mit beliebiger ℓ–Gruppe verwende ich für die (Abelschen) Zentralen Erweiterungen, folgende Tatsache, die sogar ganz allgemein gilt: (Eine rein gruppth. Angelegenheit !)

Seien K_1 und K_2 zwei Normal–Körper, deren Galoisgruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ so aufeinander isomorph abbildbar sind, dass die El. der Gruppe $\mathfrak{G}$ von $K = [K_1, K_2]$ in sich selbst übergehen. Ist dabei $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_2/\mathfrak{A}_2$, so zerfällt K_1K_2 in ein direktes Produkt $K_1 \times A_2$, wo A_2 ein Körper mit einer zu $\mathfrak{A}_2$ isomorphen Gruppe ist, m. a. W. K_1 geht in K_2 über bei Durchkreuzung von K_1/K mit einem A_2 .

(Die Durchkreuzung kann dabei mit einem belieb. A_2 geschehen, um wieder irgend einen K_2 zu erhalten, und zwar bei bel. isomorpher Zuordg. zu $\mathfrak{A}_1$.)

Es ist einfach der gruppenth. Satz, dass das relative Quadrat einer Gruppe $\mathfrak{H}$ über einer Fktgr. $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}/\mathfrak{A}$ abstrakt $\mathfrak{H} \times \mathfrak{A}$ ist.

Für die Konstr. der ℓ–Körper brauche ich den Satz nur für zentrales $\mathfrak{A}$. Da können also noch Durchkreuzungen mit bel. Klk. über dem Grundkörper auftreten, und so erhält man auch alle Erweiterungen, unter denen man wieder solche auswählen muss, die die nächsten Erweiterungen zulassen. Man wird natürlich schrittweise mit zykl. $\mathfrak{A}$ vorgehen.

In den Wittschen Konstruktionen für Funktionenkörper der Char. ℓ ist diese gruppenth. Tatsache implizit enthalten (Crelle 174 S. 241, 25–29) . Ich habe allerdings die Wittsche Arbeit noch nicht soweit studiert, dass ich sehe, ob die Herleitung aller isomorphen Erweiterungen aus einer aufgrund der Beschaffenheit dieser Funktionenkörper erfolgt oder auf allgemein gruppentheoretischer Grundlage. Ferner würde es mich interessieren, reinen Gleichungen durchkommt, die Konstruktion von Körpern mit ℓ–Gruppe zum entspr. Ergebnis führt wie bei alg. Zahlk. Ich werde Witt gelegentl. mal schreiben.

Von W. d. G. habe ich ein Angebot, eine Einführung in die Zahlentheorie[1)] für die Göschen–Sammlung zu schreiben. 700 M für 8 – 9 Druckbogen finde

ich sehr anständig. Habe zugesagt. Will auch einen Abschnitt „Zahlentheoretisches Rechnen“ anbringen. Meine Haupteinnahmen scheinen sich jetzt aufs Literarische zu verlagern. Von den geplanten weiteren „Beihilfen“ noch nichts wieder gehört. Mit Herrn Franz traf ich mal zusammen, als er im Dozentenlager Kitzeberg war: er hat im vorigen Semester auch nur während der Vorlesungszeit monatl. 200 M erhalten, in den Ferien nichts. Eigentlich sollte man aber annehmen, dass diese laufenden Beihilfen das ganze Jahr durch monatl. wenigstens 200 M brächten, wie ich hier hörte.

Ob ich in meinem Enzyklopädie–Artikel noch ein kurzes Kapitel über „Algebraische Teillösungen des Satzes v. d. arithm. Progression“ bringe? Überhaupt die Bauerschen Sätze, wo es sich immer um Existenz gewisser Körper handelt? – Furtwängler muss ich nächstens auch mal mahnen wegen der gemeinsamen Punkte. Ich werde wohl erst im Herbst einen ersten Manuskript–Entwurf fertig [haben]. Das Kapitel „Einbettung“ ist ja nun sehr im Fluss.

Ich freue mich, Sie in Oslo wiederzusehen, habe heut 29. 3. 36 Genehmigung vom Ministerium erhalten. Ausserdem hat die Univ. Kiel noch eine besondere Einladung vom Kongress erhalten; so werden Hammerstein und ich wohl von der Univ. aus hingehen[2)]. – Sie haben also Ihr Haus in Marburg noch?

Mit freundlichem Gruss an Sie und Ihre Frau Gemahlin

Ihr

Arnold Scholz.

Die Springersche Preiserhöhg. für Math. Z. u. Ann. hat sich bei uns so ausgewirkt, dass wir das Zentralblatt abbestellt haben. Übrigens: wenn $^1/_3$ der Bezieher D. M. V.–Mitgl. sind, stimmt die Rechng. mit 65/52 M. Ausserdem sind 1,50 Porto überflüssig.

Anmerkungen zum 28.03.1936

[1]Dieser Band 1131 der Göschen-Sammlung erschien 1939 und war sehr erfolgreich. 1972 erschien die von Bruno Schoeneberg umgearbeitete Version als Band 5131 im Walter de Gruyter-Verlag. Den Umarbeiten fielen das erste Kapitel über die Arithmetik der natürlichen Zahlen und das letzte über algorithmisches Rechnen zum Opfer.

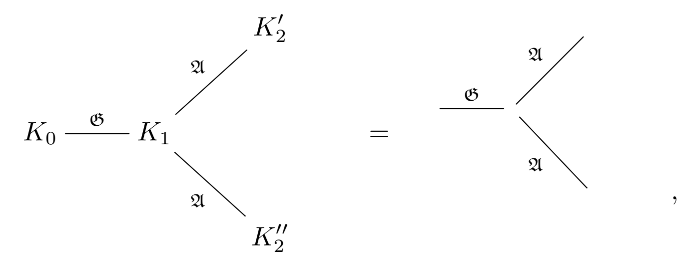
[2]In der Teilnehmerliste, die im Band *Congrès International des mathématiciens*, Oslo 1936, abgedruckt ist, tauchen weder Scholz noch Hammerstein auf. Dem Brief vom 22. Aug. 1936 kann man entnehmen, dass Scholz doch nicht daran teilnehmen konnte.

3.77 01.04.1936, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) 1. April 36

Lieber Herr Hasse!

Neulich hab' ich, was die direkte Zerlegbarkeit von Gruppen angeht, zuviel behauptet:



also $= \mathfrak{G} \smile \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ formal, ergibt nur eine direkte Zerlegung, wenn $\mathfrak{A}$ im Zentrum von $\mathfrak{G} \smile \mathfrak{A}$ liegt, wie ich's ja auch nur brauche.

Meine Korrekturen haben Sie erhalten, die ich noch nach Marburg sandte? Also Herr Rohrbach ist jetzt in Göttingen? Grüssen Sie ihn bitte von mir!

Ich vergass noch, Ihnen mitzuteilen, dass der Fehler im letzten Wegnerschen Manuskript[1)] bereits auf seine Note I im Crelle 168, 176–192 zurückgeht. Dort wird S. 190, Z. 6 behauptet, dass das soeben def. λ eine Einheit sei, während es auch eine ℓ–te Idealpotenz sein konnte. Es wird also hier direkt die Möglichkeit $\ell | h(K_2)$ übersehen. Ich hab' das bereits in meinem Fortschrittsreferat vermerkt.

Mit herzlichem Gruss!

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 01.04.1936

[1]Hier ging es um Aussagen über Zahlkörper gegebener Diskriminante, zu denen Scholz nach Hinweis von Hasse Gegenbeispiele konstruiert hat. Wegner gibt die Korrektur von [334] in [335, S. 1] mit Verweis auf eine Mitteilung von A. Scholz.

3.78 02.04.1936, Hasse an Scholz

2. April 36

Herrn Dr. Arnold Scholz

Kiel–Kitzeberg
Drosselhörn 6

Lieber Herr Scholz,

besten Dank für die Korrektur, Ihren Brief und Ihre Karte.

Die Korrektur habe ich weitergeleitet.

Selbstverständlich ist eine zweite Note Ihrerseits zu diesem Gegenstand in Crelles Journal willkommen.

Ein Kapitel über algebraische Teillösungen des Satzes von der arithmetischen Progression in Ihrem Enzyklopädieartikel wäre natürlich sehr schön. Ich nehme an, daß Sie dabei an die elementaren Beweise für Spezialfälle dieses Satzes denken. Die allgemeinen Bauerschen Sätze gehören aber doch wohl in den Artikel über Klassenkörpertheorie.

Es freut mich, daß Sie nach Oslo kommen können, wir können ja da noch über Ihren Artikel sprechen.

Meine Marburger Wohnung habe ich natürlich aufgegeben. Der Verlag hatte nur vergessen, die Adresse zu berichtigen.

Herr Rohrbach ist bisher nicht in Göttingen. Ihre Grüße kann ich also nicht ausrichten.

In England[1)] habe ich mit Fräulein Taussky über die geplanten Tabellen zu den Kreiskörpern gesprochen. Wir mußten einsehen, daß der von mir aufgestellte Plan das Menschenmögliche übersteigt. Die Klassenzahlen der vollen Kreiskörper werden sehr schnell so groß, daß eine Tabellierung nach Art der Sommerschen Tabellen ausgeschlossen ist. Wir haben nun den viel bescheideneren Plan ins Auge gefaßt, zunächst die kubischen Körper nach Art der Sommerschen Tabellen zu tabellieren und zwar mit Führer bis zu 100. Wie denken Sie darüber? Sehr dankbar wäre ich Ihnen, wenn Sie für mich ein Beispiel durchrechnen könnten, etwa den zu 23 gehörigen kubischen[2)] Körper, bis zur Angabe von Klassenzahl, Struktur der Klassengruppe, Grundeinheit. Ist Ihrer Ansicht nach eine solche Berechnung überhaupt mit den heutigen Mitteln technisch durchführbar?

Mit herzlichen Grüßen

stets Ihr

H. Hasse

Anmerkungen zum 02.04.1936

[1]Hasse hatte Ende Februar/Anfang März in England auf Einladung von Mordell Vorträge in Manchester gehalten.

[2]Gemeint ist wohl der kubische Körper mit Diskriminante -23, ein Teilkörper des Klassenkörpers von $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$.

3.79 17.04.1936, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) 17. 4. 36.

Lieber Herr Hasse!

Tabellen kubischer Körper finden sich in einer Diss. 1899 Gött. von Legh Wilber Reid. Und zwar werden kub. Gl. mit Koef. ≤ 10 herangezogen. Diese Tabellen sind in Sommer, Zahlenth. erwähnt, enthalten Basisangabe, Einh., Primzerlegung und grösstenteils auch Repräsentanten der Idealklassen, aber auch eine Reihe von Fehlern (Verstoss gegen ausserwesentl. Diskr. Teiler). An sich sind die kub. Klassenzahlen sehr niedrig; soweit ich mich erinnere, kommt in der Reidschen Tab. keine Klassenzahl > 3 vor, z. B. hat der niedrigste mit $D = -23$ natürl. die Klz. 1 . Entweder könnte man sich nun auf kubische *Normalk.* beschränken und dann mit Leichtigkeit bis $f = 500$ $(D < 500^2)$ kommen. Ich[1)] glaube, der K_{61}^3 hat mal eine Klz.[2)] 4 . Interessant wäre natürl. i. d. Hauptsache die (zweite) Dreierklgr. bei zus. ges. f. – Bei $|D| < 100$ hätte man ja überhaupt nur $\overset{\text{acht}}{\text{(sieben)}}$ Diskr. ausser den zyklischen. 23, 31, 44, 59, 76, 83, 87, 91; ich glaube[3)], das sind alle. – Wegen des Bestehens der Reidschen Tabellen ist es vielleicht geraten, sich auf Kreiskörper (evtl. auch Produkte von kubischen) zu beschränken. Von den vollen Kreisteilungskörpern könnte man immerhin eine Klassifizierung der Klassenzahlfaktoren vornehmen: von welchem Teilkörper sie stammen. Auf Repräsentanten müsste man natürl. verzichten. Wie weit man mit einer Tabelle kommt, kann man wohl erst bei Bearbeitung sehn. Fragt sich: wieviel Raum steht im ganzen zur Verfügung?

Herzliche Grüsse! Ihr Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 17.04.1936

[1]Scholz schreibt „Ist“ statt „Ich“.

[2]Der kubische Teilkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_{61})$ hat Klassenzahl 1; der kubische Teilkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ mit minimalem p und gerader Klassenzahl ist K^3_{163} mit Klassengruppe vom Typ $(2, 2)$.

[3]Ein kubischer Körper der Diskriminante $d = \Delta f^2$ mit Fundamentaldiskriminante Δ existiert genau dann, wenn die Klassenzahl der Formen mit Diskriminante d (das ist die Strahlklassenzahl mod f des quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta}\,)$) durch 3 teilbar ist. Das ist für $-d < 100$ genau für die angeführten Diskriminanten der Fall; allerdings muss es -92 heißen statt -91.

3.80 08.06.1936, Scholz an Hasse

Arnold Scholz
Kiel–Kitzeberg

8. Juni 1936.

Lieber Herr Hasse!

Habe ich Ihnen eigentlich schon mitgeteilt, dass ich von April 36 ab rückwirkend monatlich 200 M Beihilfe auf drei Jahre erhalte? Dies haben Anfang Mai hier mehrere Dozenten erhalten; es soll aus dem Promotionsgelderfonds sein. Also: jeden Monat fresse ich einen Doktoranden! Bin sehr froh, dass ich jetzt sichergestellt bin und denke mir nach dem Kongress eine Wohnung oder Leerzimmer zu mieten und so sesshaft zu werden. Denn das[1)] ist ja nun anzunehmen, dass ich jetzt länger hier bleibe. Bin auch sehr froh, gerade hier gelandet zu sein, wo man wirklich den besten Schutz gegen Intrigen hat. Rektor und Dekane haben hier das Heft sicher in der Hand; es gab hier in letzter Zeit wohl noch manches zu meistern; aber jetzt ist völlige Ruh.

Meine vollständige Körperkonstruktion für bel. ungerade ℓ–Gruppen[2)] hab' ich F. K. Schmidt im Mai eingesandt. Reichardt wird sie prüfen und im Colloq. vortragen. Bin jetzt etwas kreuzlahm vom Schreiben. Die Bearbeitung meines Enzyklopädie–Artikels ist in letzter Zeit überhaupt etwas zurückgeblieben, und ausserdem sind die Einbettungsfragen gerade so im Fluss, dass es vielleicht gut wäre, die endgültige Abfassung noch hinauszuschieben, wenn das mit Rücksicht auf andere Artikel geht. Meinen Artikel kann ich ja ohnehin erst nach dem Furtwänglerschen, eigentlich auch nach dem Magnusschen erst, abschliessen. Ursprünglich ist 31. 12. 36 angesetzt. Fw. wollte mir längst antworten, wieviel Spezielles er in seinen Artikel aufnimmt. Wir können ja in Oslo noch drüber sprechen. – Meine „totalen Normenreste" versende ich diese Tage, werde mich bald an die Fortsetzung begeben. Habe mich inzwischen für die Schurschen „Darstellungsgruppen" als Einbettungsgruppen entschieden; besser zu brauchen als die ungleichmässigeren Tschebotarjowschen. Einfach durch totale N. R. lässt sich die Frage beantworten, wann die *Gesamtheit* der Schurschen Darstellungsgruppe einer gegebenen Gruppe zugehörige Körpererweiterungen zulässt.

Für Witt denke ich morgen noch einen Zettel bei zulegen; darf ich Sie bitten, ihm den Zettel zu geben?

Grüssen Sie, bitte, Kaluza's und vor allem auch Herrn Ziegenbein, den es sicher interessieren wird, dass meine Sache nun in Ordnung ist.

Mit vielen herzlichen Grüssen an Sie und Ihre Frau Gemahlin.

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 08.06.1936

[1] Bei Scholz steht „dass“.

[2] Für 2-Gruppen wurde die Konstruktion erstmals von Shafarevich durchgeführt; Lücken in dessen Beweis wurden später von Schmidt und Wingberg [278] geschlossen.

3.81 22.08.1936, Scholz an Hasse

Arnold Scholz
Kiel–Kitzeberg

22. Aug. 1936.

Lieber Herr Hasse!

Meinen herzlichen Glückwunsch zu Ihrem Geburtstag; ferner zum endgültigen Verlust von T.[1]!

Von Zassenhaus, den ich auf der Rückkehr von meiner Nordkapfahrt[2] am 13. Juli in Hamburg traf, hörte ich, dass Sie auf eine unendliche Schar von Gradzahlen n mit Minimal–Diskriminanten D_n gestossen sind, für die $E_n = \sqrt[n]{D_n} = o(n)$ ausfällt. Haben Sie da bestimmtere Abschätzungen? Ich habe jetzt eine n–Schar gefunden[3] mit

$$E_n < (\log n)^2, \; D_n < (\log n)^{2n} \; .$$

Und zwar verwende ich Strahlklassenkörper; die absoluten Klk. sind ein Tropfen auf dem heissen Stein[4] Schon Strahlklassenkörper imaginär–quadr. Körper liefern $E_n = O(\sqrt{n})$. Meine Konstruktion[5] geht nun so:

Man nehme eine bel. Primzahl $p > 7$. (Wenn man nicht ganz genau abschätzen will, nehme man $p > \overset{70}{\cancel{55}}$). Es sei L der Körper der $(p-1)$–ten Ew. vom Grade $\varphi(p-1) = m$. Jetzt bilde man über L den vollen Strahlklassenkörper M mod p und beachte, dass p in L in m verschiedene Primideale zerfällt. Da nun L als total imaginärer Körper nur $\frac{m}{2}$ unabh. Einheiten einschliessl. der Einheitswurzeln besitzt, hat also die Strahlklassengruppe mod p mindestens die Ordnung $(p-1)^{\frac{m}{2}}$; denn $\frac{m}{2}$ Basiselemente der Ordg. $p-1$ bleiben beim Zusammenwerfen der Einheiten–Restklassen bestehen; bei guten Restcharakteren der Einh. kommen noch Faktoren dazu und eine absolute Klassengruppe kann auch noch als Gewinn gebucht werden. Wir haben also als Gesamtgrad

$$n \geq m(p-1)^{\frac{m}{2}} \; .$$

Dagegen $E_n \lesssim mp < p^2$. Denn $\sqrt[m]{D(L)} \lesssim m$; dies ist der eine Beitrag zu E_n. Da ferner die Relativdiskr. von M/L ein Teiler von $p^{(M:L)}$ ist, also ihre Norm$|p^{(M:1)}$, so liefert sie höchstens den Beitrag p zu E_n. (Genau $p^{\frac{p-2}{p-1}} \sim p$).

Nun ist $m = \varphi(p-1) > \frac{p}{2\log\log p}, > \frac{p}{3\log\log p}$ für kleine p. Also

$$\log n \gtrsim \frac{m}{2}\log p > \frac{p}{4}\,\frac{\log p}{\log\log p} > p \quad \text{für grosse} p$$

Während $\underline{E_n < p^2 < (\log n)^2}$.

(Wenn man schon für niedrige p diese Ungleichung haben will, lässt man $E_n < mp$, $n \geq m(p-1)^{\frac{m}{2}}$ stehn und setzt $m = \frac{p}{k\log\log p}$ bei $k < 3$. Jetzt hat man nur $\log n > \frac{p}{2k}\,\frac{\log(p-1)}{\log\log p}$ und $E_n < \frac{p^2}{k\log\log p}$ zu vergleichen. Es genügt $\frac{1}{\sqrt{k\log\log p}} < \frac{\log(p-1)}{2k\log\log p}$ oder $\log(p-1) > 2\sqrt{k\log\log p}$; $\big(\log(p-1)^2 > 12\log\log p$ genügt und ist für $p > 72$, roh abgeschätzt, erfüllt. Bei etwas besserer Abschätzg. wird man sicher auf $p > 20$ runterkommen.$\big)$ Nachgeprüft habe ich die Fälle

p	=	**11**,	**13**,	**17**,	**19**,	**23**,	**29**,	**31**
(log n)²	∼	36,	40,	173,	108,	314,	505,	246
$\mathbf{E_n}$	∼	29,	36,	114,	83,	172,	256,	158

Oben ist eben die Abschätzung von E_n durch mp noch recht roh; es ist für $p = 31$ noch $mp = 248 > (\log n)^2 = 246$. Genauer ist ja auch $p^{\frac{p-1}{p-2}} = p - \log p + o(\log p)$, und das macht bei einem Produkt $p-1$; $m = \varphi(p-1)$ mindestens soviel aus, dass man m wieder durch $\varphi(m) = \varphi\big(\varphi(\varphi(p))\big)$ ersetzen könnte. Also z. B. bei $p = 31$ hat man statt $8 \cdot 31$ genauer $5,8 \cdot 27^1/_4$.

Versucht hab ich's auch mit Strahlklassenkörpern mod p über $\prod\limits_{1<p} P(\sqrt{q})$; aber da steigt die Diskr. des quadr. Unterbaus zu stark, etwa mit Strahl mod $\prod\limits_{p<n} p$. An sich liefern ja die nicht voll zerfallenden Primzahlen mehr Zahlrestklassen; aber dafür werden dann auch mehr untereinander nicht isomorphe Teile von den Einheiten verschluckt. Beim obigen Kreiskörperbeispiel L verschlucken ja die Einheitswurzeln auch noch was, aber dafür braucht man nicht erst nach der Primzahl p zu suchen, die voll zerfällt. Ein solches Aufsuchen von p mit Potenzrestbedingungen würde das p zu hoch treiben. – Im ganzen vermute ich jedoch, dass man E_n noch auf $\frac{\log n}{(\log\log n)^{1-\varepsilon}}$ runterdrücken kann.

Etwa: $n = k^k \longrightarrow E_n = k \,; D_n = k^{k^k}$.	für eine Schar von n.

Wohingegen ich für Primzahlgrade zweifeln möchte, ob man da E_n etwa auf $\frac{n}{\log n}$ herabdrücken kann. $E_n = o(n)$ allg. möchte ich aus folgenden Erwägungen annehmen[6]:

Wie ich mir kürzlich überlegte und wahrscheinlich auch bekannt ist, sind die quadratischen L–Reihen $\sum\limits_n \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}$ unbeschränkt gegenüber D und nehmen, wie ich mir noch einmal sorgfältig überlegen muss, sogar unendl. oft

Werte ausserhalb (log log log $D)^{\pm 1}$ an. Sogar für Primzahl–D und für D mit fester oder beschr. Faktorenzahl. Für diese speziellen Klassen von D erhalte ich genau als „Durchschnittswert“[7)]

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\prod_{\lambda=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D_\lambda}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\prod_{\lambda=1}^{k} \prod_{p} \frac{p}{p-\left(\frac{D}{p}\right)}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} =$$

$$= \mathbf{1,2825} = \sqrt{\prod \frac{p^2}{p^2-1}}$$

Wobei $D_1, \ldots D_\lambda, \ldots$ also entweder alle Primdiskr., positive Primdiskr., Diskr. aus zwei Faktoren oder ... durchläuft.

Dagegen würde man z.B., wenn D alle Fundamentaldiskriminanten durchläuft, falls dort dieselbe Grenzwertvertauschung möglich ist (noch nicht überlegt), den Durchschnittswert $\mathbf{1,1980} = \prod \left(\frac{p^2}{p^2-1}\right)^{\frac{p}{2p+2}}$ erhalten. – Schliesslich für alle Diskr. zahlen: $\prod \left(\frac{p^2}{p^2-1}\right)^{\frac{p-1}{2p}} = \mathbf{1,162}$ (Letzteres einfach zu zeigen.)

Wenn man nun z. B. Prim–D so vorschreibt, dass $\left(\frac{D}{p_1}\right) = \left(\frac{D}{p_2}\right) = \cdots = \left(\frac{D}{p_r}\right)$ ist, wird am Durchschnittswert $\prod\limits_{p>p_r} \sqrt{\frac{p^2}{p^2-1}}$ nichts geändert, und da $\prod\limits_{\rho=1}^{r} \frac{p_\rho}{p_\rho - 1}$ mit r über alle Grenzen wächst wie log log p_r, so wird man ein D von der Grössenordg etwa e^{p_r} erhalten, für das $\sum \left(\frac{D_\lambda}{n}\right)\frac{1}{n} >$ log log p_r, jedenfalls aber unbeschränkt, da die weiteren Faktoren $\prod\limits_{p>p_r} \frac{p}{p-\left(\frac{D}{p}\right)}$ nicht durchweg unter Durchschnitt bleiben können. (Wenn man Nichtfundamentaldiskr. zulässt, ist eine unbeschränkte $\sum \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}$–Folge natürl. leicht zu konstr.; bereits mit $D = -3q^2$.)

Ist nun $D < 0$ Körperdiskriminante, $\sum \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{\pi h}{\sqrt{D}}$, so ist dann auch $\frac{h}{\sqrt{D}}$ unbeschränkt, wahrscheinlich also $h > \sqrt{D}$ log log log D zu erreichen[8)]. Jedenfalls $h \neq O(\sqrt{D})$. Bildet man dann den abs. Klk vom Grade $n = 2h$, so ist $E_n = \sqrt[n]{D_n} = o(n)$. Dasselbe gilt dann für den nichtgaloisschen Unterkörper h–ten Grades (h ungerade angenommen); es ist $E_h = E_n^{\frac{h-1}{h}}$. Da nun die Gaussschen Klassenzahltabellen ein ziemlich regelmässiges Auftreten einer ung. Zahl k als Teiler von h aufweisen und die ersten Diskriminanten mit einer bestimmten Klassenzahl eine ziemlich monotone Folge bilden, so darf man erwarten, dass sich sogar Körper ungeraden Grades n mit „unverhältnismässig kleinem” D entweder direkt als Diederkörper oder Produkt solcher für alle grossen n bilden lassen.

Jedoch möchte ich annehmen[9], dass z. B. $D_{397} > D_{400}$ und dann auch die schlechteste Simultanapproximation von 396 Zahlen in meinem obigen Körper 400–ten Grades[10] $(p = 11)$ vorkommt.

Ferner scheint mir jetzt ebenfalls unwahrscheinlich, dass man, wie Zassenhaus dachte, mit Diskr. absch. nach unten was für's Fermat–Problem anfangen kann. Denn $E_n < (\log n)^2$ lässt so hohe ℓ–Klassengruppe zu, dass denen auch mit der Morishima schen[11] Methode wohl nicht beizukommen wäre.

Eine untere Grenze meines Enzyklopädie–Artikels (Durchschnitt alles möglicherweise Aufzunehmenden) denke ich zur Längenabschätzg. im September Teubner einzuschicken.

Mit Hilfe von Faktorgruppen–Durchkreuzung mit zyklischen Verlängerungen der maximalen Abelschen Faktgr. einer gegebenen Gruppe kann ich jetzt die Schurschen Darstellungsgruppen (Crelle 127, 132) so charakterisieren:

Die Darstellungsgruppen $\mathfrak{H}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ gehen alle bei Abelscher Durchkreuzung auseinander hervor, und umgekehrt liefert jede solche (Durchkreuzung) eine Darstellungsgr. Die $\mathfrak{H}$ bilden, wie ich sage, ein „Geschlecht“ „verwandter” Gruppen (d. h. bei Durchkreuzg. ineinander überführbarer Gr.) folgende Eigsch:

1) $\mathfrak{H}$ ist eine zentrale Aufspaltung von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ nicht ändert (aufspaltet).

2) Jede solche zentrale Aufsp. von $\mathfrak{G}$ ist mit einer Fktgr. von $\mathfrak{H}$ verwandt.

3) $\mathfrak{H}$ enthält keine zwei verwandten Aufsp. von $\mathfrak{G}$ als Fktgr.

Dabei fällt mir übrigens ein, dass ich vergebens versucht habe, Wegner davon zu überzeugen, dass von seinen Diskriminantenkriterien für reine Gl. in den gewissen Fällen irregulären Primgrads ℓ nichts zu retten sei, und dass ein falscher Satz nicht durch Abänderung des Beweises richtig werden kann. In der Tat ist es z. B. bei $\ell = 37$ und 59, wo der Unterkörper Q ℓ–ten Grades des abs. Kreisklassenkörpers die voll–metazyklische Gruppe hat, so, dass es zu jedem reinen Körper $(\sqrt[\ell]{a})$ noch $\ell - 1$ unreine Körper derselben Diskr. gibt, die aus $(\sqrt[\ell]{a})$ bei nichtgal. Durchkreuzung mit Q entstehen. Einfach: $P(\gamma \sqrt[\ell]{a})$ wenn $Q = P(\gamma)$.

Anfang September werde ich mir mein Leerzimmer am Niemannsweg 61 (5×8 mit kl. Küche) einrichten; warte nur drauf, wann ein hiesiger Transport meine Möbel von Bln. mitnimmt. Bis Mitte Okt. werde ich wohl nicht mehr verreisen.[12]

Mit herzlichen Grüssen, auch an alle Kollegen in Göttingen

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 22.08.1936

[1]Tornier wurde 1936 von Göttingen nach Berlin abberufen, nachdem Hasse gedroht hatte, sonst aus Göttingen wegzugehen.

[2]Der ICM in Oslo fand vom 13.–18. Juli statt; Scholz kann also tatsächlich nicht daran teilgenommen haben.

[3]Das Scholzsche Interesse an Minimaldiskriminanten rührt von Furtwänglers Artikel [88]; dort nahm Furtwängler den folgenden Satz zum Ausgangspunkt seiner Überlegungen:

> *Ist k eine positive Konstante, die kleiner als $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ist, so gibt es stets reelle Irrationalitäten α von solcher Beschaffenheit, daß die Ungleichung*
>
> $$\left|\frac{x}{y} - \alpha\right| < \frac{k}{y^2}$$
>
> *nicht unendlich viele Lösungen in (teilerfremden) ganzen rationalen Zahlen x, y besitzt.*

Perron hatte dieses Resultat verallgemeinert, aber schlechte Schranken erhalten, die Furtwängler jetzt deutlich veschärfen kann:

> *Ist k eine positive Konstante, die kleiner als $|D|^{-1/2(n-1)}$ ist, wo D die absolut kleinste Diskriminante eines reellen Zahlkörpers n-ten Grades bedeutet, so gibt es stets $n-1$ reelle rational unabhängige Irrationalitäten $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ von solcher Beschaffenheit, daß die $n-1$ Ungleichungen*
>
> $$\left|\frac{x_i}{x_n} - \alpha_i\right| < k|x_n|^{-1-\frac{1}{n-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$
>
> *nicht unendlich viele Lösungen in (teilerfremden) ganzen rationalen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ besitzen.*

Danach bemerkt Furtwängler, dass die kleinste Diskriminante reeller kubischer Körper gleich -23 ist, und dass sein Schüler J. Mayer [192] auf seine Veranlassung hin den biquadratischen Fall untersucht habe, wo sich die kleinste Diskriminante eines reellen Körpers zu -275 ergab. Endlich gibt Furtwängler das Beispiel der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ mit Diskriminante $\le 2^{n-1}n^n$, um asymptotische Resultate aus seinem Approximationssatz zu ziehen. Eine Lücke in Furtwänglers Beweis wurde später durch diesen selbst, sowie durch Scholz [S6] geschlossen.

[4]Wie in [168] gezeigt wird, werden die Scholzschen Strahlklassenkörper über geeigneten Erweiterungen zu Hilbertklassenkörpern. Insbesondere sind Scholz' Strahlklassenkörper modulo p von $\mathbb{Q}(\zeta_{p-1})$ Hilbertklassenkörper über $\mathbb{Q}(\zeta_{p(p-1)})$.

[5]Für eine moderne Darstellung der Scholzschen Konstruktion und Bemerkungen zu späteren Arbeiten in dieser Richtung sh. [168]. Sei $E_n = |\operatorname{disc} K|^{1/n}$ die „Wurzeldiskriminante" des Zahlkörpers K vom Grad n mit minimaler Diskriminante $\operatorname{disc} K$. Aus der Existenz unendlicher Klassenkörpertürme folgt sofort $\liminf E_n = 0$. Die Körper $\mathbb{Q}(2^{1/n})$ haben eine Diskriminante, die die Polynomdiskriminante $2^{n-1}n^n$ von $x^n - 2$ teilt, liefern als $E_n < 2n$. Auch Kreisteilungskörper liefern keine wesentlich besseren Schranken. Durch Konstruktion metabelscher Erweiterungen gelingt es Scholz zu zeigen, dass $E_n < (\log n)^2$ gilt, wenn n die Grade $n = 2m(p-1)^m$ durchläuft, wo $p > 7$ Primzahl und $m = \frac{1}{2}\phi(p-1)$ ist. Ankeny [1] konnte zeigen, dass für metabelsche Erweierungen der Stufe $m \ge 1$ immer $\log E_n \ge c \log_m n$ gilt, wobei $\log_m$ den m-fach iterierten Logarithmus bezeichnet.

[6]Diese Vermutung ist immer noch unbewiesen; es scheint recht schwierig, Zahlkörper von Primzahlgrad und hinreichend kleinen Diskriminanten zu konstruieren.

[7]Vergleiche die Kommentare zum Artikel „Spezielle Zahlkörper“ auf S. 8 ff.

[8]Littlewood zeigte in [176], dass es unter Annahme der Richtigkeit der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung unendlich viele quadratische Diskriminanten d gibt mit $L(1,\chi_d) \geq (1+o(1))e^\gamma \log\log|d|$. In [102] zeigen Granville und Soundararajan, dass es unendlich viele Fundamentaldiskriminanten d gibt mit $L(1,\chi_d) \geq e^\gamma \log\log|d|$.

[9]Die Frage, ob die Minimaldiskriminante für Körpergrad 397 größer ist als diejenige für Grad 400, ist auch heute noch offen.

[10]Gemeint ist der Strahlkassenkörper modulo 11 des Körpers der 10-ten Einheitswurzeln. Dieser stimmt im vorliegenden Fall mit dem Hilbertklassenkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_{55})$ überein: $\mathbb{Q}(\zeta_{55})$ hat Klassenzahl 10, dessen Hilbertklassenkörper also Grad $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$.

Die Behauptung, dass die Folge der Minimaldiskriminanten nicht monoton steigend ist, ist etwas stärker als die von Odlyzko [233, S. 125] geäußerte entsprechende Vermutung für die Wurzeldiskriminante.

[11]Morishima hat in einer Reihe von Arbeiten (sh. etwa [205, 206], die beide von Scholz besprochen wurden) gezeigt, dass die Fermatsche Vermutung für den Exponenten p gilt, wenn die p-Klassengruppe von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ nicht zu groß ist.

[12]Im Jahresbericht der DMV **46** (1936), S. *85*, steht, dass A. Scholz bei der Tagung der DMV vom 13.–18 September in Bad Salzbrunn (Schlesien) einen Vortrag gehalten hat.

3.82 29.08.1936, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) 29. 8. 36.

Lieber Herr Hasse!

Im Anschluss an meinen letzten Brief bringe ich Ihnen noch eine bessere Abschätzg. für den $E_m = \sqrt[m]{D_m}$ der n–ten Kreisteilkp. $\big(m = \varphi(n)\big)$. Gerade der schlechtest abgeschätzte Fall $n = 2 \cdot 3 \cdots q = \prod\limits_{p \leq q} p$ mit $\log n \sim q$ gibt ein niedriges E_m . Es ist $m = n \prod\limits_{p \leq q} \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$ und für diese n bekanntl. $m \sim \dfrac{c_1}{\log\log n} \sim \dfrac{c_1}{\log q}$ Während wegen $x^{\frac{x-2}{x-1}} = x - \log x + o(1)$

$$\Big[\text{nämlich} \quad = e^{\left(1-\frac{1}{x-1}\right)\log x} = x \cdot e^{-\frac{\log x}{x-1}}$$

$$= x\,\Big(1 - \frac{\log x}{x-1} + O\left(\frac{\log^2 x}{(x-1)^2}\right)\Big) = x - \log x + O\left(\frac{\log^2 x}{x}\right)\Big] .$$

Dann

$$E_m \sim n \prod_{p \leq q} \left(1 - \frac{\log p}{p}\right) \sim n\frac{c_2}{q} \sim \frac{c_2 n}{\log n} .$$

$<$ Um $\prod\limits_{p \leq q} \left(1 - \dfrac{\log p}{p}\right)$ beim Summanden $\frac{\log p}{p}$ abbrechen zu können, braucht man schon die bessere Absch. $O\left(\frac{\log^2 x}{x}\right)$ des Restgliedes $>$.

Demnach $E_m = O\left(\dfrac{m \log\log m}{\log m}\right)$ für gewisse Kreisteilungskp. Falls unendl. viele Primz. $p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots q + 1$ exist., Strahlklk. mod p vom Grade N: $\log N = O\left(\dfrac{p \log p}{\log\log p}\right)$

$$E_N = O\left(\frac{p^2}{\log p}\right) = O\left(\frac{(\log N)^2\,(\log\log\log N)^2}{(\log\log N)^3}\right) .$$

Sonst, bei bel. p:

$$E_N = O\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^2 ,$$

wie aus heutigem Ansatz in Vbdg. mit heutigem leicht folgt.[1)]

Haben Sie den Druckfehler auf der
Formel unter V. Ihres Berichtes II
schon bemerkt[2)] ? § 18 ?

Herzl. Gruss !
Ihr
Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 29.08.1936

[1]Scholz und Hasse trafen sich einen Monat später auf der Mitgliederversammlung der DMV vom 14.9. bis 18.9. in Bad Salzbrunn, Schlesien. Der nächste Brief folgt dann erst nach einer einjährigen Pause.

[2]Dort hatte Hasse die Funktionalgleichung der $\mathfrak{l}$-adischen Exponentialfunktion in der Form

$$\exp_{\mathfrak{l}}(\eta_1 + \eta_2) = \exp_{\mathfrak{l}} \eta_1 + \exp_{\mathfrak{l}} \eta_2$$

geschrieben, mit + statt · auf der rechten Seite. Diese Formel ist auch in der Physica-Ausgabe von 1970 noch nicht korrigiert.

3.83 29.10.1937, Scholz an Hasse

Arnold Scholz
Kiel Niemannsweg 61.

29. Okt. 1937.

Lieber Herr Hasse!

Eigentlich wollte ich Ihnen alle drei für das JraM in Aussicht genommene Manuskripte auf einmal schicken: dies hier,[1)] die Gruppengeschlechter[2)] und die totalen Normenreste II.[3)] Das letztgenannte scheint jetzt auch in seiner etwa sechsten Fassung zu glücken; ich wollte es schon beinah als ein Beispiel (gegen Formalisten und Skolemisten) eines in Worten nicht ausdrückbaren mathematischen Sachverhalts nehmen. Indessen ist der Text von TN II noch nicht fertig ausgearbeitet, und die „Gruppengeschl.“ müssen auch noch etwas ablagern. Hingegen waren die Minimaldiskr. nach einjähriger Lagerung wohl reif zum Veröffentlichen, und da es im Rest des Jahres nach meinem Geschmack kein so passendes Eingangs–Datum für Diskr. abschätzungen mehr gibt wie den 30. Okt., so hab' ich's heut' noch endgültig überarbeitet. Magnus las es auf einer Eisenbahnfahrt und fand es verständlich. So möchte ich Sie bitten, also erst dieses mal aufzunehmen; die andern beiden Manuskripte denke ich dann bis Ende des Jahres oder März zu liefern.

Auf dieser Tagung war der „Enzyklop“ (Herr Heisig) sehr milde, was Ablieferungstermine betrifft; ich sollte mich an Sie wenden. Da ich nun erst die Göschen–Zahlentheorie zu Ende mache und dies sich auch bis Ostern hinziehen kann, wäre ich froh, wenn ich meinen Enzyklopädieartikel erst gegen Ende 1938 abzuliefern brauchte. Geht das? – Ausserdem hatte ich mit Magnus verabredet – er wird Ihnen das auch geschrieben haben – dass ich von meiner Seitenlänge bis zu drei Seiten wohl an Magnus abtreten könnte, falls Magnus gar zu starke Kürzungen zugemutet würden; aber nur dann. Vielleicht ist das Magnus sche Manuskript garnicht so lang. Magnus fürchtete sich, den Enzyklopen auf der Tagung zu treffen und blieb mit deshalb weg. Da fand ich in Goethes Zahmen Xenien einen passenden Vers zu:

> *„Bin ich noch weit entfernt von Euch. Hasse Zyklopen und Silbenfresser. “*

Überhaupt die Xenien haben's in sich!

Warum sind Sie diesmal[4)] nicht gekommen?

Von Kiel ist zu berichten, dass Lettenmeyer als Nachfolger von Kaluza bestätigt ist. Der arme Robert Schmidt hat wieder furchtbares Pech gehabt: Schädelbruch bei einer Motorradfahrt; Radfahrer ihm in den Weg gefahren, natürlich mittellos. Schuld des Radfahrers war einwandfrei festgestellt. Er ist jetzt so halbwegs wieder geheilt. Hatte dies Jahr schon mal Armbruch. Und vorher war seine Frau so lange krank. Er gerät immer tiefer in Schulden. Wenn er wenigstens mal 'ne Berufung bekäme!

Ist das nun fest, dass Siegel nach Göttingen kommt?

Neulich war ich mal wieder bei Grethlein wegen des Zahlentheorie–Bändchens. Ich überlegte mir, dass ich Quadrat. Formen auf alle Fälle nur sehr wenig bringen kann, und besprach, ob man sie nicht überhaupt für ein andres Bändchen aufspart. Dass Grethlein überhaupt Bedenken deswegen hat, ist verständlich; aber er motivierte das wieder gleich in der allgemeinen Form, dass „heute überhaupt nicht so viel Zahlentheorie getrieben würde", was mit mir auch Grunsky, der dabei war, widersprach. Grunsky brachte dann den vielleicht besten Vorschlag, später Quadr. Formen und Algebraische Zahlentheorie zusammen in ein Bändchen zu bringen, wenn jedes einzeln nicht geht. Dies wurde dann auch für den Fall, dass die Elementare Zahlentheorie gut geht, in Aussicht genommen. Das ist ja vielleicht eine sehr späte Sorge, die ich nur deswegen jetzt anschneiden wollte, um zu sehn, wie sehr ich das Kap. Quadratische Formen kürzen könnte. Aber was ich Ihnen hauptsächlich mitteilen wollte, ist die grundsätzliche Auffassung Grethleins über die Zahlentheorie. Vielleicht können Sie ihn bei passender Gelegenheit doch mal gründlich über die Bedeutung der Zahlentheorie aufklären.

Hier liest in diesem Semester Hammerstein die Zahlentheorie. Ich lese Diff. Int. I und Mengenlehre. Ich hab's diesmal für gut gefunden, nicht selbst die Zahlentheorie zu lesen. So kann ich Hammerstein mein Göschen–Manuskript auf Verständlichkeit prüfen lassen, was er gern macht, wenn er selbst Zahlentheorie liest. Es ist das Angenehme, dass er eigentlicht immer auf meine Wünsche eingeht. – Gestern fing der Herbstnebel wieder an. Ich glaube, ich hab' mich an dies Klima schon so gewöhnt, dass ich auch diesen Nebel jetzt vertrage. Jedenfalls hab' ich ein direktes Bedürfnis nach Luftfeuchtigkeit, aber auch Wind. Diesen Sommer hatte ja nun Kiel so gutes Wetter, wie ich noch nie erlebt. Hamburg hat dagegen das schlechte Wetter abbekommen. Artin sah ich dort noch am 11. Okt. Er wird jetzt wohl drüben gelandet sein und auf dem Wege nach Chicago (Notre–Dame, Indiana).

Viele herzliche Grüsse! Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 29.10.1937

[1]Hier geht es um die Arbeit [S21].
[2]Diese wurde später als [S23] veröffentlicht.
[3]Scholz [S25].
[4]Es geht um die Jahrestagung der DMV 1937 in Kreuznach. Scholz hat dort Hel Braun kennengelernt; in ihrem Buch [38, S. 45] schreibt sie:

> *Ich war vielleicht bereits ein Jahr in Göttingen als ich Witt kennenlernte, anlässlich eines Kolloquiums in dem Arnold Scholz vortrug, mit dem ich von Kreuznach her befreundet war.*

3.84 01.11.1937, Hasse an Scholz

1. 11. 37

Herrn Dr. A. Scholz

Kiel
Niemannsweg 61

Lieber Herr Scholz,

besten Dank für die Zusendung Ihres Manuskriptes über Minimaldiskriminanten für Crelles Journal. Ich werde es gern aufnehmen.

Ich bin nicht nach Kreuznach gekommen, weil ich mit Hochdruck an meinem Buch arbeite. Daher wird auch dieser Brief nicht so lang wie Ihrer. Ich beschränke mich darauf, ganz kurz Ihre Fragen zu beantworten.

Wegen Ihres Interesses an den Remakschen Ergebnissen sende ich Ihnen einen gerade bei mir eingegangenen Brief von Remak mit der Bitte um recht baldige Rückgabe nach Kenntnisnahme.

Weshalb ist der 30. Oktober als Eingangsdatum für Diskriminantenabschätzungen ausgezeichnet?

Heisig möchte gern Ihren Enzyklopädieartikel nach Möglichkeit schon früher als Ende 1938 haben. Vielleicht können Sie wenigstens erreichen, daß Sie ihn im Laufe der großen Sommerferien fertig machen. Magnus hat in seinem Artikel über Gruppentheorie erheblich mehr Platz gebraucht als vorgesehen war. Wir haben aber gesehen, daß es unmöglich ist, den Magnus'schen Artikel auf den vorgesehenen Umfang zusammenzustreichen. Es gibt eben so furchtbar viele Einzelresultate in der Gruppentheorie. Auch bei dem weiteren Artikel von Magnus wird wohl kaum eine Einsparung erzielt werden können. Es wäre daher sehr zu begrüßen, wenn Sie bei Ihrem Artikel eine gewisse Einsparung erreichen könnten.

Über das Urteil Herrn Grethleins über Zahlentheorie würde ich mir keine Kopfschmerzen machen. Ich werde gelegentlich mit ihm über die Sache sprechen, halte ihn aber in diesem Punkte für unbelehrbar. Sachlich finde ich es nicht gut, daß die quadratischen Formen zur algebraischen Zahlentheorie

geschlagen werden. Sie bilden doch einen klassischen Bestandteil der sogenannten elementaren Zahlentheorie. Ich würde sie ruhig aufnehmen und eine Umfangsüberschreitung riskieren, das ist nach meinen Erfahrungen die einzige Möglichkeit: man muß den Verlag immer vor vollendete Tatsachen stellen.

Mit herzlichen Grüßen

Ihr

H. Hasse

Anmerkungen zum 01.11.1937

[1] Hier geht es um die Arbeit [S21].
[2] Diese wurde später als [S23] veröffentlicht.
[3] Scholz [S25].
[4] Es geht um die Jahrestagung der DMV 1937 in Kreuznach. Scholz hat dort Hel Braun kennengelernt; in ihrem Buch [38, S. 45] schreibt sie:

> *Ich war vielleicht bereits ein Jahr in Göttingen als ich Witt kennenlernte, anlässlich eines Kolloquiums in dem Arnold Scholz vortrug, mit dem ich von Kreuznach her befreundet war.*

3.85 03.11.1937, Scholz an Hasse

Arnold Scholz
Kiel, Niemannsweg 61.

3. November 1937.

Lieber Herr Hasse!

Anbei sende ich das Remaksche Manuskript[1)] zurück. Ich finde das Resultat interessant und mir scheint, es ist wirklich neu. Keinesfalls kollidiert es mit meinen Minimalkörpern; denn diese besitzen gerade starken Einheitendefekt.

Ich werde also sehen, bis 30. 9. 38 mit meinem Enzyklopädieartikel fertig zu werden[‡‡] und bis Ende März mit dem Göschen–Bdchn. Vielleicht bring' ich doch ausführlicher die definiten Formen und deute die Red. der indefiniten Formen nur an. Oder bring' sie auch vollständig und so, dass man sie bei wirklich notwendiger „Reduktion“ des Bändchens auf ein Minimum reduzieren kann. Sehr ausführlich dachte ich, die Arithmetik der natürlichen Zahlen bringen zu sollen. Das Schubfächerprinzip muss wirklich bewiesen werden. Und zum Schluss bringe ich einen Abschnitt über „Zahlenth. Rechnen“. Dadurch soll es sich von anderen Erscheinungen abheben; denn ich finde, es soll jede Erscheinung etwas Besonderes haben. Kaum erwähnt werden bei mir dafür Dinge wie „vollkommene Zahlen“ und „grosser Fermat“. Für Sensationen dieser Art bin ich nicht. Andrerseits behandle ich wieder „Summatorische F.“ und „Möbiussche“ systematisch.

Im „Hochdruck der Arbeit“ müsste ich eigentlich auch sein; aber das hat bei mir keinen Zweck. Dann wird die Darstellung so schlecht, dass ich selbst den Sinn des zuletzt aufgeschriebenen Satzes nicht mehr entziffern kann. Was mir bei den T. N. II. zeitweise passierte.

Ihr „Fingerzeig“ auf den „Hochdruck“ hat mich jedenfalls davor bewahrt, Sie heute unnütz mit einer Sache zu bemühen: Lettenmeyer brachte mir die Nachricht, dass Caratheodory gebeten sei, Vorschläge wegen Nachfolge für Kamke zu machen und wies mich ausdrücklich darauf hin. Wahrscheinlich will er mich wegempfehlen; denn bei seiner „Gründlichkeit“ hat er auch im

[‡‡] Deswegen brauch' ich wohl an Heisig nicht mehr zu schreiben? Ich werde nach Möglichkeit Seitenzahl einschränken.

Lehrerfolg bei den Stud. weniger Glück als ich. Nun hab' ich Zermelo geschrieben, Cara zu bearbeiten, und F. K. Schmidt Knopp. Ich hätte an Sie nur die Bitte, keine andern Vorschläge zu machen, wenn Sie gefragt werden.

Von Mayrhofer erfuhr ich gerade, dass es zweifelhaft sei, ob ein Festband der Monatshefte zu Furtwänglers 70. Geburtstag am 21. April 1939 zustande käme, dass aber bestimmt einzeln gewidmete Arbeiten gesammelt werden könnten. Es sind ja fast noch $1^1/_2$ Jahr bis dahin, aber man kann sich nicht früh genug auf einen Artikel einrichten, und Sie würden ihm doch sicher auch gern etwas widmen? Furtwängler war übrigens sehr krank; ich fand ihn auf meiner Reise noch in der Klinik. Trotzdem war er geistig genauso frisch wie sonst, ein Beweis, dass ein Geist auch ohne Körper leben kann; er sprach so behend über eigene und andere Forschungen, dass ich kaum folgen konnte. Auch Frl. Taussky traf ich an; sie war sehr munter und kurz vor ihrer Abreise (Ende Sept.) nach London, wo sie „Old Geometry“ (old and dry) lesen soll, was ihr zwar nicht sehr behagt. Ferner hat sie Aussicht – das freut mich vor allem und hört ich erst von Schur – den Steinitz ins Englische übersetzen zu sollen. Das werden Sie wahrscheinlich schon wissen.

Zu Tübingen fällt mir noch ein: Kamke las ja gerade Mengenlehre, und ich tu' das auch mit besonderer Vorliebe, z. B. in diesem Semester hier. Ich glaube wirklich, ich wäre dort gerade die richtige Ergänzung, und gerade ein Extraordinariat wäre für mich wohl das Geeignetste.

Herzlichen Gruss! Ihr

Arnold Scholz.

auch an Kaluza!

Die Assoziation meiner Minimaldiskr.–Note mit 30. Okt. kann ich Ihnen nicht näher erklären. Jedenfalls helfen die Assoziationen mir oft zu einer Entscheidung, wenn ich mal einen Tag nicht weiss: Soll ich heute hier oder da dran arbeiten.

Anmerkungen zum 03.11.1937

[1]Vermutlich handelt es sich hier um die posthum veröffentlichte Arbeit [267]. Dort wird berichtet, das Manuskript sei am 14.11.1938 bei den Acta Arithmetica eingereicht worden, aber in den Wirren des 2. Weltkriegs verloren gegangen. Die Publikation in den compositio wurde dann mittels in Remaks Nachlass gefundenen Korrekturbogen besorgt.

3.86 22.07.1938, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) Kiel, 22. 7. 38.

Lieber Herr Hasse!

Das muss jemand anders gewesen sein, der Ihnen die Fehler in der Sommerschen Tabelle[1)] mitteilte. Ich hab' darüber erst durch Sie gehört. Beim flüchtigen Durchblick fiel mir nur auf, dass die ambige Bemerkung zu $D = 4 \cdot 34$ verkehrt ist, weil Hauptideal einmal im weiteren, einmal im engeren Sinne genommen ist. Dieselbe Bem. hätte er schon bei $D = 21$ machen können. – Ausserdem fand ich bei $D = 4{\cdot}82$ die $\underline{\underline{5}}$ in $\underline{\underline{3}}$ verbessert, was natürlich ein Druckfehler ist. Sonstige Stichproben haben keine Fehler ergeben.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 22.07.1938

[1]Hasse hatte Scholz anscheinend nach Fehlern in der Tabelle der Klassengruppen quadratischer Zahlkörper gefragt, die Sommer in sein Lehrbuch [301] aufgenommen hatte.

3.87 26.07.1938, Hasse an Scholz

26. 7. 38

Herrn

Dr. Arnold Scholz

Kiel

Lieber Herr Scholz,

Besten Dank für Ihre Karte. Ihre Bemerkung für $d = 4.34$ verstehe ich nicht. Hier ist doch die Norm der Grundeinheit 1, dagegen gibt es, weil d keinen Primteiler $\equiv -1 \bmod 4$ enthält, eine Zahl der Norm -1. Daher ist beim Sommerschen (gewöhnlichen) Klassenbegriff die Sommersche Fussnote richtig. Beim engeren Klassenbegriff dagegen gilt stets, dass jede ambige Klasse ein ambiges Ideal enthält. Beim gewöhnlichen Klassenbegriff gilt dies dann und nur dann nicht, wenn $N(\varepsilon) = 1$ aber ein $N(\alpha) = -1$.

Deshalb verstehe ich auch Ihre Bemerkung nicht, dass Sommer dasselbe für $d = 21$ hätte machen können. Denn hier ist doch kein $N(\alpha) = -1$ vorhanden, weil die zwei Teiler $\equiv -1$ mod. 4 sind.

Der Fehler bei $d = 4.82$ war mir auch schon aufgefallen. Desgleichen ist noch ganz verkehrt, dass $d = 4.31$ die Klassenzahl 3 hat. Es ist doch $h = 1$. Bei $d = -35$ ist $(5, \sqrt{-35})$ keine Basis des betr. Ideals.

Ich dachte, Sie wüssten *mehr* Fehler als ich. Nun ist es umgekehrt.

Nun habe ich noch eine Bitte. Wissen Sie wohl, welches für die Grade 4 und 5 die absolut kleinsten Körperdiskriminanten für jeden der drei möglichen Realitätstypen $r_2 = 0$, $r_2 = 1$, $r_2 = 2$ sind? Ich möchte diese Angaben sehr gern in mein Buch aufnehmen. Wenn es nicht zu schwer ist, wäre ich Ihnen für die Ausführung der erforderlichen Rechnungen dafür dankbar. Ich würde dann in meinem Buch einen entsprechenden Hinweis auf Ihre Mitwirkung an dieser Stelle machen. Wenn es gar nicht anders geht, muss ich natürlich auf $n = 5$ verzichten. Aber $n = 4$ sollte doch zu machen sein.

Herzliche Grüsse Ihr

H. Hasse

3.88 27.07.1938, Scholz an Hasse

Arnold Scholz
Kiel Niemannsweg 61.

27. Juli 1938.

Lieber Herr Hasse!

Für Ihren gestrigen Brief vielen Dank! Um gleich meinen Sommer–Irrtum vorwegzunehmen: ich habe nach meiner Rückkehr von Berlin, wo ich mein Göschen–Manuskript bis aufs letzte Kap. („Algorithmisches Rechnen“) abgegeben, eben schnell in den Sommer hineingeschaut und nicht dran gedacht, dass wenn man die $+1$ und -1 darstellenden Klassen (qu. Form der Discr. $D = -136$) zusammentut, beim Zusammenschrumpfen der Klassenzahl von von 4 auf 2 wieder eine neue ambige Klasse entsteht, die vorher nicht ambig war. Hab' nun gemeint, Sommer meinte „ambige Klasse“ im klassischen Sinne der Q. F., dagegen Hauptideal anders. Darum Verweis auf $D = 21$. – Von den von Ihnen erwähnten Fehlern hätte mir wenigstens $D = 124$ auffallen sollen, umso mehr als ich die kleinsten Beispiele $D = 148$ und 229 von $h = 3$ und $D > 0$ in meinem Göschen–Bändchen erwähnte. Ich hab' also doch die klass. Th. d. qu. F. ziemlich vollständig gebracht und auch die Reduktion der *indef.* F. irrationalitätenfrei[1)] durchgeführt, wovon mir erst der Nachweis, dass verschiedene Ketten inäquivalent sind, nicht glücken wollte, weil ich gleichzeitig zu wenig Substitut. theorie verwenden wollte. So nahm ich den Mertensschen[2)] Bew. und zeigte, dass die Kettenbildg. auf einen Algorithmus der Nachbarsubst. führt. Ich brauche *nicht* die zur Form gehörigen Wurzeln.

Nun zu den kleinsten Diskriminanten: für $n = 4$ sind es $D = 117$, $D = -275$ und $D = 725$ (letztes total reell). Der einfachste Beweis ist wohl der von J. Mayer[3)] in Wiener Akad. 1929 Abt. 2[a], 733–42. Wenn man erst mal weiss, dass es sich um imprimitive Körper handelt, dann ist die Berechnung der Discr. mit Betrachtung der möglichen quadr. Zwischenkörper sehr einfach. Zum Nachweis jedoch, dass die symmetrische und alternierende Gruppe nicht in Frage kommen, muss man entweder Reduktionstheorie treiben, wie Mayer nach dem Rezept von Furtwängler, oder Klassenkörper aufeinanderbauen, wobei man Klassenzahlen (durch 4 teilbare[‡‡]) und quadr. Rest–Verhalten

[‡‡] solche treten in den Tabellen von L. W. Reid (Diss. Gött. 1899) noch nicht auf.

von Einh. in kubischen Körpern studieren müsste, was wohl doch eine längere Rechnung ergäbe. Ich könnte sie jetzt kaum durchführen. Über die Verteilung der Diskr. auf die Galoisgruppe findet sich bei Delaunay[4] eine Übersicht für total–reelle biqu. Körper. Kleinste Diskr.:

$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{Z}_{ykl.}$	$\mathfrak{V}_{ierer}$	$\mathfrak{S}_{ymm}$	$\mathfrak{A}_{ltern.}$
725	1125	1600	1957	$26569_{=163^2}$

($\mathfrak{D}$ gewöhnl. Gr.=Diedergr. achter Ordg.)

Die symmetrische Gr. fängt also ziemlich spät an, und das scheint nicht nur für total–reelle K. so zu sein, wenn sie auch später die häufigsten werden[5]. Zu den kleinsten Diskr. scheinen doch immer die stark imprimitiven Körper zu führen, die einfachen Gruppen kleinster Ordg. hinten zu kommen.

Für die Dirichlet–R.

$$G(s) = \sum_{K \text{ mit } \mathfrak{S}} D_K^{-s} \quad \text{vierten Grades gilt}$$

$\alpha(\mathfrak{D}) = 1,\ \alpha(\mathfrak{Z}) = \alpha(\mathfrak{V}) = \frac{1}{2}$ und wohl $\alpha(\mathfrak{S}) = 1,\ \alpha(\mathfrak{A}) = \frac{1}{2}$ (α Konv. absz.)[6].

Dabei z. B. $\lim\limits_{s \to 1/2} \frac{Z(s)}{V(s)} = 0$ (lat. Funkt. buchst. mit dtsch. d. Gruppe entspr.)

Trotzdem[7] tauchen die zykl. Körper eher als die mit Vierergruppe auf, wie ja auch das kleinste p^2 unterhalb der Kl. pq liegt.

Für den Grad $n = 5$ kann ich Ihnen nur sagen, dass $D = 2209$ die kleinste auflösbare[8] Discr. ist.[9] (Galoisresolvente: Klassk. von $\sqrt{-47}$: -47^2) Vielleicht überhaupt die kleinste fünften Grades, natürl. total imag. An unauflösbaren ist mir auch keine kleinere als 2869 bekannt ($x^5 - x - 1$) unter 1000 wird die kleinste nicht liegen.

Die kleinsten Diskr. werden eben die Minkowskische Schranke weit zurücklassen[10], und eben darum wird ihre Diskussion bereits für $n = 5$ ungeheuer schwierig[11], gerade die Reduktionstheorie. Mit der Klkth. könnte man hier für die *auflösbaren* Körper noch fast so gut zu Rande kommen wie für $n = 4$. Z. B. schliesst man bald, dass dem $D = 2209$ höchstens noch Körper mit voller metazyklischer Gruppe[12] Konkurrenz machen könnten.

$\Big[$ Zykl. K_{11}^5 und K_{25}^5 haben $D = 11^4 = 14641$ und $25^3 = 15625$ und insgesamt Konv. absz. $\frac{1}{4}$ $\Big]$

< Andere Diederkörper, die ähnlich wie 2209, aber mit *verzweigtem* Klk. entstehen, hätten noch grössere $D > 11^4$ > . Bei metazykl. Gr. (Ordg. 20) scheiden 2000 und 2197 als Discr. dadurch aus, dass es im $K(\zeta_5)$ keinen Klassk. 5–ten Grades zum Führer 2 gibt und der K_{13}^4 (biq. Untkp. der 13–Ew.) keine durch 5 teilbare Klz. hat.

$\boldsymbol{s=1}$. Für 1 Paar Imagin., wo ja nur Symm. Gr. in Frage kommt, dürfte $D = -59083$ von $x^5 - 3x - 1 = 0$ für die kleinste Discr. zu hoch sein.
Für $s = 2$ hat man jedenfalls[13] $D \leq 401^2$.

Ich weiss nicht, ob Sie ausser den Mayerschen Ergebnissen was von dem, was ich hier mitteile, für Ihr Buch (wie wird das heissen ?) brauchen können; sonst können Sie's gern gebrauchen.

Eine Fortsetzung[14] der Minimaldiskriminanten mit bes. Berücksichtigung der Galoisgruppen gedenke ich im Furtwängler–Band der Monatshefte zu veröffentlichen. Unter der Voraussetzung, dass alle unverzweigten Türme, auch die unauflösbaren, abbrechen[15], lässt sich manche Übersicht gewinnen. Auch wenn man weiss, dass für die Körper n–ten Grades mit r reellen und s Paar imaginären Konjug. Körpern, $k = r+s-1$ Einheiten, also $n-1 = k+s$, gilt: $\Big[h$ Klassenzahl, R Regulator$\Big]$

(Siegel ?)→
$$\lim_D \frac{\log h}{\log \sqrt{D}} = \frac{s}{n-1}\ ; \quad \lim_D \frac{\log R}{\log \sqrt{D}} = \frac{k}{n-1}\ .$$

Die Summe stimmt[16] nach Siegel, und die Verteilung entspricht den quadratischen und einigen kubischen Erfahrungen und der Komposition der Körper.

Werden Sie auch was für den Furtwängler–Band schreiben ? Wenn alles gut geht, bin ich vielleicht im Winter schon in Wien, wo ich auf der Liste für ein Extraordinariat steh'. Da gehör' ich ja auch hin. Zur Tagung fahr' ich jedenfalls. Sie sicher auch ? Mit meinem Enzyklopädie–Artikel bin ich noch ganz im Rückstand; weiss nicht, ob ich bis Ende des Jahres fertig werde. Möchte jetzt lieber erst meine Noten: „Gruppengeschlechter“ und „Tot. Normenreste II“ für's Crelle J. fertig machen.

Mit herzlichen Grüssen Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 27.07.1938

[1]Die Reduktion indefiniter quadratischer Formen ist eng verwandt mit der Theorie der Kettenbrüche quadratischer Irrationalitäten. Der Hauptsatz der Reduktionstheorie besagt, dass äquivalente Formen im selben Zyklus liegen, also durch fortgesetzte Berechnung der Nachbarform auseinander hervorgehen. Der Beweis dieses Hauptsatzes erfordert eine Menge an technischen Rechnungen und Fallunterscheidungen unabhängig davon, ob man Kettenbrüche benutzt oder nicht.

[2]Mertens [195] zeigte, dass sich die Reduktion indefiniter quadratischer Formen auch ohne Verwendung von Kettenbrüchen durchführen lässt.

[3]J. Mayer [192] hat bereits 1929 die kleinsten Diskriminanten für Zahlkörper 4. Grades bestimmt.

[4]Delaunay (Delone) [67].

[5]Vgl. van der Waerden [326] und Furtwängler [89].

[6]Vgl. die Ausführungen in Kap. 1.

[7]Die Beziehung $\lim_{s\to 1/2} Z(s)/V(s)$ besagt, dass es „weniger“ Erweiterungen mit zyklischer als mit Kleinscher Vierer-Gruppe gibt.

[8]Der quadratische Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{-47})$ hat Klassenzahl 5; dessen Hilbertklassenkörper ist eine Diedererweiterung von $\mathbb{Q}$, deren Teilkörper 5. Grades Diskriminante 47^2 haben.

[9]Die Körper vom Grad 5 mit minimaler Diskriminante und Signatur $(1,2)$, $(3,1)$ und $(5,0)$ sind bzw. 1609, 4511 und 14641.

[10]Die folgende Tabelle zeigt, welche Abschätzungen nach unten für $|\operatorname{disc} K|$ aus der Minkowski-Schranke folgen:

	$n=1$	2	3	4	5	6
$r+s=1$	1	3				
2		4	13	44		
3			23	71	259	986
4				114	419	1598
5					678	2591
6						4200

Die entsprechenden minimalen Diskriminanten dagegen sind

	$n=1$	2	3	4	5	6
$r+s=1$	1	-3				
2		5	-23	117		
3			49	-275	1609	-9747
4				725	-4511	28037
5					14641	-92779
6						300125

[11]Mit den heutigen Mitteln und Methoden konnte diese Schranke bis $n = 10$ hinausgeschoben werden. Pioniere neben Delauney und Mayer waren nach dem 2. Weltkrieg vor allem Godwin [98] und Hunter [142] (dieser behandelte den hier angesprochenen Fall von Körpergrad 5); für weitere Darstellungen siehe vor allem Martinet [183, 184, 185] und Poitou [249].

[12]Das sind Unterkörper von Klassenkörpern zyklischer quartischer Körper mit Klassenzahl 5.

[13]Der reell-quadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{401})$ hat Klassenzahl 5; der angesprochene Körper ist der Unterkörper vom Grad 5 seines Hilbertklassenkörpers.

[14]Leider ist diese Fortsetzung nie erschienen; dies hat später Martinet [185] nachgeholt.

[15]Anscheinend vermutet Scholz immer noch, dass alle Klassenkörpertürme abbrechen. Artin hatte zwischenzeitlich eine unverzweigte Erweiterung mit einfacher Galoisgruppe A_5 konstruiert, und Scholz hatte in einer Aufgabe in den Jahresberichten gezeigt, dass es sehr viele solcher Beispiele gibt.

[16]Addition der beiden Gleichungen gibt $\lim \frac{\log hR}{\log \sqrt{D}} = 1$; sh. dazu Siegel [297] und Brauer [36]. In der vorliegenden Form sind die Aussagen sicherlich bereits für reell-quadratische Zahlkörper falsch; für $d = \sqrt{n^2+1}$ und gerades $n > 2$ ist $\varepsilon = n + \sqrt{d} \approx 2\sqrt{d}$ die Fundamentaleinheit, also $R = \log \varepsilon \approx \log 2 + \log \sqrt{d}$ und damit $\frac{\log R}{\log \sqrt{d}} = 0$. In seinem Manuskript [S27] schreibt Scholz nur noch, dass man „am häufigsten" wohl $\frac{\log h}{\log R} \sim \frac{s}{r+s-1}$ erwarten wird, und dass sich der Term $\sqrt{d}$ bereits im reell-quadratischen Fall sehr willkürlich auf h und R verteilt.

3.89 02.08.1938, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) Kiel, 2. 8. 38.

Lieber Herr Hasse!

In Ergänzung meines Briefes: Natürlich ist der reelle Untkp. K_{11}^5 der 11–ten Ew. mit der Diskr. $11^4 = 121^2$ bereits ein Körper kleinerer Diskr. als der mit der Galoisresolvente $\overline{K(\sqrt{401})}$ und $D = 401^2$. Sodass

$$n = 5 \qquad \begin{cases} s = 2 & : \quad D \leq 2209 \\ s = 1 & : \qquad ? \qquad (D \leq 59083) \end{cases}$$
$$s = 0 \quad : \quad D \leq 14641 \; .$$

Zum Vergleich damit[1)]

$$n = 6 \quad \begin{cases} s = 3 & : \quad D \leq 9747 \qquad \text{Klk. } (\sqrt{-3}) \quad f = p_{19} \\ s = 0 & : \quad D \leq \underset{=D(K_5^2 \cdot K_7^3)}{300125} = 5^3 \cdot 7^4 \quad \begin{cases} < 13^5 < 37^3 \cdot 2^4 \\ < D(\text{Klk. } \sqrt{5}, \sqrt{8}\,) \end{cases} \end{cases}$$

Mit freundlichem Gruss! Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 02.08.1938

[1]Die Minimaldiskriminante für Körper der Signatur $(0, 3)$ ist in der Tat 9747, und 300125 für Signatur $(6, 0)$.

3.90 07.08.1938, Hasse an Scholz

7. August, 1938

Lieber Herr Scholz,

Herzlichen Dank für Brief und Karte. Der Hinweis auf J. Mayer war mir sehr wertvoll. Von den übrigen Angaben möchte ich aber doch nichts in meinem Buch bringen, da alles dies nichts Endgültiges ist. Sie haben mich jedenfalls sehr interessiert. Davenport hat sich eine sehr nette Methode ausgedacht, um den Beweis für die Minimaldiskriminanten für $n = 3$ erheblich kürzer zu führen als Furtwängler. Die Methode besteht darin, an dem Minkowskischen konvexen Körper (Oktaeder oder Kegel) zwei Scheiben abzuschneiden, sodass der Gitterpunkt 1 vermieden wird und ein primitives Element herauskommt. Man hat dann nur alle Polynome

$$g(x) \,=\, x^3 - g_1 x^2 + g_2 x - g_3$$

mit

$$|g_1| \leq 2\,, \quad |g_2| \leq 4\,, \quad g_3 = 1$$

zu prüfen, die sich nach Weglassung der 9 reduziblen und weiterer Weglassung von 9 durch $x \to x^{-1}$ entstehenden auf 27 Polynome reduzieren. Von diesen sieht man den Diskriminanten von 19 ohne weiteres an, dass die zugehörige Körperdiskriminante nicht in einem der Intervalle $21 \leq d \leq 49$ bzw. $-15 \geq d \geq -23$ liegt. Für 4 Polynome ist $d = -23$, für eins ist $d = 49$, und die übrigen drei haben die Diskriminanten $2^2 \cdot 37,\ -2^2 \cdot 19,\ 3^3 \cdot 5$. Da aber die zugehörigen reduzierten Polynome (Zweiter Koeffizient 0) eisensteinsch für 2 bzw. 3 sind, stecken für sie die Potenzen $2^2,\ 3^3$ wirklich in der Körperdiskriminante. Ich habe als Beispiele auch noch die drei Mayerschen biquadratischen Diskriminanten aufgenommen, ohne allerdings hier den Minimalbeweis durch Reduktion wirklich auszuführen.

Also nochmals vielen Dank für Ihre Hilfe.

Herzlichst Ihr
H. Hasse

3.91 19.10.1938, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) Kiel 19 X 38

Lieber Herr Hasse!

Nun wollt' ich Sie noch was zum Abschluss mein Zahlenth.–Bdchens fragen: Ich habe da die Gottschalksche sehr einfache Bemerkung zum Fermat–Problem (Math. Ann. 115, 157)[1)] erwähnt[2)]; das liegt ja genau in der Richtung meiner Rechenverfahren. Hat man solche Kombinationen bei der Abzählung, dass der Fermat–Satz Fall I bis 14000 richtig (Ihr Bericht II § 22), noch nicht gemacht? < Die Literatur dazu ($\uparrow$) ist hier nicht vorhanden > – Ich war beim Quadr. Formen–Text schon drauf und dran (Zermelo war dafür), „Substitution“ durch „Ersetzung“, unter einmaliger Angabe: „= Substitution“, zu ersetzen; oder wenigstens „automorphe Substitution“ durch „Ungleichung“, weil mir die langen Fremdwörter, über die man beim Aussprechen stolpert, nicht behagen; hab's aber doch erst mal sein gelassen. Platz würde man schon dabei sparen. Was meinen Sie dazu? Ich denke aber meinen Manuskript–Rest Montag in Bln. abzuliefern. Reise Sonntag hin. – Noch vielen Dank für die Sonderdrucke von Ihrem Oslo–Vortrag und aus der „Nat.–math.–Gegenwartsarbeit“. Das ist, um mal wirklich in die Sache hineinzukommen! Ich kannte bisher davon sehr wenig. Der „Lösungswert ∞“ entspricht dem Automorphismus auf die 0? Herzlichen Gruss! Ihr

Arnold Scholz.

Olga Taussky hat im Okt. geheiratet: einen Iren, Mathematiker.

Anmerkungen zum 19.10.1938

[1] E. Gottschalk [100].
[2] Auf S. 130.

3.92 21.10.1938, Hasse an Scholz

21. 10. 1938

Lieber Herr Scholz,

über die Methoden, nach denen der Fermatsche Satz bis 14000 als richtig festgestellt wurde, weiss ich nichts; ich habe mich auf die Angaben in Dickson's History und auf die Arbeiten von Vandiver verlassen. Es sollte mich wundern, wenn nicht in der letzten Zeit auch an diesem Problem mit den technischen Rechenhilfsmitteln von Lehmer und Genossen gearbeitet worden ist.

Ich bin nicht für ein allzu weit gehendes Ersetzen von gut eingebürgerten Fremdworten durch deutsche Äquivalente (Gleichworte). In meinem Buch habe ich dies lediglich bei mehr sprachlichen Ausdrücken getan, die keinen eigentlichen mathematischen Sinn haben, wie z. B. Struktur durch Aufbau, charakterisiert durch gekennzeichnet.

Der Lösungswert ∞ entspricht nicht einem Automorphismus sondern einem uneigentlichen Meromorphismus, der seinerseits im Meromorphismenring die Rolle der 0 spielt.

Von Olga Tausskys Heirat hatte ich schon durch sie selbst[1)] gehört.

Herzliche Grüsse

Ihr

H. Hasse

Anmerkungen zum 21.10.1938

[1]Im Brief von Taussky an Hasse vom 11.09.1938.

3.93 08.11.1938, Scholz an Hasse

Arnold Scholz
Kiel Niemannsweg 61

8. Nov. 1938.

Lieber Herr Hasse!

Um die Bezeichnung „Ring“, die in den Nebenforderungen so verschieden gebraucht wird, drehte sich neulich unser Gespräch, und da wollten wir Sie fragen, wie Sie’s heut definieren, namentlich weil ich die Bezeichnung, wenn auch meist nur im Sinne „Restklassenring“, woher wohl eigentlich die Bezeichnung kommt, in meinem Göschen–Bändchen gebrauche; man müßte da doch mal zu einer Einigung kommen. Ich finde dabei die Frage der kommutativen Multiplikation für den Anfänger nicht so wichtig; man kann sie ihm ruhig erst kommutativ vorsetzen und später die Bezeichnung „Ring“ erweitern, sobald das Bedürfnis nach nichtkommutativen Bereichen vorliegt. Wichtiger finde ich folgendes: Der Anfänger lernt im Ring der ganzen rat. Zahlen sofort den *Modul* der geraden Zahlen (z. B.) kennen. Dieser darf nun nicht auch „Ring“ heißen, fiele aber unter diesen Begriff, wenn man nur verlangt, daß Addition, Subtr. und Multiplikation unter den üblichen Regeln ausführbar sind. Ich bin also dafür, wenigstens reproduktive Multiplikation zu verlangen ($R^2 = R$ für einen Ring R) oder gleich Existenz einer *Eins*.

Was halten Sie für besser?

Im ersten Fall verlangt man also, daß jede Zahl überhaupt durch irgendeine teilbar ist, im zweiten Fall: durch sich selbst. Für die elementare Zahlentheorie ist diese Entscheidung ja noch unwesentlich; ich halte es so für günstig, wie ich es auf beigelegtem Blatt aus meinem Göschen–Manuskr – Durchschlag gemacht hab. Ich wollte mich damit noch nicht endgültig festlegen in der Wahl der Bezeichnung. Meiner Meinung nach muß der Anfänger erst mal die Begriffe hören, ohne daß er sie sich gleich fest einprägt; das geschieht erst bei wiederholter Anwendung. Früher definierte man meist zu spät, heute leicht zu früh.

Im ganzen bin ich jetzt mehr dafür, gleich die Existenz der Eins für den Ring zu fordern, zumal aus einem einsfreien Ring R durch direkte Addition eines Modells Z der ganz–rat. Zahlen mit der Eins e ein Ring $Z + R$ mit der

Eins e entsteht, wenn $ne.r = nr$ gesetzt wird. Da R also jedenfalls *Ideal* in irgendeinem Einsring (z. B. in $Z + R$) ist, so möchte ich das, was v. d. W. und Sie in Ihrer Göschen–Algebra „Ring“ nennen, schlechthin „Ideal“ nennen. So bilden also die geraden Reste mod 6 einen Ring mit der Eins 4, die geraden Reste mod 4 aber nur ein Ideal.

Gerade das fiel auch Lettenmeyer ein, daß man ja ohne Einsforderung jedes Produkt $= 0$ definieren könne, und das wollen Sie doch sicher erst recht ausschließen, wenn Sie schon den Fall ausschließen, daß der Ring aus der 0 allein besteht. (Darunter fiele das letzte Beispiel oben).

Mit „*Integritäts*bereich $I =$ nullteilerfreier komm. Ring“ hab ich mich v. d. W. angeschlossen, finde aber eigentlich, daß in der Integrität auch die Ganzheitsforderung steckt: $e \neq ny$ mit y in I, genau genommen sogar auch, daß Charakteristik $= 0$. (dass man die 1 nicht additiv zerlegen kann.)

Für kurze Mitteilung und Rücksendung des Manuskriptbogens 36 wäre ich Ihnen sehr dankbar.

Von Kiel gibt es nichts zu melden, ausser dass wir kaum mehr Studenten[1)] haben. Für Ihren letzten Brief vielen Dank! Das Göschen–Manuskript hab' ich also in der letzten Oktoberwoche abgeliefert.

Viele herzliche Grüsse!

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 8.11.1938

[1]Die Zahlen der Mathematikstudenten sind während des Nationalsozialismus regelrecht implodiert; Kiel ist hier keine Ausnahme.

3.94 12.11.1938, Hasse an Scholz

12. 11. 38

Lieber Herr Scholz!

Die von Ihnen aufgeworfenen Bezeichnungsfragen habe auch ich mir oft durch den Kopf gehen lassen. Bei aller Würdigung der von Ihnen vorgebrachten Gesichtspunkte finde ich aber, dass es höchst unerwünscht ist, *noch eine* Variante in den Definitionen an einer so vielgelesenen Stelle wie in einem Göschenbuch zu schaffen. Sie sollten, um weitere Verwirrungen zu vermeiden, sich an eine der bereits vorhandenen Definitionen anschliessen, also entweder v. d. Waerden (=Frl. Noether) oder an mich. Der Unterschied zwischen diesen beiden liegt nur bei der Definition des Integritätsbereiches, wo ich ein Einselement fordere, v. d. Waerden nicht. Ich würde also an der bisher ganz einheitlichen Ringdefinition *nichts* ändern, d. h. dabei *keinerlei* die Division betr. Forderungen stellen. Insbesondere scheint es mir ganz abwegig, bei Integritätsbereich etwa eine Forderung zu stellen, die auf Char. 0 hinausläuft, denn der Integritätsbereich der Polynome in t mit Koeffizienten mod. p verdient doch ganz gewiss den Namen „Integritätsbereich = Ganzheitsbereich". Im übrigen werden doch[1)] diese Fragen für Ihr Göschenbuch gar keine Rolle spielen, da Sie sich nur mit Zahlentheorie befassen.

Ihr Vorschlag, das was v. d. Waerden und ich „Ring" nennen, mit „Ideal" zu bezeichnen, würde eine ausserordentlich unerwünschte Verwirrung in diesen für die ganze Mathematik grundlegenden Begriff (den Idealbegriff) hineinbringen. „Ideal" ist nun einmal kein Absolutbegriff, sondern ein Relativbegriff, in dem Sinne, dass er in bezug auf einen bestimmten Ring verstanden ist. Daran etwas zu ändern, fände ich unverzeihlich. Seien Sie sich der Verantwortung bewusst, die Sie mit der Schaffung einer solchen Begriffsverwirrung auf sich nehmen!

Das beste Hilfsmittel, zu klaren und für alle Fälle ausreichenden Bezeichnungen zu kommen, scheint mir, die jeweiligen Zusatzforderungen, die man an (meinen) Ringbegriff stellen kann, definitorisch durch geeignete Beiworte zu „ring" festzulegen. Also „Ring ohne Nullteiler", „Ring mit Eins", „Ring ohne Nullteiler mit Eins = Integritätsbereich", „reproduktiver Ring" ($R^2 = R$), u. s. w. nach Bedarf. In den ersten beiden Fällen könnte man auch noch kürzere charakteristische Eigenschaftsworte erfinden, aber wozu? Nicht immer liegt die Würze in der Kürze, sondern in der Mathematik häufig in der Klarheit.

Herzliche Grüsse und Heil Hitler!

Ihr

H. Hasse

Anmerkungen zum 12.11.1938

[1] Hasse hatte sich vertippt: er schrieb „coh“ statt „doch“.

3.95 17.04.1939, Hasse an Scholz

17. 4. 1939

Lieber Herr Scholz,

Zu meiner grossen Freude ist es mir gelungen, Herrn Philip Hall aus Cambridge, King's College für eine Vortragsreihe über Gruppentheorie in der Mathematischen Gesellschaft Göttingen zu gewinnen.[1)] Ich möchte dies zum Anlass nehmen, um gleichzeitig eine möglichst grosse Zahl von gruppentheoretisch interessierten Mathematikern nach Göttingen zu Vorträgen einzuladen und so eine Art gruppentheoretischer Woche hier zu veranstalten. Bei der Vorbereitung hierzu haben mich die Herren Magnus und Zassenhaus in dankenswerter Weise unterstützt. Wir haben uns dabei, um einer Überfüllung des Programms und Überlastung der Zuhörer vorzubeugen, zur Richtlinie gesetzt, dass die Vorträge in innerem Zusammenhang mit den Hallschen Arbeiten stehen sollen. Die Hallschen Vorträge sollen ausgesprochen den Mittelpunkt der Veranstaltung bilden, die Vorträge von deutscher Seite sollen sich daran anschliessen. Ich würde mich sehr freuen, wenn wir auch von Ihnen einen Vortrag bekommen könnten, und zwar habe ich auf Vorschlag von Magnus und Zassenhaus an ein Thema der Art 'Erweiterung und Aufspaltung von Gruppen' gedacht. Ich habe mir erlaubt, dies vorläufig einmal in den Programmentwurf einzusetzen, damit sich ein Bild der ganzen Veranstaltung ergibt. Diesen Entwurf lege ich Ihnen zu Ihrer Orientierung bei. Bitte lassen Sie mich doch bald hören, ob Sie dem zustimmen, oder welche Änderungswünsche Sie haben. Für die Erstattung Ihrer Reise– und Aufenthaltskosten steht der Gastvorlesungsfonds des Mathematischen Instituts zur Verfügung. Wir lassen hier in der Vortragswoche alle Vorlesungen ausfallen, was ja in Hinblick auf das verlängerte Sommersemester ohne grosse Bedenken möglich ist.

Mit freundlichen Grüssen und Heil Hitler,

Ihr

H. Hasse

Anmerkungen zum 17.04.1938

[1]Vgl. die Arbeit Hall [109], welche auf einen seiner Vorträge in Göttingen zurückging.

3.96 23.04.1939, Scholz an Hasse

Arnold Scholz
Kiel Niemannsweg 61.

Wien, 23. April 1939.

Lieber Herr Hasse!

Vielen herzlichen Dank für Ihren Brief vom 17. 4., den ich gerade noch vor der Abreise nach Wien zu Furtwänglers 70. Geburtstag (21. April) erhielt, und die freundliche Einladung zu einem Vortrag Ende Juni in der Stadt der Algebra Göttingen. Es freut mich sehr, auch mal Hall vortragen zu hören; ich werde mich jedenfalls für die ganze Woche freimachen, umso mehr, als das Zustandekommen meiner Zahlentheorie–Vorlesung noch in Frage steht, weswegen ich auch jetzt unbehindert reisen konnte. Es wären wohl dies Semester mehr Studenten nach Kiel gekommen, weil der Juli noch im Semester liegt; doch sind 150 Studenten wieder abgereist, weil sie keine Wohnung fanden, und wir müssen nun sehen, durch eine etwas verspätete Propaganda, Zimmer bei Kollegen aufzutreiben, einige Studenten wieder zu gewinnen. Ein Projekt, Studentenhäuser zu bauen, wurde von oben nicht genehmigt, und das brachte, wie ich hörte, den Plan wieder auf, die Universität nach Lübeck zu verlegen.

Der Titel für meinen Vortrag am Do 29. Juni scheint mir grad' deshalb recht günstig, weil er es offen lässt, „Erweiterung" so wie Magnus als mit „Aufspaltung" identisch aufzufassen, somit eben einfach über Aufspaltung von Gruppen zu sprechen und besonders auf die Dinge meines Fw.–Festartikels einzugehen, oder „Erweiterung" als mit „Einbettung als Untergruppe" zu identifizieren und dann zu vergleichen, wie weit die Aufspaltungsbegriffe sich auf dem Wege der Isomorphie sich durch Erweiterungsoperationen erklären lassen. In dieser Beziehung kann ich Ihnen dann später noch den Inhalt meines Vortrags präzisieren, und so könnte es bei dem Titel bleiben.

Ich bin Ihnen ja auch noch eine Antwort auf Ihren letzten Brief schuldig, wegen der „Ring" benennung. Hier hab' ich mich nun nach reiflicher Überlegung der Krullschen Def. angeschlossen, die er in seiner Elementaren Algebra (Göschen 930) bringt oder bringen wird. Ich fordere also mit Krull für den Ring ein Einselement, hab' das allerdings in meinem Bändchen so nur in der

Fussnote angebracht, weil es einführenderweise und wegen des drauffolgenden Modulbegriffs einfacher war, die reproduktive Multiplikation zu nehmen: nämlich es ist einfacher, aus einem vorhandenen konkreten Bereich eine Eigenschaft abzulesen und diese als Axiom für den allgemeinen Fall zu fordern als eine Existenz zu fordern (die Eins „e“), die im konkreten Fall (als „1“) sowieso vorhanden. An dies letzte Mass von Abstraktionsfähigkeit kann man, scheint mir, einen Hörer nicht so schnell gewöhnen.

Ich glaube überhaupt nicht, dass man einen Begriff ein für alle Mal „bestdefiniert“ festlegen kann, sondern dass er dem Stande der Wissenschaft entsprechend seine Entwicklung haben muss; man kann die „für den Augenblick beste“ Definition geben und wird dies auch für den Anfänger unter Übergehung der historischen Entwicklung meist besser tun, aber nicht immer.

Auch wegen der Abhandlungen, die ich fürs Crelle–Journal angemeldet hatte, bin ich Ihnen noch Antwort schuldig: Die „Gruppengeschlechter“ oder „Abelsche Durchkreuzung“, wie sie jetzt heisst, hab' ich(s. o.) für die Furtwängler–Festschrift eingereicht, da ich keine neuere Sache zur Verfügung hatte – entschuldigen Sie bitte, dass ich Ihnen das nicht mitgeteilt: die Arbeit mit dem Göschen–Bändchen, verbunden mit dem Wiener u. a. Misserfolg hatten mich eine Zeitlang ganz runter gebracht, sodass mir wohl alles durcheinanderging. An der endgültigen Formulierung der „Totalen Normreste II“, sicher schon die $^{8.}/_{9.}$ Formulierung, arbeite ich jetzt nach Fertigstellg. und Korrektur des Göschen–Bändchens, das vielleicht in meiner Abwesenheit erscheint; bin allerdings in punkto Formulierung viel bedächtiger geworden; ausserdem geht die Arbeit seit der Erschöpfung im Winter viel langsamer. Darum wird's mit meinem Enzyklopädie–Artikel auch noch lang dauern.

Meine Fahrt[1] war natürlich auch eine Erkundungsfahrt. Ich möchte Ihnen davon manches vertraulich berichten, damit Sie es gegebenenfalls nützlich für mich verwenden können. Sie werden sicher erfahren haben, dass Herr Hofreiter[2] mit der Wahrnehmung des Extraordinariats Menger beauftragt und seine Ernennung in Aussicht gestellt ist. Das hat mich natürlich sehr geärgert und werden Sie auch Unrecht finden. Es ist hier nicht dem Ministerium der Vorwurf zu machen, da man Hfr. auf der Liste mir vorangestellt hat. Der Einfluss der Assistentenschaft war in der damaligen Lage zu gross und Fw. zu nachgiebig, sodass ich in Mayrhofer sogar den besseren Rückhalt hatte. Ich versteh' mich jedenfalls besser mit Mayrhofer als Hofreiter mit M., und auf meine direkte Frage erklärte mir Hofreiter, dass er absolut keinen Wert auf Wien legte, wenn er anderswo einen guten Ruf erhielte. Könnte man nun nicht Hofreiter auch noch auf die Erlanger Liste bringen oder sonstwo? Von einer Seite erklärte man mir, dass Erlangen (Nachfolge Krull) so gut wie sicher für mich sei, und dann könnte auf die Weise evtl. noch vor der Ernennung Hofreiter–Wien ein Tausch erfolgen, und da es sich in Erlangen um ein Ordinariat handelt, wäre das für Hofreiter ein Anreiz, während ich so in Wien vernarrt bin, dass ich ein Extraordinariat in Wien einem Ordinariat anderswo (ausser etwa Prag) vorzöge. Prag, wo ich auch genannt bin, wäre

als „südostdeutsche Grossstadt in schönster Lage“ für mich der ehste Ersatz für Wien.

Sie müssen das nicht so auffassen, als ob ich es nicht schätzte, nach Erlangen zu kommen; mit Haupt ist es sicher sehr angenehm zusammen. Nur bin ich eben so auf Wien erpicht, weiss auch, dass man mich dort gern hätte. Mayrhofer wäre jedenfalls mit dem Tausch einverstanden, und schliesslich könnte man es vom wissenschaftlichen Standpunkt wohl vertreten, Hofreiter in Erlangen vorzuschlagen, wo er schliesslich, weil da schon ein so tüchtiger Mathematiker wie Haupt ist, eine geringere Belastung für die Mathematik wäre als in Wien.

Ausserdem rechne ich so: In Prag ist, soviel ich weiss, unter den ernsten Vorschlägen nur einer mehr genannt, als Stellen zu besetzen sind, darunter auch Nöbeling[3)], der ebenfalls in Erlangen genannt ist. Wenn also die Erlanger Liste aus mir, Nöbeling und Hofreiter bestehen könnte, so hätten wir drei jeder einen Ruf an einer der drei Universitäten Wien, Prag, Erlangen sicher. Nachdem jetzt nun unser ältester Dozent Robert Schmidt erfreulicherweise nach München (Hartogs–Extraord.) berufen ist, und sogar gleich mit Umzugsauftrag, hab’ ich ja nun mit Petersson auch wirklich die Anciennität.

Wie steht es eigentlich mit Ihrer Zahlentheorie in der Gelben Sammlung? Ich dachte, Sie waren mit dem Manuskript schon eher fertig als ich mit meinem Göschen–Bändchen? Ich hätte Ihre Werke so gern vorn in der Literatur erwähnt, besonders stimmte so wunderbar die didaktische mit der alphabetischen Reihenfolge überein. Ich bat Herrn Grethlein, womöglich das Zitat noch einzusetzen; das konnte er nun aber nicht. – Wegen Furtwänglers Enzyklopädieartikel finde ich, es sollte nun Eichlers Umarbeitung endgültig bleiben entgegen Heckes Bedenken. Fw. selbst arbeitet sicher nicht mehr dran; er ist körperlich viel wohler als 1937, auch vergnügt, aber geistig arbeitet er nun nicht mehr. Ich besuchte ihn zu seinem Geburtstag nachm.; währenddessen kam gerade Olgas Telegramm an. – Von sonstigen math. Nachrichten haben Sie sicher erfahren, dass Tornier endgültig aus der Univ. laufbahn ausgeschieden ist; Grund: er hatte zur Einrichtung einer Wohnung für eine dritte Frau der Möbelfirma Wechsel mit Berufung auf seine Professur ausgestellt, aber verschwiegen, dass der pfändbare Teil seines Gehalts bereits an seine ersten beiden Frauen verpfändet war. Beurlaubt war er bereits im Herbst zur Zeit seiner Vermögensbeschlagnahme. – Morgen (26. 4.) fahr’ ich über Breslau zurück; hatte heut’ noch eine schöne Tour auf den Wechsel[4)] (1738 m) mit herrlicher Sicht.

Vielleicht kann ich in zwei Monaten in Göttingen mehr berichten.

Viele herzliche Grüsse, auch an Siegel

Ihr

Arnold Scholz.

Wenn ich im Juni in Gött. bin, möcht' ich mir doch gern mal das Zahlenmaterial von K. Schaffstein † ansehen; ich hoffe doch manche wertvollen Rechnungen als heuristische Unterlagen für Ergebnisse zu finden. Vielleicht lohnen dort tafelartige Veröffentl.

Anmerkungen zum 23.04.1939

[1]Scholz schreibt aus Wien; dort hatte er einerseits Furtwängler besucht, andererseits die Lage sondiert, da er ja als Nachfolger von Menger im Gespräch war.

Karl Menger wurde am 13.1.1902 in Wien geboren und war seit 1928 Professor für Geometrie in Wien. 1937 nahm er eine Professur an der Notre Dame Universität in den USA an und ließ sich in Wien beurlauben; 1938 gab er seine Professur nach dem Anschluss Österreichs an Deutschland auf. Menger ist am 5.10.1985 in Illinois gestorben.

[2]Nikolaus Hofreiter wurde am 8.5.1904 in Linz geboren. Er studierte in Wien, wo er 1927 bei Furtwängler mit dem Thema „Eine neue Reduktionstheorie für definite quadratische Formen" promovierte, und wo er 1939 Professor wurde. Er starb am 23. 1. 1990 in Wien.

[3]Georg Nöbeling, 1907 in Lüdenscheid geboren, studierte zunächst in Göttingen, später in Wien. 1933 ging er nach Erlangen, wor er zunächst als Assistent, ab 1942 als ordentlicher Professor arbeitete.

[4]Der Wechsel ist ein Mittelgebirge in Niederösterreich, dessen höchster Gipfel der Hochwechsel mit 1743 m ist.

3.97 30.04.1939, Hasse an Scholz

30. 4. 1939

Lieber Herr Scholz,

Ich danke Ihnen herzlich für Ihre Zusage zu unserer gruppentheoretischen Woche. Ich nehme also Ihren Vortrag, so wie er im vorläufigen Programm angegeben ist, in das endgültige Programm auf. Für die Gestaltung haben Sie natürlich völlige Freiheit.

Die sämtlichen Vorträge sollen in einem besonderen Heft von Crelles Journal gedruckt werden, und zwar die mit neuen Ergebnissen in extenso, die mehr berichtenden mehr oder weniger in Form von ausführlichen Berichten. Darf ich Sie bitten, dass auch Sie mir Ihren Vortrag für diesen Zweck zur Verfügung stellen?

Im übrigen sehe ich nunmehr die bereits angekündigte Arbeit 'Totale Normenreste II' für Crelle vor. Ich verstehe durchaus, dass Sie die 'Gruppengeschlechter' für den Furtwängler–Festband zur Verfügung gestellt haben.

Was Ihre Ausführungen über Personalien (Wien–Erlangen–Prag) betrifft, so habe ich ja darauf keinen direkten Einfluss[1)]. Das einzige was ich tun kann, ist, dass ich Ihre Ausführungen an Süss weitergebe, der öfter mit dem Personalreferenten in Berlin über solche Fragen spricht. Ich bitte Sie um eine Nachricht, ob Ihnen das recht ist.

Wegen meines Buches habe ich Schwierigkeiten mit den Herausgebern der Gelben Sammlung bekommen. Ich habe den Umfang um 90 Proz. überschritten. Dies nimmt man zum Anlass, um von mir eine Entfernung gewisser Bestandteile zu fordern, die ich für unentbehrlich halte. In den nächsten Tagen findet eine Besprechung zwischen v. d. Waerden, mir und Siegel (als Schiedsrichter) statt. Jedenfalls ist das im November v. J. eingereichte Ms. aus solchen Gründen bis heute nicht in Druck gegeben worden.

Wegen des Schaffstein–Materials hatten wir in den Osterferien Herrn Bullig[2)] aus Hamburg einige Tage herkommen lassen. Er hat alles durchgesehen. Es war m. A. nach sehr willkommenes Tabellenmaterial darunter. Ich habe schon vorgesehen, dass dieses in Crelle gedruckt wird. Herrn Bullig hatte ich angeregt, sich zwecks Gestaltung eines Druckms. aus diesem Material mit Ihnen in Verbindung zu setzen. Wenn das nicht schon vor Ihrer Reise nach Göttingen möglich ist, so benutzen Sie doch diese Reise bitte dazu, in Hamburg mit Bullig zu sprechen und sich von ihm ev. das in Frage kommende Material geben zu lassen, damit wir hier in Göttingen noch einmal über die Sache sprechen können.

Mit herzlichen Grüssen

Ihr

H. Hasse

Anmerkungen zum 30.04.1939

[1]In seinem Brief an Süss schreibt Hasse am 21.06.1939, dass er ihn (Süss) vorschlage.

[2]Günter Bullig (später Bergmann) wurde am 29.7.1910 in Cottbus geboren. Er promovierte 1936 in Bonn über „Die Berechnung der Grundeinheiten in den kubischen Körpern mit negativer Diskriminante". Er habilitierte sich 1938 in Hamburg und arbeitete dort bis 1947 als Assistent. 1964 erhielt er eine Professur in Münster, danach in Dortmund.

3.98 03.05.1939, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte) Kiel 3. Mai 39.

Lieber Herr Hasse!

Für Ihren Brief vom 30. April vielen Dank! Gern werd' ich die Reise nach Göttingen so einrichten, dass ich zwei Tage vorher in Hamburg zubringe (also etwa Fr. 23. Juni hinfahre), um mit Bullig das Schaffstein–Material durchzusehen. Es freut mich sehr, dass es in geeigneter Weise im Crelle J. Aufnahme finden soll. An Süss, den ich ja gut kenne, will ich selber schreiben. Einmal was ich Ihnen neulich schrieb, und dann einen Vorschlag wegen des Tagungsortes der D. M. V.: Ich hörte in Breslau (wo ich auf der Rückreise von Wien vortrug), man wolle statt in Salzburg in Marienbad tagen, das ja auch recht schön ist, aber bereits wieder sehr teuer sein soll, wie ich hier von sudetendeutscher Seite erfahren; dagegen sei Franzensbad, das nicht weniger schön sei, noch recht notleidend und würde danach den Absichten entsprechen, die man in Salzbrunn (u. a. C. Müller) wieder hervorgehoben hat. Das teure Baden hat voriges Jahr schon manche Mathematiker abgeschreckt, die sonst auch mit Frauen kämen, und die Physiker könnten sich auch mal nach den bescheideneren Verhältnissen der Math. richten und mit Eger–Franzensbad Vorlieb nehmen. Herzliche Grüsse!

Arnold Scholz.

Manuskripte werden von Setzern leicht umfangsüberschätzt.

3.99 16.06.1939, Hasse an Scholz

16. 6. 1939.

Herrn

Doz. Dr. Arnold Scholz

K i e l
Niemannsweg 61

Lieber Herr Scholz!

Haben Sie herzlichen Dank für die Zusendung Ihres Göschen–Buches Zahlentheorie. Ich habe das Buch mit Interesse durchgesehen und finde es recht interessant. Besonders in dem Teil, wo Sie über den normalen Rahmen einer elementaren Zahlentheorie hinausgehen. Amüsiert hat mich die diskrete Weise, mit der Sie mich auf Seite 124 zitieren.[1)] Manches von dem, was Sie bringen, wird sich auch in meinem grossen Lehrbuch wiederfinden, allerdings in völlig anderer Darstellungsform.

Mit freundlichen Grüssen und
Heil Hitler!

Ihr
H. Hasse

Anmerkungen zum 16.06.1939

[1]Im Sach- und Namenverzeichnis der Erstausgabe findet man den Eintrag „Hasse“ mit Verweis auf S. 124; dort sind allerdings nur Rechnungen, die mit Hasse anscheinend nichts zu tun haben. Es geht dort um die Primzahlen 129061 und 153949.

3.100 03.04.1941, Scholz an Hasse, Postkarte

(Postkarte)

L. Math. Marineschule
Flensburg–Mürwik
3. April 41.

Lieber Herr Hasse!

Wann ist mal wieder 'ne Zusammenkunft der Berliner Kriegsmathematiker? Es besteht eine gewisse Aussicht, dass ich mal in der Osterwoche nach Bln. kann, und dann wär ich auch Sonntag 19. April da, oder es wird nach den Abschlussprüfungen, nur dann wär ich Sa. 3. Mai (wahrsch. noch nicht 26. Apr.) noch in Bln. Ich war jetzt öfters in Kiel, zuletzt am 28. Febr. zur Bestattung von Ha$\overline{\text{m}}$erstein, der, wie Sie wohl inzwischen gehört haben, an infolge Unterernährung angegriffener Lunge am 25. Febr. gestorben ist. Jetzt fungiert Lettenmeyer als letzter in Kiel verbliebener Mathematiker. Perron[1)] hat ihm Kontrolle von Kettenbruchberechnungen $\sqrt{D}$ bis $D = 10000$ aufgehalst, wovon ich auch einiges übernommen hab.

Herzliche Grüsse, auch an alle Mathematiker, die Sie inzwischen treffen!

Ihr Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 03.04.1941

[1] Perron schrieb damals an der dritten Auflage seines Klassikers [247] über Kettenbrüche, die allerdings erst 1954 erscheinen konnte.

3.101 04.12.1941, Scholz an Hasse

Doz. Dr. Arnold Scholz
Flensburg–Mürwik
Marineschule Abt. L. Math.

Mürwik, 4. Dez. 1941

Lieber Herr Hasse ! [1]

Letzte1) Woche war ich mal wieder in Kiel. Es stand mir eine Wohnung für später in Aussicht, und da man hörte, daß man bei längerer Kriegsdauer evtl. vorher in den Friedensberuf zurückkäme, ging ich zum Dekan (augenblicklich der Physiker Kopfermann), mich erkundigen. Das Gegenteil hat sich ergeben: daß ich mich besser darauf einrichte, nie nach Kiel zurückzukehren. Kopfermann sagte mir, daß man mich nicht auf die Liste für die Nachfolge Hammerstein gesetzt habe, ebenso nicht Deuring, obwohl wir beide mehrfach und von den ersten Mathematikern genannt seien. Die Naturwissenschaftler wollten keine Algebraiker. Wohlgemerkt: es wurde nicht gesagt, daß sie einen Mathematiker haben wollten, der etwas von Anwendungen und Naturwissenschaften versteht; denn das haben die Algebraiker durch ihren Kriegseinsatz, in dem hauptsächlich sie vertreten sind, bewiesen, daß sie das können; und warum stellt man dann nicht Magnus auf ? – sondern man will (das ist jetzt natürlich meine Deutung der spectablen Worte) keinen Mathematiker, der etwas produziert, was die Physiker und der verbliebene Mathematiker zu dumm sind zu verstehn. Außerdem wurde bei mir der Einwand erhoben, daß ich schon Dozent in Kiel sei, worauf ich entgegnete, daß es an andern Universitäten längst üblich sei, eigene Dozenten vorzuschlagen, daß dabei also eine Benachteiligung der Kieler Dozenten herauskäme. Schließlich meinte Kopfermann mit Recht, daß ich wohl nicht viel an Kiel verloren hätte und mir eine Berufung an eine andre Universität willkommener sein müßte. Wo die Mathematik eine andre Stellung einnähme.

Ließe sich dafür nun gleich Vorsorge treffen ? Für mich wäre eine Universität wie Marburg, wo die Mathematik mehr zur Philosophie tendiert, das richtige. Der Krieg wird ja wohl noch eine Weile dauern, und so hätte es wohl noch Zeit. Aber, wie gesagt, möchte ich in Kiel nicht erst wieder meine Zelte aufschlagen müssen, wo auch nach dem Kriege wohl nur ein kümmerlicher Rest von Mathematikern studieren wird und ich vor dem Kriege schon

[1] Vermerk, augenscheinlich von H. Hasse: „Nicht beantwortet“.

reichlich Geduld damit aufbringen mußte. Aber da hatte ich doch wenigstens noch eine Wohnung zum Arbeiten, es lebte Hammerstein noch, und es waren noch manche schätzenswerte Kollegen da, von denen ein großer Teil heut weg sind. Und ob man seine Diätendozentur an eine andre Uni mitbringen kann, ist die Frage. Ginge das nun nicht, daß Sie es Reidemeister nahelegten, bei der Nachfolge für Neumann, dessen Emeritierung wohl gegen Kriegsende, wenn nicht früher in Aussicht steht, an mich zu denken? So selten ich Reidemeister gesehn, so gut habe ich mich mit ihm verstanden, und in den Grundlagen der Mathematik treffen sich ja unsere Interessen (es wird wohl dahin kommen, daß ich Zermelos Mengenlehre mehr oder weniger selbst schreibe). – Eine andre Möglichkeit wäre auch, daß man Hofreiter ein Ordinariat im neuen Osten verschaffen könnte. Er würde doch mit E. A. Weiß[2)] z. B. ganz gut zusammenpassen und, wie ich ihn kenne, ein Extraordinariat sicher gern mit irgendeinem Ordinariat eintauschen. Er sagte mir mal, daß er garnicht so besonderen Wert drauf lege, immer in Wien zu bleiben, und außerdem steht er mit Mayrhofer nicht sonderlich freundschaftlich. So würde das Wiener Extraordinariat (was es geworden ist) wieder für mich frei. Das könnte ruhig im Kriege schon sein, entweder, daß ich die Stelle dann erst nach dem Kriege antreten kann oder, wenn es zu lange dauert, bereits früher zurückgeholt würde. Vielleicht machen Sie vier passende Stellen ausfindig, wo man Deuring, Magnus, Keller und mich alle mehrfach nennt, daß jeder dann eines Rufes sicher ist? Sie sprechen doch auch sicher mal mit Erhard Schmidt?

Finden Sie aber nicht überhaupt auch, daß endlich mal dem allzu starken Hineinreden der Physiker in mathematische Angelegenheiten Halt geboten werden müsse? Neulich berichtete doch Grunsky, wie mir Keller erzählte, daß ein Physiker fordern wollte, daß man im mathematischen Kolleg Konvergenzbeweise weglassen solle, weil es die Studenten doch nicht verstünden. Dahin käme es vielleicht noch gar, wenn man die Physiker die mathematischen Lehrstühle besetzen ließe.

Was Komisches passierte mir neulich beinah: Ltt. wollte in seiner Pedanterie von mir ein Verzeichnis der von mir aus dem Hammersteinschen Nachlaß entnommenen Bücher. Da ich vor der Abfahrt von Kiel noch Zeit hatte, holte ich einen Zettel aus dem Pult, sah aber vorsichtshalber nach der Vorderseite des Zettels und nahm darauf lieber einen andern. Denn auf dem Zettel stand:

> Der Dekan d. Ph. F. Kiel, 14. 2. 36.
> Sehr geehrter Herr Kollege,
> ich bitte Sie um möglichst umgehende Äusserung, ob Herr Priv. Dozent Dr. Lettenmeyer als Kandidat für mathematische Vorschlagsliste in Frage kommt. M. d. G. u. H. H.
> Ihr sehr erg. Menzel Dekan.

(War an mich adressiert. Ironie des Schicksals!)

Übrigens noch schönen Dank für die geistvollen Verse aus Jena, die Sie mir alle geschickt haben! Es war sehr schade, daß ich an der Tagung nicht teilnehmen konnte. Aber so hab ich wenigstens eine sehr nette Erinnerung daran, und Keller hat mir sonst ausführlich erzählt.

Ich bin jetzt grad mit den unendlichen algebraischen Zahlkörpern[3)] beschäftigt, die ja das letzte Kapitel meines Enzyklopädie–Artikels werden sollen. Da ich fand, dass man die von Krull in seiner Idealth. in u. a. 2. II, MZ 31, entwickelte Topologie konkreter auf die Galoisgruppe beziehen kann, wie in seiner Galoisth. in u. a. 2., M. Ann. 100, wodurch dann in den Sätzen gleich da steht, was man sucht, und die Beweise scheints auch einfacher werden, hab ich eine mit charakteristischen Beispielen versehene Abhandlung darüber aufgesetzt, die ich am liebsten in einem Guss gemacht hätte; aber man wird ja hier immer unterbrochen. So würd' ich jetzt vielleicht wieder einiges umstellen – auf die Arbeiten von Herbrand, die ich erst jetzt bei mir hab, braucht' ich da nicht viel einzugehen – wenn man dann überhaupt nur mal fertig würde. Darf ich Ihnen die Note zu Weihnachten fürs Crelle–J. mitbringen? Oder sind Sie da nicht in Berlin? Ich glaubte bisher nicht, zu Weihnacht von hier wegreisen zu können, aber jetzt haben wir auf einmal doch Ferien, sodass ich wohl 20.(19.)–28. Dez. in Bln. bin. Ich bring' oder schick' Ihnen dann auch mal den Malichatko, dessen Fermat–'Beweis' sich nun wohl durch den russischen Feldzug erledigt hat.

Herzliche Grüsse!

Ihr

Arnold Scholz

Anmerkungen zum 4.12.1941

[1]Dies ist der letzte Brief von Scholz an Hasse; im folgenden Februar ist er dann gestorben.

[2]Weiß ging 1941 an die Uni Posen; er ist allerdings schon am 9.2.1942 gestorben.

[3]Die entsprechende Arbeit [S26] wird erst posthum publiziert. Darin greift Scholz Ideen von Krull [158, 159] und Herbrand [130] auf.

Teil III

Briefwechsel Scholz–Taussky

4. Die Korrespondenz Arnold Scholz – Olga Taussky

4.1 09.11.1929, Scholz an Taussky

Freiburg, 9. Nov. 1929.

Sehr geehrtes Fräulein Taussky!

Für Ihren Brief vielen Dank! Ich bin jetzt gerade dabei zu überlegen, welche metabelschen Gruppen für die Klassenkörper von Kreiskörpern in Frage kommen[1)]. Und zwar interessiere ich mich hier nur für Körper von Primzahlpotenzgrad, wie Sie sicher auch bei Ihrer Hauptidealisierung. Nur ist die Übersicht über die Struktur Ihrer metabelschen Gruppen viel komplizierter, weil für Sie der erste Klassenkörper keine natürliche Gruppenbasis hat[2)]. In meinem Falle werde ich die Trägheitssubstitutionen als erzeugende nehmen. Der Kreiskörper ist dann maximaler Abelscher Unterkörper, wenn er ein Produkt: $K = \prod K_{p_\nu}^\ell$ ist. Dabei bedeute K_p^ℓ ($p \equiv 1\,(\ell)$ Primzahl oder $p = \ell^2$) Unterkörper ℓ^{ten} Grades der p^{ten} Ew. Dann bilden die Trägheitssubst. $\overline{S}_\nu$ eine Basis für die Gruppe von K, und wenn man zum Klassenkörper $\overline{K}$ von K übergeht, so haben in dessen Gruppe Repräsentanten S_ν für die $\overline{S}_\nu$ dieselbe Ordnung wie die $\overline{S}_\nu$ selbst, weil die Primzahl p wegen Unverzweigtheit $\overline{K}/K$ nicht weiter in eine Potenz zerfällt. Für den Kommutator $A_{\mu\nu}$ von S_μ und S_ν gilt dann: $A_{\mu\nu}^{\sum S_\mu^\lambda} = A_{\mu\nu}^{\sum S_\nu^\lambda} = \mathcal{E}$ (Exponent: Summe aller versch. Potenzen). Dies alles gilt bei Ihnen wegen fehlender Trägheitssubst. nicht; sonst wäre der Hauptidealsatz in wenigen Worten bewiesen. Bei meinen Gruppen kann ich bei vorgeschriebenem Kommutatorfaktor eine maximale Ausdehnung der metabelschen Gruppe angeben, wenn die in der Kommutatorgruppe vorkommende Maximalordnung ℓ^k vorgegeben ist. (Dies steht in der Fortsetzung meiner Dissertation, die erst gegen Jahresende in den Heidelberger Akademie-Ber. erscheinen wird[3)], aber schon im Dissertations-Manuskript steht, das Fw. von mir besitzt.) Für Sie gibt es aber keine solchen 'maximalen' Gruppen, was schon die Übersicht der möglichen Gruppen sehr erschwert. Wenn man nun noch untersuchen will, welche Gruppen für zweite Klassenkörper ausscheiden, so dürfte das ganz verzwickt sein. Man wird höchstens einzelne leicht übersehbare Typen streichen können. Schon bei den von mir jetzt untersuchten Kreiskörpern $K = K_p^\ell \cdot K_q^\ell$ (A Kommutator von S_1, S_2) erhalte ich das bizarre Resultat, dass unter andern gerade die Maximaltypen ausscheiden ($\ell > 2$) (wo $A^H = \mathcal{E}$ für $H < \left(\ell^k, \sum S_1^\lambda, \sum S_2^\lambda\right)$). Wenn man also schon einen metab. Körper haben will, der unverzweigt über seinem max. Ab. ist, und für den der Kommutator (oder die symbolisch erzeugd. Idealklasse) A die Ordnung: $\left(\ell^k, \sum S_1^\lambda, \sum S_2^\lambda\right)$ hat, muss man ihn schon als Unterkörper eines solchen nehmen, bei dem die Ordnung etwa: $\left(\ell^{k+1}, \sum S_1^\lambda, \sum S_2^\lambda, \ell(S_1 - 1), \ell(S_2 - 1)\right)$.

Sie haben sich also auch um Furtwängler herum concentriert, und zwar oberhalb, wie ich aus der Nummer 96 entnehme. Ich wohnte ja damals[4)]

in der Messerschmidtgasse selbst. Die Schönheit der Hockegasse nimmt mit ihren Hausnummern monoton zu. Vielleicht wird einmal die ganze Villenkolonie Gersthof von Furtwängler-Doktoranden[5)] wimmeln und in 40 Jahren an jedem Hause ein Schild prangen:

> 'Hier wurde Klassenkörpertheorie getrieben' oder 'Hier lebte ein Schüler von Furtwängler'.

Mit den besten Grüssen.

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 09.11.1929

[1]Taussky arbeitete damals an ihrer Dissertation über eine Verschärfung des Hauptidealsatzes, den Artin auf ein gruppentheoretisches Problem reduziert hatte. Furtwängler besaß eine Kopie der Dissertation von Scholz und wusste, dass dieser über ähnliche Fragen nachgedacht hatte; er schlug Taussky daher vor, Scholz zu fragen, ob dieser zum Problem der Klassifikation von zweistufig metabelschen p-Gruppen, das in Tausskys Arbeit auftauchte, beitragen könne.

[2]Scholz hatte seine Erweiterungen mit gegebener Galoisgruppe schrittweise aus abelschen Erweiterungen aufgebaut, und zwar so, dass in den zyklischen Teilerweiterungen immer jeweils genau ein Primideal voll verzweigt. Nach dem Tschebotarjowschen Monodromiesatz werden die Galoisgruppen von Galoiserweiterungen von den Elementen der Trägheitsgruppe erzeugt, und die vorgeschriebene Verzweigung erlaubte Scholz einen direkten Zugriff auf diese Elemente der Galoisgruppe als „Frobeniussubstitutionen" bekannter Primideale. Derartige Körpererweiterungen wurden später von Scholz in [S5] zur Konstruktion beliebig großer Klassenkörpertürme benutzt, und deren Einheiten- und Idealklassengruppen hat er in [S7] genau untersucht.

Bei Taussky waren die Erweiterungen des Grundkörpers aber unverzweigt: die Galoisgruppe wird hier immer noch von den Elementen der Trägheitsgruppen erzeugt, aber die Relationen zwischen ihnen kommen von Relationen innerhalb der als Galoismodul aufgefassten Idealklassengruppen, und diese sind alles andere als direkt zugänglich.

[3]Hier geht es um den Scholzschen Artikel [S3] über die Konstruktion von Körpern mit zweistufiger (metabelscher) Gruppe.

[4]Scholz hatte das Sommersemester 1927 in Wien bei Furtwängler verbracht. Taussky und Scholz dürften beide an Furtwänglers Seminar in Klassenkörpertheorie teilgenommen haben, allerdings hat Taussky, die damals in der Klassenkörpertheorie ganz neu war, mit Scholz damals keinen Kontakt gesucht.

[5]Zu den von Furtwängler betreuten Doktoranden in Wien gehören Tonio Rella (1913), Anton Huber (1924), Otto Schreier (1926), Nikolaus Hofreiter (1927), Karl Strubecker (1928), Olga Taussky (1930), Wolfgang Gröbner (1932), Fritz Hohenberg (1933), und Henry Mann (1935).

4.2 23.04.1930, Scholz an Taussky, Postkarte

Freiburg i. Br., 23. IV. 30.

Sehr geehrtes Fräulein Taussky!

Vielen Dank für Ihre Karte, die mich daran erinnert, dass ich es ganz verbaselt habe, Ihnen von Paris aus, wo ich es wollte, meinen herzlichen Glückwunsch zu Ihrem Doktor[1)] zu sagen, was ich hiermit jetzt nachholen möchte. In Paris hat es mir sehr gefallen; habe viel gesehen. Über Ostern war ich noch am Genfer See. Am 1. Mai beginnt meine erste Vorlesung, über Determinanten. Nach Königsberg[2)] (ich glaube, 7.–10. IX. ist Kongress) will ich bestimmt und daran eine Reise nach Finnland anschliessen.

Besten Gruss. Arnold Scholz.

Auf der Tolstoi-Bank habe ich öfters bei Sonnenuntergang mit gruppth. Überlegungen gesessen.

Anmerkungen zum 23.04.1930

[1] Taussky wurde 1930 promoviert.

[2] 1930 hat das jährliche Treffen der DMV in Königsberg stattgefunden, und zwar vom 4. bis 7. September. Scholz und Taussky haben sich dort getroffen. Scholz trug allerdings über „Zermelos neue Theorie der Mengenbereiche“ vor; ein Auszug daraus wurde in [S8] veröffentlicht. Taussky hielt zwei Vorträge: Am 4. September trug sie *Über eine Verschärfung des Hauptidealsatzes* vor, also über Resultate ihrer Dissertation, und am 6. September über *Eine metrische Geometrie in Gruppen.*

4.3 04.01.1931, Scholz an Taussky

Charlottenburg, 4. Jan. 1931.

Liebes Fräulein Taussky!

Für Ihren ausführlichen Brief und das wirklich schöne Bild des jungen Beethoven, das mich sehr gefreut hat, herzlichen Dank! Ich erinnere mich noch so dunkel. Dass wir damals abends in der Konditorei in Königsberg von den vielen frisierten Bildern von Beethoven sprachen und Sie erzählten, dass Sie ein schönes kennen; war es wohl dies. – Von Hasse erhielt ich gerade kurz vorher einen Brief[1)]; er erkundigte sich nach unserer gemeins. Abhandg' oder vielmehr: fand schön, dass wir sowas machen wollen. Nun, dachte ich, werde ich auch wohl bald von Ihnen Nachricht erhalten, und hatte recht. Nun scheinen Sie aber, nach Ihrem Brief, zu finden, dass ich das, was ich bisher von den Körpern $\sqrt{-4027}$ und $\sqrt{-3299}$ hab, erst einmal allein veröffentlichen soll. Hab in dem Sinne auch schon an Hasse geschrieben. Sie könnten ja dann an meine Abhandlg. anknüpfen, was Sie dann über die nähere gruppentheoretische Konstitution des zweiten Klassenkörpers noch sagen können. An sich macht sich ja die Sache auch so einfacher, da unsere Resultate nicht ineinanderzugreifen brauchen. Zwar wäre es mir eine grosse Freude gewesen, gerade mit Ihnen zusammen mal eine Arbeit zu veröffentlichen. Aber die Gelegenheit läuft uns ja nicht weg. – Die beiden Abhandlungen schickte ich Ihnen damals zu gleicher Zeit, wie Zermelo seine versandte, und wir verteilten die Arbeiten nach ihren Gewichten ökonomisch. Daher meine Hab. schrift an Sie per Adr. Seminar. Was denken Sie eigentlich über das Konkurrenz–Unternehmen[2)] gegen die F.d.M.?

Sie werden doch da nicht mitmachen? Ich finde auch die Mitarbeitsbedingungen bei den Zentralblättern so rigoros, dass ich schon deswegen nicht mitmachen würde. Bei den F.d.M. bin ich dagegen fleissig beschäftigt. – Von Hopf hab ich zuletzt nichts mehr gehört; er hat sich noch nicht entschieden, ob Zürich oder Freiburg. Für Frbg. bestehen wenig Aussichten[3)].

Nun zu Ihren Ausführungen betreffs mögl. zweistufiger Klassengruppen: Das hatte ja Fw. auch vermutet, dass man für ungerades ℓ die Basis so wählen könne, dass wenigstens die Basiselemente in einem Unterkörper des Klassk. in Hauptideale übergehen. (Für $\ell = 2$ weiss ich nicht mehr, ob bewiesen, dass es stimmt, oder ob Gegenbeispiel gefunden[4)].) Ich vermutete früher noch kühner, dass man in der zweistufigen Gruppe die Erzeugenden $S_1, \ldots, S_n$ sogar so wählen kann, dass $\mathrm{Ord}(S_\nu \mathfrak{A}) = \mathrm{Ord}\, S_\nu$. ($\mathfrak{A}$ Kommutatorgruppe). Ich kenne auch da für ungerades ℓ noch kein Gegenbeispiel[5)]. Doch, natürlich! $D = -4027$ sowie alle imag. quadr. Zahlk. mit Klassentyp $(3, 3)$. Wäre da immer $S_1^3 = S_2^3 = \mathcal{E}$ erreichbar, würden in zwei Untkp. des Klassk. alle

Grundkp-ideale in Hauptideale übergehen[6]. Also diese kühne Vermutung muss aufgegeben werden. Ich sehe aber auch nicht ein, warum Ihr gruppth. Gegenbeispiel[7], das mir damals auch gleich aufgefallen ist, als Fw. mir seine Vermutung schrieb, nicht körpertheoretisch realisierbar sein sollte. Ich will's mal mit $D = -9748$ probieren[8]. Wenn ich's finde, schreib' ich bald; Sie können's ja dann immer noch in der Korrektur als Fussnote anbringen. – Die andere Frage: $\sqrt{-3299}$. Wenn A^3 in $\{C, A^3\}$ in die Hauptklasse übergeht, scheint es mir trotzdem nicht notw., dass A in *irgend* einem der Körper zu $\{C\}$, $\{CA^3\}$, $\{CA^6\}$ oder $\{A^3\}$ Hauptideal wird. Zu beachten ist auch, dass von diesen vier zykl. Gruppen nur $\{A^3\}$ charakteristisch in $\mathfrak{G}$ ist; $\{C\}$ dagegen mit den anderen beiden gleichberechtigt ist. Also kann man fragen, ob A in wenigstens einem der drei zykl. Körper 9ten Grades hauptidealisiert oder ob gar in allen dreien. (Verzeihen Sie, bitte, meinen unordentl. Schrieb!)

Mit den besten Grüssen.

Ihr Arnold Scholz.

Neulich hörte ich von Herbert Cremer[9] seines neuestes Gedicht über die "müden Ideale", die sich als 'Unternehmergruppen' entpuppen. Was wird dazu Vater Philipp sagen? – So hiess es am Schluss.

Anmerkungen zum 04.01.1931

[1]Hasse hatte Scholz um Weihnachten 1930 herum einen Brief geschrieben, auf den Scholz am 1. Januar 1934 antwortete. In dieser Antwort schreibt Scholz, dass er am Tag zuvor einen Brief von Taussky erhalten habe.

[2]Das *Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik*, 1869 gegründet, druckte Besprechungen von Artikeln und Bücher über Mathematik. Da jeder Band die Besprechungen eines ganzen Jahrgangs enthielten, hatte sich bis zum Ende der 1920er eine Verzögerung von einigen Jahren angesammelt. Dies führte Courant und Neugebauer 1931 zur Gründung des Zentralblatts, dessen Ziel es war, Artikel so schnell wie möglich zu bessprechen. Wie es scheint, konnten sich Referenten wie Scholz mit den rigorosen Fristen wenig anfreunden.

Gegen Ende der 30er Jahre wurde bei den in Deutschland verbliebenen Mathematikern erbittert darüber gestritten, ob man Artikel deutscher Autoren auch durch Emigranten besprechen lassen sollte; unter den Ablehnern einer solchen Politik war auch Hasse. Neugebauer schied schließlich aus dem Zentralblatt aus und gründete 1940 die Mathematical Reviews.

[3]In seinem nächsten Brief von 28. Jan. 1931 schreibt Scholz, dass Hopf das Angebot abgelehnt habe, und dass die Stelle an Doetsch gehe. Scholz wurde danach Doetschs Assistent, und nach 1933 wurde die Lage für Scholz unerträglich und zwang ihn zum Weggang aus Freiburg.

[4]Furtwängler hat dieses Ergebnis für $\ell = 2$ in [90] bewiesen.

[5]Für $\ell = 2$ können aus den Furtwänglerschen Ergebnissen in [86] leicht Gegenbeispiele konstruiert werden. In der Tat, sei $K/\mathbb{Q}$ ein quadratischer Zahlkörper

dessen zweiter Hilbert-Klassenkörper die Quaternionengruppe H der Ordnung 8 als Galoisgruppe besitzt. Dann haben S_1H' und S_2H' Ordnung 2, während S_1 und S_2 Ordnung 4 haben.

[6]Sei k ein Zahlkörper mit ℓ-Klassengruppe vom Typ (ℓ, ℓ). Sei weiter $G = \mathrm{Gal}(K^2/k)$ die Galoisgruppe des zweiten Hilbert-Klassenkörpers K^2 von k. Diese Gruppe G wird von zwei Elementen S_1 und S_2 erzeugt, die zu den Idealklassen gehören, welche die Klassengruppe $\mathrm{Cl}(k)$ erzeugen, und wir haben $S_1^\ell, S_2^\ell \in G'$.

Behauptung: Ist $S_1^\ell = S_2^\ell = 1$, dann gibt es $\ell - 1$ zyklische Teilerweiterungen K/k von K^1/K in welchen die gesamte ℓ-Klassengruppe $\mathrm{Cl}_\ell(k)$ kapituliert.

Beweis: Sei $A = [S_1, S_2]$ der Kommutator von S_1 und S_2. Die Gruppe G' wird von A und dessen Konjugierten erzeugt. Es gibt $\ell + 1$ zyklische unverzweigte Erweiterungen von K, deren Galoisgruppen die Form $\langle S_1, G' \rangle$ und $H_j = \langle S_1^j S_2, G' \rangle$ für $j = 0, 1, \ldots, \ell - 1$ besitzen. Für Elemente $x \in G \setminus H$, wo H eine Untergruppe vom Index ℓ in G bezeichnet, ist die Verlagerung $G/G' \longrightarrow H/H'$ gegeben durch $\mathrm{Ver}(xG') = x^\ell H'$. Also $\mathrm{Ver}(S_1G') = S_1^\ell H = H$ und $\mathrm{Ver}(S_2G') = S_2^\ell H = H$ für alle Gruppen H_j $(1 \le j \le \ell - 1)$, folglich kapituliert die gesamte Idealklassengruppe in den dazugehörigen $\ell - 1$ zyklischen Erweiterungen.

[7]Sei G die nichtabelsche Gruppe der Ordnung ℓ^3 mit der Präsentation

$$G = \langle S_1, S_2 : S_2^\ell = 1, S_1^\ell = S_1^{-1} S_2^{-1} S_1 S_2 \rangle.$$

Es ist leicht zu verifizieren, dass $T^\ell = T^{S_1 - 1} = T^{S_2 - 1} = 1$ ist; also hat G die Ordnung ℓ^3 wie behauptet, und jedes Element S der Gruppe hat eine eindeutige Darstellung in der Form $S = S_1^a S_2^b$ mit $0 \le a < 9$ und $0 \le b < 3$. Weiter ist $G/G' \simeq (\ell, \ell)$, und der Kern der Verlagerung von $G/G' \longrightarrow H/H'$ ist für alle $\ell + 1$ Untergruppen vom Index ℓ gleich der Gruppe $\langle S_2 \rangle$. Daher verzweigt in jeder der vier unverzweigten zyklischen Erweiterungen dieselbe nichttriviale Idealklasse nämlich diejenige, die unter Artins Reziprozitätsgesetz der Substitution S_2 entspricht.

[8]Scholz konnte später zeigen, dass der 3-Klassenkörper eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers mit 3-Klassengruppe vom Typ $(3, 3)$ einen Grad von mindestens 3^5 besitzt. Dies bedeutet, dass Tausskys gruppentheoretisches Gegenbeispiel, welches für $\ell = 3$ die Ordnung 3^4 hat, nicht als die Galoisgruppe eines zweiten 3-Klassenkörpers über einem imaginär-quadratischen Zahlkörper realisiert werden kann.

[9]Cremer ist für seine mathematischen Gedichte (Carmina mathematica) bekannt.

4.4 28.01.1931, Scholz an Taussky

Freiburg, 28. I. 31.

Liebes Fräulein Taussky!

Endlich hab ich ein Gegenbeispiel gegen die Furtwänglersche Vermutung[1)] gefunden, und zwar nicht auf imaginär quadratischem Felde, sondern in echt kubischem Gepränge (P.P. Rubens), wie es zum Stil des Problems gehört.[2)]

Auch, dass ich den Körper gerade am 27. fand. Diesmal gleich der erste, der auf meine gruppentheoretische Konstruktion reagiert: Kubischer Unterkörper K^3_{1267} der 1267[ten] Einheitswurzeln ($1267 = 7 \cdot 181$). An sich gibt es deren zwei, die nicht schon mit K^3_7 oder K^3_{181}, zwei solchen einklassigen Körpern identisch sind. Die beiden K^3_{1267} gleichen sich aber wie Castor und Pollux in ihren Idealklassenangelegenheiten. – Ich kann nicht dafür garantieren[1], dass die zweite Klassengruppe von K^3_{1267} genau die Struktur Ihrer Gruppe der Ordg. 27 hat; jedoch kann ich das von einer Faktorgruppe meiner Gruppe behaupten, und das ist ja die Hauptsache: Dass der Kommutatorfaktor (die erste Klassengruppe) eine Gruppe vom Typ $(3,3)$ ist und für eine Basis S_1, S_2, sagen wir, $S_1^3 = T_{12}^{\pm 1 + \mathfrak{C}_1}$ wird, woraus schon folgt, dass ein zweites so gewählt werden kann, dass $S_2^3 = T_{12}^{\mathfrak{C}_2}$ wird ($\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 < \mathfrak{C} = (\ell, S_1 - 1, S_2 - 1)$). – Eben fällt mir aber auf, das nicht bloss $T_{12}^3 = T_{12}^{S_1 - 1} = \mathcal{E}$, sondern auch $T_{12}^{S_2 - 1} = \mathcal{E}$ gelten muss für $S_1^3 = T_{12}$, dass also schon aus gruppth. Gründen *nur* Ihre Gruppe in Betracht kommt. Es folgt ja (vgl. Fw. Hauptidealsatz[3)] oder meine Heidelbg Ak. Abh.[4)], die Sie jetzt referieren) aus $S_2^3 = \mathcal{E}$:

$$T_{12}^{1+S_2+S_2^2} = \mathcal{E} \quad \text{und aus } S_1^3 = T_{12}: \tag{1}$$

$$T_{12}^{1+S_1+S_1^2} T_{12}^{S_2-1} = \mathcal{E} \quad \text{und} \tag{2}$$

$$T_{12}^{S_1-1} = \mathcal{E}. \tag{3}$$

Aus (2) und (3):

$$T_{12}^3 T_{12}^{S_2-1} = \mathcal{E} \quad \text{und aus (1)/(4) dann:} \tag{4}$$

$$T_{12}^{(S_2-1)^2} T_{12}^{1-S_2} = \mathcal{E} \ : \tag{5}$$

$$T_{12}^{S_2-1} = T_{12}^3 = \mathcal{E}. \tag{6}$$

[1] *„doch, s.u.“*

Also ist $\mathfrak{G}$ schon bestimmt durch: $\mathfrak{G} = \{S_1, S_2\}$; $S_1^3 = S_2^{-1} S_2^{S_1} = T_{12}$ (und S_2^3 auch in Kommgr.), wenigstens, wenn man fordert, dass die Ordng von G eine Dreierpotenz ist. (Übrigens würde ich bei zwei Erzeugd. S_1, S_2 empfehlen, statt T_{12} einfach T zu schreiben)

Nun muss ich zeigen, wie ich tatsächlich zu der Gruppe $\mathfrak{G}$ komme: Es genügt, einen Körper K mit absoluter Gruppe $\mathfrak{H} > \mathfrak{G}$ zu bilden, der unverzweigt über dem zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Unterkörper ist. (Wegen der eben gezeigten 'Maximaleigsch.' von $\mathfrak{G}$ folgt dann sogar die Einklassigkeit von K, d.h. dass die Klassenzahl von K nicht durch 3 teilbar ist.) Ich setze an: $\mathfrak{H} = \{R_1, R_2\}$; $R_1^3 = R_2^3 = \mathcal{E}$; $R_2^{-1} R_2^{R_1}$ (Kommutator);[2] Ord $A = (3, X^2, Y)$; wobei $X = R_1 - 1$, $Y = R_2 - 1$. Dann kann man setzen: $\mathfrak{G} = \{R_1, R_2, A, A^X\} = \{S_1, S_2, T_{12}\}$. Denn es ist tatsächlich $(R_1 R_2)^3 = A^X$ und A^X der Komm. von A mit $R_1 R_2$. Die körperth. Realisierung von $\mathfrak{H}$ ist folgende: Zu $\mathfrak{H}/\{A\}_{\mathfrak{P}}$ passt ein Produkt: $K_p^3 \cdot K_q^3$ (kub. Untkp. p^{ter} und q^{ter} Ew.). K_p^3 werde durch R_1 permutiert und bleibe bei R_2 invariant; K_q^3 umgekehrt. K mit $\mathfrak{H}$ als Gruppe soll der Klassenkörper von $K_p^3 K_q^3 = K^9$ sein. Das ergibt schon: $R_1^3 = R_2^3 = \mathcal{E}$ wegen Nichtverlängerung der Trägheitsgruppe von K^9 auf K, wie oben schon angesetzt. Es kommt jetzt also nur noch darauf an, p und q passend zu wählen, dass die Kommgr. von $\mathfrak{H}$ wirklich die obige Gestalt: Ord $A = (3, X^2, Y)$ hat; dann hat K/K_{pq}^3 die verlangte Gr. $\mathfrak{G}$ (K_{pq}^3 einer der beiden Untkp. der pq^{ten} Ew., je nach Wahl von R_1 und R_2). Es braucht also nur erreicht zu werden, dass in K^9 die erzeugd. Idealklasse mit einem Ideal j die Ordg. $(3, X^2, Y)$ hat: Dass j^X kein Hauptideal, wohl aber j^Y und damit auch j^3; wegen $j^Y \sim 1$ kann man dann den Exp. von j mod Y reduzieren, und dann ist X^2 das Polynom niedrigsten Grades in X, das j in ein Hauptideal überführt.

Damit nun die Ordg. $\mathfrak{M} = (3, X^2, Y)$ herauskommt, ist nach meiner Habilitationsschr. S. 43 u.[5)] notw. (Bez. K_p^3 und K_q^3 dort vertauscht), dass die Gr.–Einh. ε_p von K_p^3 kubischer Rest mod q (wegen X^2) und ε_q gerade $Y^{2^{\text{ter}}}$ Potenzrest mod p ist, d.h. also den gleichen nicht-kub. Restchar. für alle 3 Primteiler von p hat. Dies reicht aber auch aus; nach der schandhaft abgefassten Bemerkung auf S. 45 o. kommt dann Y wirklich in $\mathfrak{M}$ vor. Also $\mathfrak{M} = (3, X^2, Y)$.

Ich brauche also bloss zwei Primzahlen $p \neq q$; $p \equiv q \equiv 1\,(3)$ zu finden, die diese Bedingung erfüllen. Ich hab mir früher schon mal eine Tabelle solcher ($\leftarrow$) p, q, geordnet nach ihrem Produkt gebildet, fängt also an mit $pq = 91$. Hier muss man sich erst einmal die Paare aussondern, die gegenseitig kubische Reste sind. Das sind unter 3000 die Paare:[3]

(32)	1267	=	$7 \cdot 181$	(35)	1339	=	$13 \cdot 103$	(42)	$7 \cdot 223$	=	1561
(81)	2869	=	$19 \cdot 151$	(85)	2947	=	$7 \cdot 421$				
(86)	2977	=	$13 \cdot 229$								

Das erste Paar mit der Nummer 32 passte gleich:

[2] Randnotiz: „Ord $\mathfrak{H} = 81$.“

[3] durchgestrichen: (54) $1981 = 7 \cdot 283$

$K_7^3: \quad x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$	$\varepsilon_7 = \vartheta$
$K_{181}^3: \quad x^3 + x^2 - 60x - 67 = 0$	$\varepsilon_{181} = \frac{(1-\vartheta)(4+\vartheta)(1+\vartheta)^3}{(6-\vartheta)^3} \sim$
	$\sim (1-\vartheta)(4+\vartheta) = \widetilde{\varepsilon}$
$K_7^3 : \varepsilon \equiv \frac{43,\ -81,\ 37}{\zeta^2,\zeta^2,\zeta^2} \pmod{181}$	$K_{181}^3 \quad \begin{array}{lcll} \vartheta & \equiv & -1,2,-2 & \pmod 7 \\ \widetilde{\varepsilon} & \equiv & -1,1,-1 & \pmod 7 \\ \chi(\varepsilon) & = & 1,1,1 & \end{array}$

Also müsste man nach meiner hiesigen Bezeichnung: $p = 181$, $q = 7$ setzen. Schöner ist, man vertauscht p, q; X, Y.

Hoffentlich sind meine Ausführungen verständlich genug, dass Sie sie so, wie Sie sie brauchen zur Anführung des Gegenbeispiels, verwenden können.

Wenn Sie die Arbeit schon eingesandt haben, können Sie ja immer noch einen "Zusatz bei der Korrektur" machen.

Es reizt mich, auch für die andern fünf pq den Gruppentyp-Modul $\mathfrak{M}$ zu bestimmen. Wahrsch. a priori: 4/9 für $\mathfrak{C} = (\ell, X, Y)$; 4/9 für $\mathfrak{X} = (\ell, X, Y^2)$ oder $\mathfrak{Y} = (\ell, X^2, Y)$; 1/9 für $\mathfrak{C}^2 = (\ell, X^2, XY, Y^2)|\mathfrak{M}$.

Fällt mir noch ein: Dass der Klassenkörper von $K_7^3 \cdot K_{181}^3$ selbst einklassig ist, geht auch schon daraus hervor, dass jede Gruppe einer Ordg. ℓ^5 noch höchstens zweistufig ist. Die Klassenzahl von $K_p^3 K_q^3$ muss also mindestens schon 27 sein, (also $\mathfrak{C}^2|\mathfrak{M}$), damit der Turm nicht nur ein Stockwerk besitzt.

Ich habe neben andern Versuchen erst probiert, in Ihrer Gruppe $\{S_1, S_2; T_{12}\}$ statt S_2 gerade S_1 ins absolute zweite Stockwerk zu ziehen, indem ich also die Klassengruppe des Kreiskörpers (der dann schon $K_p^3 K_q^9$ aussehen muss) als zyklisch vom Grad 9 ansetzte. Das klappt nicht: Die Einheiten-Potenzrest-Geschichte liegt nämlich so, dass die Basis der Klassengruppe von $K_p^3 K_p^9$ aus zwei El. bestehen muss, wenn eins der Ordg. 9 vorkommt[6)]. Beinah wollte ich schon den Versuch aufgeben, da die absoluten Trägheitsbedingungen: $R_1^{3^{h_1}} = R_2^{3^{h_2}} = \mathcal{E}$ für $K_p^{3^{h_1}} K_q^{3^{h_2}}$ der Bedingung $S_1^3 = T_{12}$ in den meisten Fällen Schwierigkeiten machen.

Ich will aber auch noch versuchen, ob ich nicht auch noch einen imaginär quadr. Körper finde, der Ihre Gruppe hat, gerade weil dann so eine schöne Einheitengruppe herauskommt, wie ich Ihnen neulich mitteilte.

Ich habe jetzt eine Arbeit von Skolem über "Geschlechter der Reziprozitätsgesetze" zu referieren bekommen; ich glaube es ist die, wo er bekannte Sätze einfacher ableiten will, wie es aber auch schon bekannt, z.B., dass für $N_k(A) = 1$ bei rel. zykl. Körper $A = B^{1-S}$ darstellbar, einfacher als Hilbert, aber genauso wie Furtwängler in seiner Vorlesung, gewinnt:

$$A \cdot B = 1 + A + A^{1+S} + A^{1+S+S^2} + \cdots + A^{1+S+\cdots+S^{\ell-2}}$$

Hat Fw. das zum ersten Mal so gemacht? Vielleicht können Sie das von ihm erfahren; dann könnte ich ihn bzw. den 'Urheber' im Skolem-Referat zitieren. Am liebsten würde ich Skolem so referieren[7)]:

Verf. beweist, wie ihm bekannt, bekannte Sätze, ihm aber unbekannt, auch auf bekanntem Wege.

Morgen besucht uns Doetsch aus Stuttgart, der als Nachfolger von Heffter berufen, nachdem Hopf leider abgelehnt.

Mit vielen herzlichen Grüssen.

Grüssen Sie auch, bitte, Furtwängler vielmals von mir

Ihr Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 28.01.1931

[1]Furtwängler hatte ursprünglich vermutet, dass man die Basis einer elementar-abelschen ℓ-Idealklassengruppe so wählen kann, dass jede dieser Basisklassen in einer geeigneten unverzweigten zyklischen Erweiterung vom Grad ℓ kapituliert. Für $\ell = 2$ hatte dies Furtwängler in [90] beweisen können, und Taussky [Ta32a] konnte zeigen, dass dies für alle $\ell \geq 3$ falsch ist, wenn es Zahlkörper gibt, deren zweite Hilbert-ℓ-Klassenkörper eine Galoisgruppe von einem ganz bestimmten Typ haben. Taussky hatte Scholz nach einem dazugehörigen Körper gefragt, und jetzt hat Scholz ein solches Beispiel gefunden. Taussky nahm das Scholzsche Beispiel in [Ta32a] auf.

[2]Scholz untersucht hier den Klassenkörper von K^3_{1267}. Allgemeiner seien ℓ und $p \equiv q \equiv 1 \bmod \ell$ ungerade Primzahlen, und K^ℓ_p der Teilkörper ℓ-ten Grades von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$. Das Kompositum $K = K^\ell_p K^\ell_q$ ist uverzweigt und abelsch über den $\ell - 1$ Teilkörpern vom Führer pq. Sei $K = K^\ell_p K^\ell_q$ ein Körper mit ℓ-Klassengruppe vom Typ (ℓ, ℓ). Dann hat die Galoisgruppe $H = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ von $L = K^1$ folgende Eigenschaften:

1. H wird von zwei Elementen R_1 und R_2 der Ordnung ℓ in H erzeugt. In der Tat: die Frobeniusautomorphismen der Primideale über p und q erzeugen die Galoisgruppe nach Tschebotarjows Monodromiesatz.
2. Die Kommutatorgruppe H' wird symbolisch erzeugt von
$$A = [R_2, R_1] = R_2^{-1} R_1^{-1} R_2 R_1$$
(dies hat Furtwängler in [90] bewiesen).

Wir setzen nun $\ell = 3$, $X = R_1 - 1$, $Y = R_2 - 1$, und nehmen an, dass die symbolische Ordnungen $\mathfrak{M}$ von A durch $\mathfrak{M} = (3, X^2, Y)$ gegeben ist. Dann ist $A^3 = A^Y = 1$, und H' wird als Gruppe von den beiden Elementen A und A^X der Ordnung 3 erzeugt. Wir behaupten

1. $[A, R_1 R_2] = A^X$: da nämlich A und A^X mit R_2 kommutieren, gilt
$$[A, R_1 R_2] = A^{-1} R_2^{-1} R_1^{-1} A R_1 R_2 = R_2^{-1} A^{-1} R_1^{-1} A R_1 R_2 = R_2^{-1} A^X R_2 = A^X.$$

2. $(R_1R_2)^3 = A^X$: Dies folgt aus

$$\begin{aligned}(R_1R_2)^2 &= R_1R_2R_1R_2 = R_1^2R_1^{-1}R_2R_1R_2 = R_1^2R_2R_2^{-1}R_1^{-1}R_2R_1R_2\\ &= R_1^2R_2AR_2 = R_1^2R_2^2A, \qquad \text{also}\\ (R_1R_2)^3 &= R_1^2R_2^2AR_1R_2 = R_1^2R_2^2R_1R_1^{-1}AR_1R_2\\ &= R_1^{-1}R_2^{-1}R_1A^{R_1}R_2 = R_1^{-1}R_2^{-1}R_1R_2A^{R_1}\\ &= A^{-1}A^{R_1} = A^X.\end{aligned}$$

Hier haben wir $R_1^3 = R_2^3 = 1$ benutzt, sowie die Tatsache, dass A mit R_2 kommutiert.

Ist H die Galoisgruppe des Hilbertklassenkörpers $K = K_p^3K_q^3$ über $\mathbb{Q}$, dann muss es vier Untergruppen vom Index 3 geben. Da alle kubischen Teilkörper zyklische Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ sind, müssen diese vier Untergruppen vom Index 3 normal sein. Diese Untergruppen sind

1. $G_0 = \langle R_1, A, A^X\rangle \simeq \Gamma$,
2. $G_1 = \langle R_1R_2, A, A^X\rangle \simeq \Delta$; dies ist die Scholzsche Gruppe $\mathfrak{G}$; in der Tat, setzt man $S_1 = R_1R_2$, $S_2 = A$ und $T = A^X$, so folgt $S_1^3 = A^X = T$, $S_2^3 = 1$, $T^3 = 1$ und $[S_2, S_1] = [A, R_1R_2] = T$.
3. $G_2 = \langle R_1R_2^2, A, A^X\rangle \simeq \Delta$,
4. $G_3 = \langle R_2, A, A^X\rangle \simeq \Gamma$,

Hier ist Γ die nichtabelsche Gruppe der Ordnung 27 in welcher jedes Element die Ordnung 3 hat (die Heisenberg-Gruppe), und Δ ist Tausskys Gruppe, die nichtabelsche Gruppe der Ordnung 27, in welcher es Elemente der Ordnung 9 gibt.

Ist Γ die Galoisgruppe von $L/\mathbb{Q}$, dann lassen $\mathfrak{G} = G_1$ und G_2 zyklische kubischen Teilkörper fest, deren maximale abelsche Erweiterungen innerhalb von L Galoisgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}' \simeq (3,3)$ besitzen. Um also ein Gegenbeispiel zu Furtwänglers Vermutung zu konstruieren, wählt Scholz Primzahlen $p \equiv q \equiv 1 \bmod 3$ so, dass $k = K_{pq}^3$ und $K = K_p^3K_q^3$ eine 3-Klassengruppe $\simeq (3,3)$ besitzen.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\mathrm{Cl}_3(k) \supseteq (3,3)$ ist $(p/q)_3 = (q/p)_3 = 1$. Nach [S7] ist $\mathfrak{M} = (3, X^2, Y)$ genau dann, wenn die Fundamentaleinheit ε_p von K_p^3 (dieser Körper enthält eine Einheit, deren Konjugierte die volle Einheitengruppe – bis auf Einheitswurzeln – erzeugen; jede solche Einheit nennt Scholz eine Fundamentaleinheit) kubischer Rest modulo den Primidealen über q ist, und wenn die Fundamentaleinheit ε_q von K_q^ℓ ein Y^2-ter Potenzrest (aber kein kubischer) modulo den Primidealen über p ist.

Sei S eine Erzeugende der Galoisgruppe einer zyklischen Erweiterung k von Primzahlgrad ℓ über $\mathbb{Q}$, und setze $X = S - 1$. Ein zu ℓ teilerfremdes Element α heißt X^λ-ter Potenzrest modulo einer Primzahl $p \neq \ell$ für $1 \le \lambda \le \ell$, wenn $\alpha \equiv \xi^{X^\lambda}\eta^\ell \bmod p$ für geeignete $\xi, \eta \in K$ gilt; in diesem Fall schreiben wir $[\alpha, p]_\lambda = 1$, andernfalls $[\alpha, p]_\lambda \neq 1$.

Für $\lambda = \ell$ ist $X^\lambda = (S_1 - 1)^\ell = \ell F_1(S_1)$ ein Vielfaches von ℓ, folglich sind X^ℓ-te Potenzreste immer ℓ-te Potenzreste und umgekehrt: $[\alpha, p]_\lambda = (\alpha/p)_\ell$.

Für $\ell = 3$ gibt es drei Möglichkeiten:

1. $[\alpha, p]_1 \neq 1$;
2. $[\alpha, p]_1 = 1$, $[\alpha, p]_2 \neq 1$;
3. $[\alpha, p]_2 = 1$, $(\alpha/\mathfrak{p})_3 \neq 1$;
4. $[\alpha/p]_3 = 1$.

Einheiten mit Norm +1 sind X-te Potenzen nach Hilberts Satz 90, also ist $[\varepsilon, \mathfrak{p}]_1 = 1$ für alle Einheiten mit Norm +1. Weiter gilt das Scholzsche Lokal-Global-Prinzip

> *Ist* $[\varepsilon, \mathfrak{p}]_2 = 1$ *für eine Einheit* ε *und alle Primideale* $\mathfrak{p}$, *dann ist* $\pm\varepsilon = \eta^{X-1}$ *für eine Einheit* η.

Beweis: Aus $[\varepsilon, \mathfrak{p}]_2 = 1$ folgt, dass ε^{S-1} eine dritte Potenz modulo jedem Primideal ist, folglich dritte Potenz einer Einheit, z.B. $\varepsilon^{S-1} = \eta_1^3$. Wegen $3 \sim (S-1)^2$ ist $\varepsilon^{S-1} = \eta_1^{(S-1)^2}$, also $\varepsilon = \eta^{S-1}\beta$ für ein β mit $\beta^{S-1} = 1$. Dies liefert $\beta \in \mathbb{Q}$, und da ε und η Einheiten sind, muss $\beta = \pm 1$ sein.

Ist also ε Fundamentaleinheit, dann gibt es Primideale $\mathfrak{p}$ vom Grad 1 mit $[\varepsilon, \mathfrak{p}]_2 \neq 1$.

Ob $[\varepsilon, p]_2 = 1$ oder $\neq 1$ ist, kann durch die Berechnung des kubischen Restcharakters modulo den drei Primidealen $\mathfrak{p}$ über p entschieden werden: ist $[\varepsilon, p]_3 = 1$, dann gilt $(\varepsilon, \mathfrak{p})_3 = 1$; ist $[\varepsilon, p]_3 \neq 1$, aber $[\varepsilon, p]_2 = 1$, dann gilt $(\varepsilon/\mathfrak{p})_3 = (\varepsilon/\mathfrak{p}')_3 = (\varepsilon/\mathfrak{p}'')_3$, und ist $[\varepsilon, p]_2 \neq 1$, dann sind diese drei Charaktere paarweise verschieden.

[3] Furtwänglers Beweis des Hauptidealsatzes in [90].

[4] Sh. [S3].

[5] Dies ist [S7] über die Struktur der Idealklassengruppe zyklischer Erweiterungen von $\mathbb{Q}$.

[6] Allgemeiner: besitzt die Idealklassengruppe einer zyklischen Erweiterung von Primzahlgrad ℓ ein Element der Ordnung ℓ^2, dann ist deren ℓ-Rang $\geq \ell - 1$.

[7] Scholz hat Skolems Artikel [300] wie folgt besprochen:

> *Verf. will durch eine etwas andere Einführung des Geschlechterbegriffs in der Idealtheorie den Beweis einiger bekannter diesbezüglicher Sätze vereinfachen. Wie weit allerdings diese Beweise von den bisher bekannten abweichen, ist in der Abhandlung im allgemeinen nicht angemerkt. Z. B. ist der Beweis des Satzes 9 bekannt. Es folgt der Beweis einiger Sätze über die Zahl unabhängiger Idealklassen und Einheiten im Falle eines relativquadratischen und relativkubischen Zahlkörpers, wo der Grundkörper ungerade bzw. nicht durch 3 teilbare Klassenzahl hat (in welchem Falle der Satz (18) auch nur gilt), aus denen dann, zusammen mit einigen Hilfssätzen, quadratische und kubische Reziprozitätsgesetze für die betreffenden Grundkörper abgeleitet werden.*

4.5 22.06.1931, Scholz an Taussky, Postkarte

22. 6. 31.

Liebes Fräulein Taussky!

Es scheint, als ob wir vor einander Angst haben, uns mitzuteilen, wie weit wir auf unsern $\sqrt{-3299}$ u.s.w. gekommen sind. Ich muss wenigstens gestehen, dass ich zuletzt garnicht daran gearbeitet hab. Ich habe endlich Schur die lang versprochene Arbeit über 'Abgrenzungssätze' geschickt. Das hat mir viel Zeit gekostet. In den Pfingstferien hab' ich dann auch wieder die fast unangreifbare Frage der Konstr. von Zweigkörpern angeschnitten und wenigstens einen vom bescheidensten Typ: $(3, 3; 3)$ gefunden als Klassenkörper über $K_{19}^3.K_{1129}^3$ zu einem passenden Führer. Für das Primzahlpaar $19, 1129$, das ich damals verwandte, um die eine Fw.-Vermutung zu entkräften, gilt nämlich noch mehr, dass nämlich in K_{19}^3 $19^{[\cdots]_3}$ kub. Rest mod 1129, und das genügt mir. – Sie kommen doch sicher auch nach Bad Elster[1)]. Was machen Sie vorher? Kennen Sie ausser Marienbad einen vielleicht unbekannteren, aber noch schöneren Ort dort im Gebirge zum Aufenthalt? Ich wollte mich vorher mit meiner Schwester dort treffen, die dann auch nach Bad Elster kommt. Vielleicht passt es auch in Ihre Pläne, sodass wir dann eine geeignete Gelegenheit fänden, unsere gemeinsame Note für Hasse vor der Tagung fertigzustellen. Sie kommen doch sicher von Prag angereist?

Herzl. Gruss.

Ihr Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 22.06.1931

[1]In 1931 fand das Jahrestreffen der DMV in Bad Elster statt.

4.6 04.07.1931, Scholz an Taussky

Freiburg, 4. Juli 1931

Liebes Fräulein Taussky!

Ihr Vorschlag, mal wieder nach Wien zu kommen, hat für mich viel Verlockendes. Ich könnte dann 17./20. August hier losfahren, etwas in die Alpen gehn (vielleicht wieder Neustift im Stubaital, wo ich vor 5 Jahren war), dann ca. 31. Aug. an Wien bis 8./9. IX. Wir könnten dann öfters Fw. zusammen besuchen – würde natürlich auch wieder im Gersthof wohnen – und abends in Oper oder Theater gehn. Die Saison beginnt ja dann gerade wieder. – Dann vielleicht noch ein paar Tage Prag, was meine Schwester auch gern wiedersähe – wo wir uns also treffen könnten. Sie werden uns ja raten können, wo man in Prag gut unterkommt. In Prag (das Sie sicher doch auch in den Ferien irgendwann besuchen) werden wir allerdings weniger zum ruhigen Arbeiten kommen, aber das könnten wir ja schon in Wien besorgen. Von Wien aus nach dem Böhmer Wald und von da aus nach Elster ginge ja auch noch; für uns würden aber die Umwege dann allzu gross werden, und ich möchte dann den Aufenthalt 'in der Natur' lieber vor Wien haben. Nachher lohnt sich für einen *kurzen* Aufenthalt besser Prag.

Ich weiss aber wirklich noch nicht, ob mir nicht diese Reiserei etwas viel wird, und wie ich höre, sind die österreichischischen Fahrpreise voriges Jahr auch um 6-10% erhöht worden (weite Strecken stärker oder kurze?), sodass für mich die Fahrt über Wien-Prag nach Eger mehr als doppelt so viel kosten würde als direkt. So komme ich vielleicht doch aufs ursprüngliche zurück: Treffen im Böhmer Wald, an den ich übrigens mit 'Nähe Marienbad' dachte (oder 'Nähe Bad Elster', Nähe Eger). Der Böhmer Wald geht doch bis ziemlich ans Fichtel-Geb. rauf, und ich würde vorschlagen: möglichst nördlich. Eigentlich müssten wir uns ja in Eisenstein[1)] treffen, besonders weil wir auch mit kubischen Restcharakteren arbeiten. Da muss das Arbeiten besonders gut gehen. Ich muss aber mal näher die Karte studieren.

Den Hauptidealsatz hab ich noch nicht referiert[2)]. Werde mal Feigl fragen, wie lange es noch mit 1929 Zeit hat. Ich fände es auch nett, wenn wir das Referat zusammen machten und beide unterzeichneten. – Da Sie den Iyanaga referiert[3)] haben: Hat er nun alles bewiesen, was er behauptet? Er macht da so eine undeutliche Anmerkung, dass er *nur* ... (einen ziemlich trivialen Satz) zu beweisen braucht; dann ist er auf den Hauptidealsatz von Fw zurückgeführt; schreibt aber in der Anmerkg., dass noch was zu bew. bleibt. – Meine Abgrenzungs-Sätze kommen darauf hinaus: Bildet man bei belieb. Relativkörper die zugehörige Idealgruppe, so ist dies die Idealgruppe eines in diesem Körper enthaltenen Klassenkörpers; es kommt also bei der

Restkl. einteilung höchstens der Klk. bestandteil zur Geltung. Das Resultat ist natürlich nichts Erschütterndes, eigentl. bekannt, aber bisher merkwürdig umständlich dargestellt. Kürzlich bekam ich wieder einen Brief von Tschebotarów, sehr niedlich. Werde ihn (den Brief) im Aug./Sept. mitbringen. Auch Abhandlungen aus den verschiedensten Gebieten. Eine: Schranke, unter der eine vorgegeb. Anzahl von Primzahlen zu einer bestimmten Substitution liegen. – Mit Doetsch komme ich sehr gut aus; beinah freundschaftlich[4)].

Viele herzliche Grüsse, auch an Furtwängler

Ihr

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 04.07.1931

[1]Gotthold Eisenstein ist vor allem für seine Beweise des kubischen und biquadratischen Reziprozitätsgesetzes bekannt.

[2]Offenbar sollte Scholz Furtwänglers Artikel [90] über den Hauptidealsatz besprechen. Scholz hat die Besprechung von Artins Reduktion dieses Satzes auf ein gruppentheoretisches Problem übernommen, und Furtwänglers Artikel wurde tatsächlich von Scholz und Taussky gemeinsam besprochen.

[3]Iyanagas Artikel [144] wurde von Neiß besprochen, nicht von Taussky. Iyanaga verallgemeinerte den Hauptidealsatz auf verzweigte abelsche Erweiterungen. Die Besprechung von Iyanagas Vereinfachung des Furtwänglerschen Beweises des Hauptidealsatzes [145], drei Jahre nach diesem Brief veröffentlicht, wurde von Scholz selbst übernommen.

[4]Das sollte sich nach der Machtübernahme der Nationalsozialisten ebenso schnell ändern wie Doetsch sich in einen Anhänger der Bewegung verwandelte: Zermelo ging in den Ruhestand, Scholz verließ Freiburg, und Kapferer wurde entlassen.

4.7 13.07.1931, Scholz an Taussky, Postkarte

13. 7. 31.

Liebes Fräulein Taussky!

1) Den Wiener Plan hab' ich fallen gelassen.

2) Meine Schwester will in den zwanziger Tagen des August → Regensburg–Böhmer Wald fahren.

3) Unsere Wünsche haben sich auf Eisenstein konzentriert, das nicht nur so'n schönen Namen hat, sondern auch die günstigste Lage a) für die Bergtouren b) für die Weiterfahrt über Pilsen-Eger nach Bad Elster. Ihnen wird doch Eisenstein auch sehr recht sein? Fragt sich noch, ob Bayr. oder Böhmisch-Eisenstein! Ich wäre mehr für Bayr. Die Pensionspreise sind dort 1928 mit 4-6 M angegeben, heute also noch billiger. Dann gibt es auch eine Fremden-Villa in Bayrischhäusl, 1 km. oberhalb B. Eisenstein, die nach Prospekten schön gelegen sein soll. Werde dort jetzt erst mal unverbindlich anfragen. – Dann können wir unter unsere Note schreiben: Eisenstein, den $3^{5^{\text{ten}}}$ Tag des Jahres 1931. – Ist Pilsen eine schöne Stadt? Für Aufenthalt 12. IX ? Von Elster will ich 19./21. IX. über Eger, Prag → Breslau. – Wann gedenken Sie etwa nach dem Böhmer Wald zu fahren? – Wurde nicht davon gesprochen, dass der Congress 1932 in Wien sein soll? Dann komme ich ja da sicher nach Wien. Wie geht es Furtwängler? Macht er mal wieder eine Autotour ins Höllental? Ist er sonst munter? Grüssen Sie ihn, bitte, vielmals von mir! Kennen Sie eigentl. den Böhmer Wald? Neulich war hier Riele-Queling-Quartett: grossartig: Moz. D^{575} Schub. d^{29} Beeth. F^{59}[1]. Samstag: Der Jasager, Schuloper von Weill u. Brecht[1)].

Herzl. Gruss.

Ihr Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 13.07.1931

[1]Brecht musste schon im Februar 1933 fliehen: nach Stationen in Prag, Wien und Zürich ließ er sich endlich in Dänemark nieder. Im Mai 1933 wurden seine Bücher verbrannt.

4.8 01.08.1931, Scholz an Taussky, Postkarte

1. 8. 31.

Liebes Fräulein Taussky!

Für Ihren letzten Brief vielen Dank! Bei Eisenstein wollen wir bleiben. Wenn die deutsche Mark bis dahin wieder vollwertig angenommen wird und die Grenzsperre indessen aufgehoben ist, käme auch *Böhm.* Eisenstein in Frage, das vielleicht mehr Komfort hat. Allerdings: mehr als 40 Kč. möchte ich nicht für Tagespension ausgeben. In Bayern zahlt man 4-4.50 M. (32-36 Kč) Aber meine Schwester und ich kommen wahrsch. schon 21. August, also wohl etwas eher als Sie hin (nach Ihrem Schreiben nehme ich an, Sie kommen etwa 26./27.); da könnten wir dann für Sie etwas mitaussuchen und Ihnen noch rechtzeitig schreiben, ob wir Sie am Bahnhof Bayr. oder Böhm Eisenstein abholen. Wir möchten uns vorher nicht gern auf ein Hotel festlegen. Habe bisher einen Prospekt vom Lärchenhof oberhalb Bayr. Eisenstein.

Wie ich sehe, trägt Herr Hofreiter in Bad Elster vor[1)]. Werde ihm nächstens auch Separata mitschicken, wenn meine Akad.-Arbeit herauskommt. (Abgrenzungssätze.) Nach Eisenstein nehme ich sämtliche kubische[2)] Notizen mit, die ich habe.

Herzlichen Gruss.

Ihr Arnold Scholz.

Dickson-Bodewig hab' ich gratis von Teubner.

Anmerkungen zum 01.08.1931

[1]Hofreiter befasste sich anfangs vor allem mit der Reduktion quadratischer Formen. Später arbeitete er über diophantische Approximation und den Euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern. In Bad Elster hat er am 14. September über die „Verallgemeinerung der Sellingschen Reduktionstheorie auf Formen mit n Variablen“ vorgetragen. Olga Taussky hielt einen Vortrag „Zur Theorie des Klassenkörpers“. Ihr Hauptergebnis war folgendes: Sei K ein Zahlkörper mit 2-Klassengruppe vom Typ $(2,2)$. Dann ist die Anzahl der quadratischen unverzweigten Erweiterungen von K, in denen eine gegebene Idealklasse der Ordnung 2 kapituliert, gerade. Scholz schreibt in seinem Brief vom 21.04.1932, dass dieses Ergebnis falsch sein muss.

[2]Gotthold Eisenstein veröffentlichte die ersten Beweise des kubischen Reziprozitätsgesetzes und untersuchte die Arithmetik kubischer Formen. Dabei benutzte er insbesondere die Arithmetik im Körper der dritten Einheitswurzeln, dessen Ganzheitsring heute auch der Ring der Eisensteinschen Zahlen genannt wird.

4.9 21.08.1931, Scholz an Taussky, Postkarte

E. 21. 8. 31.

Liebes Fräulein Taussky!

Wir sind also hier in Bayr.-Eisenstein im Lärchenhof[1)] gelandet. Hoffen Sie auch bald zu sehen. Wenn Sie uns schreiben, mit welchem Zug Sie in Bayr.-Eis. ankommen, holen wir Sie am Bahnhof ab. Werde indessen schon mal in meinen Diskriminanten-Papieren kramen, da augenblicklich noch schlecht Wetter.

Also auf Wiedersehen! Besten Gruss.

Ihr Arnold Scholz.

Frdl. Gruss Eli Scholz

Anmerkungen zum 21.08.1931

[1]Das Hotel Lärchenhof im bayrischen Städtchen Eisenstein gibt es noch immer. Der böhmische Teil Markt Eisenstein heißt heute Zelezna Ruda.

4.10 23.02.1932, Scholz an Taussky, Postkarte

23. II. 32.

Liebes Fräulein Taussky!

Vielen Dank für Ihren freundlichen Brief, den ich gestern in Empfang nahm. Dachte schon, dass die Tagung[1)] ausfällt, weil ich garnichts mehr hörte. Jetzt werde ich doch kommen, besonders weil Sie mir so nett zugeredet haben. Wusste erst nicht recht, ob ich erst Sonntag oder schon Freitag fahren soll, hab' mich doch zu Freitag entschlossen, namentlich weil die Studenten ab Samstag in die Ferien fahren und dann die Züge voll sind. Ich komme also Fr. 26. II. 18^{23} in Göttingen an. Wenn Sie Zeit haben, wäre es sehr nett von Ihnen, wenn Sie mich abholten (Sperre). Sonst pilgere ich erst zum Institut. Haben Sie den Samstag auch frei, dass wir dann unsere gemeinsame Arbeit mal durchgehen können? Ich bin gestern mit dem §2: Die Gruppen der 19 Typen[2)] fertig geworden; es sind 17 Blätter der 'Münchener Kunstausstellung' geworden. Gruppe von 3299 will ich mir mal in der Bahn überlegen. Vielleicht können wir's Hasse noch einhändigen.

Herzlichen Gruss.

Ihr Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 23.02.1932

[1]Hier geht es um die Tagung, auf der Artin drei Vorlesungen über Klassenkörpertheorie gehalten hat, die dann von Taussky aufgeschrieben wurden und später in englischer Übersetzung als Anhang in Cohns [57] erschienen sind.

[2]Hier dreht es sich um die gemeinsame Arbeit über die Kapitulation von Idealklassen in unverzweigten kubischen Erweiterungen imaginär-quadratischer Zahlkörper. Die Galoisgruppen der zweiten 3-Klassenkörper hängen stark vom Kapitulationsverhalten der Idealklassen in diesen Erweiterungen ab. Scholz und Taussky gelang es, diese Galoisgruppen für einige Typen der Kapitulation zu bestimmen.

Dazu führten sie den Kapitulationstype einer solchen unverzweigten Teilerweiterung des Hilbertschen 3-Klassenkörpers ein: seien S_1 und S_2 die Automorphismen, welche Artins Reziprozitätsgesetz den beiden Basisklassen der Idealklassengruppe $\mathrm{Cl}_3(k) \simeq (3,3)$ des imaginär-quadratischen Grundkörpers k zuordnet. Die vier kubischen unverzweigten Erweiterungen K_j/k von k haben Galoisgruppen $G_j = \langle S_j, G' \rangle$ für S_1, S_2, $S_3 = S_1S_2$, und $S_4 = S_1S_2^2$. In jeder dieser drei kubischen Teilerweiterungen kapituliert genau eine Untergruppe der Ordnung 3 aus $\mathrm{Cl}(k)$; wenn die Klassen S_{i_1}, S_{i_2}, S_{i_3} und S_{i_4} in K_1, K_2, K_3 und K_4 kapitulieren, dann sagt man, k habe den Kapitulationstyp $[i_1, i_2, i_3, i_4]$. Bis auf Permutationen, die von verschiedenen Numerierungen der zyklischen Erweiterungen herrühren, gibt es genau 19 verschiedene Kapitulationstypen in den von Scholz und Taussky betrachteten Fällen.

4.11 06.03.1932, Scholz an Taussky, Postkarte

Kassel, 6. III. 32.

Liebes Fräulein Taussky!

Kam gestern bei leichtem Nebel hier an. Mittags heiterte es sich auf. Machte einen Ausflug nach Wilhelmshöhe, Herkules[1)] und Löwenburg. Oben war es ganz klar. Die Stadt lag im Dunst. Abends ging ich in die Oper: Die Schalkhafte Witwe, von Wolf-Ferrari. Sehr witzig. Die Oper ist ein Prunkbau. Heut vorm.[2)] Gemäldegalerie, Fräulein Grimshaw[3)] nicht getroffen. Überlege mir die Kapitulation jetzt etwas systematischer, vielleicht bald für $(\ell, \ell, \dots, \ell)$.

Herzliche Grüsse. Ihr Noldi.

Anmerkungen zum 06.03.1932

[1]Der Bergpark Wilhelmshöhe in Kassel gehört heute zum UNESCO Weltkulturerbe. Das Herkules-Bauwerk ist ein Schloss, dessen Grundriss die Form eines regelmäßigen Achtecks besitzt. Die Löwenburg ist bereits als Teilruine eines typisch englischen Schlosses erbaut worden.

[2]„Heut vormittag“.

[3]Margaret Eleanor Grimshaw erhielt ihren Abschluss (BA) 1926 am Newnham College der Cambridge University und war später dort als Lecturer angestellt.

4.12 21.04.1932, Scholz an Taussky, Postkarte

Freiburg i.Br. 21. IV. 32.

Liebes Fräulein Taussky!

Sind Sie noch in Wien oder schon wieder in Göttingen? Ich jedenfalls wieder in Freiburg. Sonntag abend hier angekommen. Die Reise war noch weiterhin sehr schön. In Griechenland die Autotouren etwas gefährlich auf den schlechten Strassen. Einmal ist eins umgekippt, den Abhang runter, wobei 3 verletzt wurden. Sonst brach manchmal der Boden durch, oder ein Rad ... Die Natur war aber gerade dort herrlich – in Athens Umgebung, Mykenä und Delphi, auch die Häfen in Nauplia[1)] und Itea mit den Bergen rund herum. – Ich hab' gerade meine Note[2)] an Hahn abgeschickt, muss noch an einer Stelle Ihre Note mit dem $K^3_{19,1129}$ zitieren. Wann und wo erscheint sie? Wenn sie bald erscheint, kann ich das Zitat[3)] in der Korrektur nachholen. – Beim Hauptidealproblem mit $(2, 2, \ldots, 2)$-Gruppe müssen Sie bei der 'geraden' und 'ungeraden Anzahl' irgendwas verwechselt haben, als Sie damals[4)] schlossen, dass bei der $(2, 2)$-Gruppe jede Klasse in 0 oder 2 zykl. Körper kapituliert. Ich krieg gerade immer nur 1 oder 3 heraus, und die Gesamtsumme muss doch auch ungerade sein, da umgekehrt in jedem der drei zykl. Unterkörper 1 oder 3 Klassen (neue) kapitulieren. Ist die 2. Klassengruppe z.B. die Quaternionengruppe, so kap. jede nur in sich selbst[5)]. – Mit dem Körperkonstruktionsproblem bin ich für zweistuf. Gr. so ziemlich fertig; fehlt nur noch 'ne wichtige Sache, die ich beinah übersehen hätte.

Mit herzlichem Gruss.

Ihr Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 21.04.1932

[1]Nauplio ist der griechische Name von Nafplion.

[2]Vermutlich [S12].

[3]Scholz zitiert Tausskys Artikel mit „erscheint inzwischen im J. f. M. **168** oder **169**“.

[4]Dieses Ergebnis hatte Taussky in Bad Elster vorgetragen; sh. [Ta32b]. Dort kann man lesen:

> *Es werden Sätze über relativ-Abelsche unverzweigte Körper besprochen und der Fall, daß die Ordnung der Klassengruppe des Grundkörpers eine Potenz der Zahl* 2 *ist, näher behandelt. Hat jede absolute Idealklasse des Grundkörpers die Ordnung* 2 *selbst, so gilt, wenn die Klassengruppe des Klassenkörpers außerdem gewisse Bedingungen erfüllt, der folgende Satz: Die genaue Anzahl der relativ-quadratischen unverzweigten Oberkörper, in welchen die gleiche Klasse* c *des Grundkörpers zur Hauptklasse wird, ist eine gerade Zahl.*
> *Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich unter Benützung der von Artin und Furtwängler ausgearbeiteten gruppentheoretischen Methoden Aussagen machen über die Anzahl derjenigen Klassen des Grundkörpers, welche in den echten Unterkörpern des Klassenkörpers in die Hauptklasse übergehen.*
> *Eine ausführliche Darstellung wird in den Monatsheften für Mathematik und Physik erscheinen.*

Die Veröffentlichung dieses Artikels ist allerdings nicht erfolgt.

[5]Dies ist ein Ergebnis von Furtwängler [86].

4.13 07.06.1932, Scholz an Taussky, Postkarte

Freiburg i.Br. 7. VI. 32.

Liebes Fräulein Taussky!

Schreiben Sie, bitte, wieder einmal! Wenigstens eine Karte, wenn Sie zu einem ausführlichen Brief nicht kommen. Ich weiss garnicht mal, ob Sie nun in Göttingen oder Wien sind. Ich hab' hier noch ein Separaten-Paket für Göttingen liegen. Weiss nun nicht, ob ich Ihr Separat mit hineinstecken oder mit den Auslandssendungen schicken soll, die auch bald folgen werden. Mit meinem Körper Konstr. problem bin ich auch wieder weiter gekommen: Kann jetzt wirklich Zweigkörper: $(\ell, \ell; \ell^k)$ konstruieren, also auch alle zweistuf. v. Primzahlgrad mit max. Ab. Untkp. (ℓ, ℓ). Für die höheren Fälle ist es schwieriger, als ich nach meinem letzten Fund dachte. Alle etwaigen früheren Behauptungen, schon weiter zu sein, widerrufe ich hiermit. Was macht unser gemeinsames Manuskript? Und die Korrekturen des Hilbert-Bandes, die Sie mir zugedacht haben? – Meine Schwester hat jetzt eine Anstellung als italienische Korrespondentin beim Kunstseide-Verkaufsbüro.

Viele herzliche Grüsse, auch an Frl. Noether und Herrn Fenchel!

Ihr Arnold Scholz.

4.14 16.06.1932, Scholz an Taussky, Postkarte

Freiburg i.Br. 16. 6. 32.

Liebes Fräulein Taussky!

Für Ihre Karte vielen Dank. Das ist sehr nett von Ihnen, dass Sie mir die schönsten Bogen der Hilbert-Korrekturen[1)] geben wollen! Es eilt aber garnicht. Die Monatshefte-Korrekturen werde ich wohl erst im Herbst bekommen, da das Juli-Heft schon voll war. An die Artin-Vorträge[2)] hab' ich garnicht mehr gedacht und weiss nicht mehr, wieviele hier ein Exemplar haben wollten. Wenn ich keinen andern Bescheid mehr gebe, schicken Sie bitte 4. Vielleicht fragen Sie auch mal in Berlin das Math. Seminar oder Schur an; da haben sicher auch manche gern ein Hektogramm. Frl. Held ist sicher auch dafür interessiert. Wegen unseres Manuskripts weiss ich garnicht, wann wir wieder zum gemeinsamen Besprechen kommen. Kommen Sie auf Ihrer Rückfahrt Ende Juli/Anf Aug. nicht durch Freiburg? Feigls sind dann auch da. Ich mache Ende Aug. wahrscheinl. eine Reise mit einem Bekannten und gedenke, nur wenige Tage (etwa 5./7. IX.) mich in Zürich[3)] aufzuhalten. Ob ich mich überhaupt anmelde, weiss ich nicht. Die 30 Fr will ich jedenfalls nicht den Schweizern in den Rachen schmeissen. – Eli wohnt: Bln-Schöneberg, Badensche Str. 54.

Mit herzlichem Gruss.

Ihr Noldi.

Anmerkungen zum 16.06.1932

[1]Taussky gab zusammen mit Magnus and Ulm Herausgeberin Hilberts Gesammelte Werke heraus.

[2]1932 hielt Artin drei Vorlesungen über Klassenkörpertheorie, die Taussky mit Schreibmaschine abtippte und die hektographierten Manuskripte für 1 Mark verkaufte. Eine englische Übersetzung dieser ausgezeichneten Vorlesungen findet man im Anhang von Cohn [57].

[3]1932 fand in Zürich der ICM (International Congress of Mathematicians) statt.

4.15 26.07.1932, Scholz an Taussky, Postkarte

Freiburg i.Br. 26. 7. 32.

Liebes Fräulein Taussky!

Ein neuer Einfall: Wir könnten uns ja wieder vor der Tagung treffen, und zwar im Ötztal! Wie denken Sie darüber? Meine Reisepläne haben sich jetzt etwa in dieser Richtung konzentriert. Ich werde zwischen 10./15. Aug. aufbrechen, zuerst vielleicht nach Vent, und von dort aus ein paar Hochtouren machen, dann gegen Ende Aug. (24.) etwas weiter runter, vielleicht nach Sölden (Ötztal) – oder auch Neustift im Stubaital, und dann wäre es sehr nett, wenn Sie auch dazu Lust hätten und wir dann unsere Note bei der Gelegenheit wirklich abschliessen könnten. Mo 5. IX. nach Zürich. Interessante Vorträge sind Di u. Mi. Do will ich statt Ausflug mich lieber noch mit Leuten unterhalten und abends nach Fbg. fahren. 10. IX. nach Berlin. Schreiben Sie mir bitte bald, ob Sie Lust zu vorherigem Treffen haben, und ob lieber Ötz- oder Stubai-Tal! (Ötztal wäre Richtung Zürich praktischer.) Und, ob Ihre Bekannten vielleicht billige Stud.-Zimmer zu etwa 3 fr. wissen, wie im Kongress-Prospekt angegeben! Da ich zum Kongress nicht angemeldet bin, kann ich keine Vermittlung durch die Leitung beanspruchen. Zu den Vorträgen hat man auch ohne Anmeldung Zutritt. Sie wollten mir ja sowieso mal wieder ausführlich schreiben; vielleicht, wenn Sie jetzt nach Wien fahren? Oder haben Sie noch länger in Gött. jetzt zu tun?

Herzlichen Gruss.

Ihr Noldi.

4.16 26.08.1932, Scholz an Taussky

$$\left(\frac{\text{Wien, den 3.7.32.}}{\text{Vent, 26.8.32.}}\right)$$

Liebes Fräulein Taussky!

Da Sie anscheinend immer noch nicht wissen, was Sie machen sollen, will ich mal die Initiative ergreifen und Ihnen einen genauen Plan machen für Ihre letzten Tage vor Zürich:

Ich hab' mich jetzt entschlossen, diese Tage vor Zürich doch in Sölden zu verbringen. Wie ich hörte, soll das Fräulein Held empfohlene Oberlech–Goldener Berg zwar schönes Skigelände, aber, und daher, im Sommer langweilig sein. Fräulein Held war nun jetzt nach dem Examen etwas erholungsbedürftig, und daher mag die Ruhe für sie das richtige gewesen sein. Ich werde etwa am 30. nachm. von Vent nach Sölden herunterspazieren. Für Sie wäre die angenehmste Fahrt:

$$\text{1. Tag Wien–Salzburg} \quad \begin{cases} 7^{30} - 12^{20} & \text{oder} \\ 13^{40} - 19^{00} \end{cases}$$

2. Tag ab Salzburg 8^{15} mit Aussichtswagen, an Oetztal 13^{55}. Ab Oetztal mit Touren-Auto (Anschluss) 14^{00}, an Sölden 16^{05} – Es fahren 14^{00} zwei Autos: ein Postauto, das in Oetz länger hält und in Sölden 16^{22} erst ankommt, und ein Privatauto an 16^{05}. Sehen Sie zu, dass Sie ins Privatauto kommen! Preis ebenfalls 8 S.

2. Möglichkeit: Sie fahren am ersten Tag schon bis Innsbruck mit dem 7^{30}, an 16^{55}. Dann können Sie am 2. Tag früh schon $7^{45(20)}$ [Aussichtswagenzug (eingeklammert: Schlafwagenzug, also 7^{45} besser)] abfahren. An Ötztal $8^{31(03)}$, ab mit Postauto 8^{35} an Sölden 10^{45} (Oder auch 13^{12} ab Innsbr. und dann weiter wie oben).

3. Möglkt: Sie können auch in einem Tag fahren, aber etwas anstrengend, und Sie sehen das Ötztal bei Nacht. Nämlich ab Wien: 7^{40} (nicht 7^{30}! fährt zwar schneller, aber hält nicht in Ötztal), an Oetztal 19^{19}, ab mit Postauto 19^{25}, an Sölden 21^{30}.

Ausserdem sitzen Sie bei 3. am längsten auf der Bahn. Ich würde an Ihrer Stelle 1. wählen. Vielleicht sind Sie gar schon reisebereit, wenn Sie der Brief am Montag früh erreicht und fahren gleich 13^{40} nach Salzburg. Hoffentlich aber, bitte, einen Tag darauf. Wenn Sie also keine andere Nachricht mehr nach *Sölden, Gasthaus zur Sonne* schicken, erwarte ich Sie am Mi 31. Aug. 16^{05} oder 10^{45} dort. Ist es recht so? Ich werde mich vorläufig als bestimmt

dort anmelden und hinzufügen, dass voraussichtlich noch eine Dame in den nächsten Tagen hinzukommt. Dann halten sie jetzt schon für alle Fälle frei. Pension in der Nachsaison kostet, glaub' ich, 7-8 S bei einfacheren Zimmern. Ich werde meinesteils jedenfalls Pension nehmen.

Vergessen Sie ja nicht unsere Klassenkörper-Blätter! Wir müssen dann den Text im wesentlichen festlegen, nach Möglichkeit auch die Einleitung, deren Text Sie am besten abfassen. Die endgültige Abfassung der Note kann ich ja dann noch übernehmen, da Sie ja jetzt stärker beschäftigt sind als ich.

Zur Wildspitze[1)] (3774) hatte ich vorigen Samstag herrliches Wetter; die Besteigung war sehr angenehm, die Aussicht prächtig. Montag bestieg ich die Kreuzspitze (3456). Das Wetter liess dann nach. Geh darum erst heut nachm. wieder auf die Hütt'n, um morgen den Similaun (3607) zu besteigen. Vent selbst ist sehr schön, hoffentlich Sölden noch mehr.

Herzlichen Gruss.

Ihr Ali[2)]

Sollten Sie etwa nicht kommen können, so teilen Sie mir, bitte, noch meine Züricher Adresse mit! Ich komme in Zürich am 5. IX. 13^{04} an und fahre 8. IX. 18^{23} ab.

Anmerkungen zum 26.08.1932

[1]Wildspitze, Kreuzspitze und Similaun sind Berge in den Ötztaler Alpen.

[2]Scholz und Taussky benutzten gerne ihre Spitznamen, also Ali für Arnold Scholz, Oli für Olga Taussky und Eli für Elisabeth Scholz bzw. Korrodi. Auch Zermelo wurde von Scholz bisweilen mit „Zero“ angeredet; Zermelo selbst soll seinen Namen einmal spaßeshalber als Verkürzung von „Walzermelodie“ erklärt haben.

4.17 11.12.1932, Scholz an Taussky, Postkarte

11. XII. 1932

Liebe Oli!

Für Ihre beiden Karten vielen Dank! Wollte schon lange schreiben, wie sehr ich mich freue, dass Sie das Stipendium in naher Aussicht haben und auch etwas nach Freiburg kommen wollen. Wäre das noch nicht diesen Sommer? Hoffentlich kollidiert das dann nicht mit meinen Plänen. Ich steh mit Tschebotarjow in Verbindung wegen Aufenthalt in Kasan[1]. Darüber ausführlich im beabsichtigten Brief, der bald mit meinem Manuskript folgen wird, wie ich hoffe. Für Zitat vielen Dank! Hab' Sie zitiert: "· · · ", erscheint inzwischen im J.f.M. 168 oder 169.

Herzl. Gruss.

Ihr Noldi.

Anmerkungen zum 11.12.1932

[1] Tschebotarjow war an der Universität von Kazan beschäftigt.

4.18 März 1933, Scholz an Taussky, Fragment

Besonders unter E., bei der Diskussion von [2211], wo eine unklare Stelle im Beweis ist, kann man das verwenden. Überlassen Sie mir die Abänderung? Denn da Sie wohl kaum noch ein Konzept haben, hat es wohl keinen Zweck, dass ich Ihnen mitteile, wie ich's abändern möchte. Es ist bestimmt jetzt verständlich und wenig verändert. – Ebenso bei [1123] unter D. genügte eine geringfügige Umstellung.

Bei [2143] A: $F_1 \equiv -Y$; $F_2 \equiv X\,(L_2)$ habe ich den Beweis ganz abgeändert, ohne dass er länger geworden ist. Ich konnte ihn so erst garnicht verstehen.

11) Im Falle [2143] B, auf welchen sich auch Fall C „durch Umnumerierung“ $S_1, S_2 \leftrightarrow S_3, S_4$ “transformieren lässt, ... („ “ hinzugefügt)

Ebenso: [2134] A lässt sich durch „Umnumerierung von S_1 und S_2“ auf B transf.

Oder finden Sie die Zusätze überflüssig? Ich finde: weil wir schon immer die Kap. typen ineinander transformiert haben, weiss der Leser nicht, ob bei dieser Selbsttransf. von [2143] ebenfalls eine solche Umnum. gemeint ist. – bei diesem Fall [2134] B hab' ich den Beweis auch etwas abgeändert; man braucht hier die schärfere Äq. $Y^2 \approx f_1$, um korrekt zu schliessen.

12) Bei [2134] C: $XY \overset{\equiv}{\not\equiv} 0$ geht der Beweis zuerst so wie bei F. Eben darum haben Sie ja bei F auch den ‘schwierigsten’ Fall [2112] $\sim$ [3443] hervorgeholt. Ich hab' daher so geschrieben:[1)]

Hier können wir nicht auf $XY \equiv 0$ schliessen; sondern es folgt wie unter F erst nur

$$XY \sim X^\kappa \sim Y^\lambda; \qquad \kappa, \lambda \geqq 3$$
$$X^2Y \equiv XY^2 \equiv X^{\kappa+1} \equiv Y^{\lambda+1} \equiv 0$$

(5) ergibt dann, etwa auf $F_2 \equiv -3 - X\,(\mathfrak{M}, Y)$ angewandt,

$$H = 3 + 3X + X^2 + 3Y + Y^2 \equiv 0,$$

was wegen $f_3 - H \approx -XY$ und $LXY \equiv 0$ zu $f_3 \equiv -XY$ führt.

Wegen $F_1 \equiv Y + 3 \equiv -2Y - Y^2\,(\mathfrak{M}, X)$ muss

$$F_1 \equiv -2Y + Y^2 + a_1X^{\kappa-1} + c_1XY, \quad a_1, a_2 = \pm 1; \quad c_1, c_2 = 0, 1, 2$$

ausfallen, entspr. $F_2 \equiv \cdots$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{R}_{\kappa\lambda} \quad \text{oder} \quad = (X^\alpha, Y^\beta, f_3 + XY, XY + a_1X^{\kappa-1}, XY - a_2Y^{\lambda-1}).$$

(Ich glaube, man muss hier schon ausführlich so schreiben und kann kaum auf die früheren Fälle $F_1 X \equiv 0\,(\mathfrak{M})$; $F_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{M}, Y)$ verweisen, da es hier mit $X^{\kappa-1}$ und XY was neues ist. Oder meinen Sie doch?)

Schreiben Sie mir, bitte, noch im März, ob und wieweit Sie mit meinen Änderungen einverstanden sind, damit ich diese Änderungen am Manuskript noch vor meiner Abreise[2)] vornehmen kann!

Nun noch Ihre sonstigen mathematischen Fragen[3)]: 1) Zur Klkth. nach unten[4)]: K gemeinsamer voller Klk. von K_1 und K_2. Ihre Aussonderung der 'trivialen' Paare K_1, K_2 gefällt mir garnicht, weil sie in absolutem Gegensatz zum Aufbau der Trägheitsgruppen steht: Danach sind eben im allg. die unverzweigten Teile die 'unteren', die verzweigten die 'oberen'. Die 'nichttrivialen', die Sie in Ihrem Brief angeben, finde ich nämlich vom zahlentheoretischen Standpunkt die allertrivialsten, viel trivialer, als wenn etwa $K_1 < K_2$. Im letzten Falle engt man nämlich den Klk. turm viel mehr ein, als bei zwei Körpern K^{ℓ}_{pq} ($p, q \equiv 1 \pmod{\ell}$ oder $q = \ell^2$). Übrigens gilt: K^{ℓ}_{pq} hat genau die Klassenzahl ℓ, wenn $K^{\ell}_{p} \cdot K^{\ell}_{q}$ die Klz. 1 hat, *d.h. wenn p und q nicht beide zueinander ℓ^{te} Potenzreste sind.* Speziell für $K^{\ell}_{p} \cdot K^{\ell}_{\ell n}$ braucht man nur $p \not\equiv 1\,(\ell^2)$ zu wählen. Die $\ell - 1$ Körper K^{ℓ}_{pq} haben aber z.B. auch denselben Klassenkörper, wenn sie die genaue Klassenzahl ℓ^2, also $K^{\ell}_{p} K^{\ell}_{q}$ die Klz. ℓ hat (symb. Ordg.: $\mathfrak{L}$).

2) Der Umkehr- und Abgrenzungssatz der Klkth. besagt, dass man durch lineare Kongr. im Grundkörper nur die Gesamtheit der rel. *Ab.* Körper erfasst. Legt man aber z.B. Darstellbarkeit durch quadr. Formen zugrunde, wie wir hier, so kommt man evtl. weiter. Eine 'Realisierung der zweiten Klgr.' im Grundkörper geschieht nach meiner Meinung am einfachsten, indem man nach Frl. Noether den Körper mit der Gruppe 'verschränkt'. Das umgekehrte: die Gruppe aus einer hyperkomplexen Bildung herauszuschälen, erscheint mir als eine Komplikation.

3) Über meine Annalen-Note[5)] nächstens. Vielleicht gebe ich zur Abwechslung auch mal Furti einen Bericht. Schreibe ihm dann, dass er's Ihnen auch zeigen[6)] soll.

4) Das Math. Inst. Freiburg freut sich, wenn es ein Separatum Ihrer Note bekommt. Loewy sicher auch; aber nur, wenn dann noch eins übrig. Hat Zermelo eins verdient? (Glaube kaum.) Senden Sie doch 1-3 Ex. per Adr. Math. Inst. d. Univ. Freiburg i. Br.!

Mit herzlichem Gruss.

Ihr Arnold Scholz.

Anmerkungen zum Brief vom März 1933

[1]Die folgende Passage findet sich in [S17, S. 37], allerdings steht in der Arbeit das Ideal $(\mathfrak{M}, Y^2)$ anstatt $(\mathfrak{M}, Y)$, und auch das letzte Ideal sieht in [S17] leicht anders aus.

[2]Die nächste Karte vom 11.04.1933 schreibt Scholz aus Amalfi in der Provinz Salerno, Italien.

[3]Diese Fragen haben mit Tausskys Artikeln [Ta35b, Ta37b, Ta37c] zu tun.

[4]In [Ta37c] betrachtet Taussky disjunkte Zahlkörper K_1 und K_2 mit einem gemeinsamen Hilbertklassenkörper K. Sind K_1 und K_2 zyklisch von Primzahlgraden ℓ_1 und ℓ_2, dann zeigt Taussky, dass $\ell_1 = \ell_2 > 2$ sein muss.

[5]Die Arbeit [S14] von Scholz wurde am 18. März 1933 eingereicht.

[6]Zum Zeitpunkt dieses Briefes war Taussky in Wien. Der gemeinsame Artikel [S17] wurde am 31. Juli 1933 eingereicht, sodass dieser Brief vermutlich im März 1933 geschrieben worden ist.

4.19 11.04.1933, Scholz an Taussky, Postkarte

Amalfi, 11.4.33.

Liebe Oli!

Für Ihren Brief, den ich auf meiner Bahnfahrt las, vielen Dank! Werde mich bei der Abänderung von 2 I, II ganz nach dem richten, was Sie schreiben. Falls Sie sich wirklich die Mühe machen wollen, auch die and. Teile ausser der Einleitung[1)] zu tippen, was bei Formeln im Text mühsam ist, aber doch viell. vorteilhaft, ist es gescheiter, *ich* sende *Ihnen* das noch nicht Getippte Kap. 2 zurück und Sie dann das Ganze an Hasse. Also: Wenn Sie mir Kap. 3 u. Einl. Schluss schicken, ohne Kap. 1, falls Sie tippen; mit Kap. 1, falls Sie nicht tippen. – Reise bisher gut verlaufen, auch meist gutes Wetter, bes. Sonntag in Neapel am Posilip. Heut nacht war hier schweres Gewitter. Das Meer ist auch düster schön. In Rom war ich 2 Tage, viel gesehn, auch Via Appia. Genua 1 Tag, hat mir auch sehr gefallen. Herrlich der Dom in Pisa!

Herzl. Gruss. Noldi.

Anmerkungen zum 11.04.1933

[1]Gemeint ist die Einleitung zu ihrer gemeinsamen Arbeit [S17].

4.20 19.05.1933, Scholz an Taussky

Freiburg, 19. Mai 1933.

Liebes Fräulein Taussky!

Vielen Dank für Ihre Karte. Die Frage des Berliner Mathematikers (Reichardt)[1)] will ich gleich beantworten: Die Möglichkeiten für zyklische Klassengruppen – um zyklische handelt sich's doch immer nur? – sind tatsächlich sehr beschränkt, sobald man über Kreiskörper hinausgeht; denn Sie müssen bedenken, dass die Automorphismengruppe einer zyklischen Gruppe Abelsch ist. Also bleibt die zyklische Klassengruppe $\mathfrak{C}$ des Galoiskörpers K bei der Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}'$ der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von K elementweise invariant, gehört also dem Zentrum von $\mathfrak{G}'\frown\mathfrak{C}$ an. Daraus folgt aber: Ist $\mathfrak{G}'$ eine auflösbare Gruppe, und sind die Ordnungen von $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{C}$ teilerfremd, so zerfällt $\mathfrak{G}'\frown\mathfrak{C} = \mathfrak{G}' \times \mathfrak{C}$, d.h. die ganze Klassengruppe von K stammt schon von dessen Kreiskörper K_0 her[2)]: es ist der Klassenkörper $\overline{K} = (K, \overline{K}_0)$.

Ihr Gegenbeispiel wäre also das denkbar einfachste, wenn es überhaupt ein Gegenbeispiel wär. Leider aber – ist Ihnen das nicht aufgefallen? – liefert der schöne unverzweigte *zwei*stufige Oberkörper 14. Grades vom Artin-Körper[3)] A für die Klassengruppe von A nur den Beitrag 2; Klassenkörper: $A(\sqrt{-19})$. Und erst dieser hat eine durch 7 teilbare Klassenzahl, gerade so gut, wie sein maximaler Abelscher Unterkörper $P(\sqrt{-19}, \sqrt{-151})$. (Von $P(\sqrt{-151})$ stammt ja die Klassenzahl 7.). – Der Artin–Körper kann nämlich nach der Tschebotarjowschen 'Gruppentheorie des Klassenkörpers' (Crelle $\frac{161}{1929}$) kein Gegenbeispiel liefern, weil eben $A/P(\sqrt{-2869})$ unverzweigt. Dann folgt, dass jeder zyklische 'Elementare Teilklassenkörper' ein uneigentl. (II.) ist, d.h. eben: über $P(\sqrt{-D})$ sich direkt mit A multipliziert. – Wahrscheinlich gilt dieser Schluss überhaupt, wenn der Grad des zyklischen Klk. zu $A/P(\sqrt{-D})$ prim ist (ich werde augenblicklich wieder nicht ganz aus Tschebotarjow klug, trotzdem ich eben Korrekturen meines Referats über diese Arbeit gelesen hab); und dann stimmt alles, was Herr $*$ sagt. Auch die eingeklammerte Bemerkung ist so interpretiert richtig: Ist K ein Galoiskörper, dessen absoluter Klassenkörper $\overline{K}$ keine Kreiskörpererweiterung mit sich bringt ($\overline{K}_0 = K_0$), und hat $\overline{K}$ quadratfreie Klassenzahl, so geht diese in der Klassenzahl von K auf. Die Kernfrage, die noch zu lösen bleibt, ist folgende: Ein relativ Galoisscher Körper mit einfacher nicht zyklischer Gruppe habe eine zyklische Klassengruppe. Stammt diese dann immer schon vom Grundkörper? Hat also insbesondere jeder absolut einfache Körper eine Klassenzahl 1 oder nichtzyklische Klassengruppe? Gruppentheoretisch: Gilt auch für nichtauflösbare, insbesondere einfache Gruppen $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}/\mathfrak{Z}$: Hat $\mathfrak{H}$ ein zyklisches Zentrum $\mathfrak{Z}$, dessen Ordnung zu $\operatorname{Ord}\mathfrak{G}$ prim ist, so ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{G} \times \mathfrak{Z}$? Glaube beinah.

Sollte das allgemein stimmen oder Herr $*$ den Satz sonstwie wirklich auch für nichtauflösbare Körper bewiesen haben, so lohnt die Veröffentlichung. Er möge sich aber jedenfalls Tschebotarjow §2 ansehen. Für auflösbare Gruppen folgt es aber sehr einfach aus meiner Dissertation und war mir bei dreistufigen Gruppen noch im Gedächtnis.

Sende Ihnen bald meine Note aus den Monatsheften[4)], wo Sie deutlich sehen werden, dass es mit quadratischem Körper mit Klassenzahl 3 nicht geht. Nie zyklisch!

Meine frühere Behauptung, die Existenz unendlicher Gruppen mit Elementen von Primzahlpotenzordnung und zwei Erzeugenden (also unendl. ℓ-Klassengruppentürme) stehe in meiner Crelle-Note, war ein Bluff. Ich brauchte ja immer mehr Erzeugende. Aber man kann's so machen:

$\mathfrak{G} = \{S_1, S_2\}$. Einzige Relationen: $S^\ell = \mathcal{E}$ ($\ell > 2$) für jedes Element aus $\mathfrak{G}$. Falls $\ell = 2$: $S^4 = \mathcal{E}$.

Keine Kommutatorgruppe wird auf diese Weise zyklisch, und es gibt immer wieder neue Kommutatoren.

$S_{\alpha_1}^{a_1} S_{\alpha_2}^{a_2} \dots S_{\alpha_r}^{a_r} = S_{\beta_1}^{b_1} \dots S_{\beta_s}^{b_s}$ nur dann, wenn $r = s$; $\alpha_\varrho = \beta_\varrho$; $a_\varrho \equiv b_\varrho \bmod \ell$.

Ich hätte jetzt gern gewusst, ob Sie das Manuskript tippen oder nicht, was mir an sich völlig gleich. Nämlich 2 II ist zwischen (13) und (14) garnicht verständlich; ausserdem müsste Beweisführung B ausführlicher sein. War denn mein Konzept nicht verständlich? Oder hab' ich's vor Beweis A genauso angeordnet? 2 I hab' ich nun vollständig verbessert mit Einkleben von Streifen. Falls Sie nun tippen, und mein Konzept von 2 II brauchbar ist, könnte ich mir die Verbesserung von 2 II sparen, finde mich augenblicklich ohne mein altes Konzept nicht ganz zurecht. – Bitte, ändern Sie an Kap. 3 möglichst wenig! Nur, wo nicht ganz verständlich, fügen Sie, bitte, was ein! – Eins hab' ich bei 2 I noch offen gelassen: Sie schwanken dort wegen $\mathfrak{A} = \{A\}_{\mathfrak{S}}$ zwischen $\{\mathfrak{A}^{S-1}\}$ und $\{A^{S-1}\}$ in der Bezeichnung. Man könnte einmal $\mathfrak{A}^{S-1} = \{A^{S-1}\}_{(\mathfrak{S})}$ schreiben und dann $\mathfrak{A}^{S-1}$ – oder das erklären.

Herzlichen Gruss.

Ihr Arnold Scholz.

Anmerkungen zum 19.05.1933

[1]Reichardt war ein Schüler von Hasse. Am 19.12.1932 hatte Otto Grün einen Brief an Hasse geschrieben, der folgendes Ergebnis enthielt: Sei L/k eine Galoiserweiterung und K/k seine maximale abelsche Teilerweiterung; ist dann die Klassengruppe von L zyklisch, dann gilt $h_L \mid (L:K) \cdot h_K$. Hasse hat Grün vorgeschlagen,

dieses Ergebnis als eine Aufgabe in den Jahresberichten der DMV zu veröffentlichen; es wurde dann am 7. Mai 1933 eingereicht und erschien als Aufgabe 153 in Band **43** (1934):

153. *Es sei k ein absolut-galoisscher Zahlkörper und k_0 der größte absolut-abelsche Teilkörper. Man beweise:*

1. *Wenn die absolute Idealklassengruppe von k zyklisch ist, so ist die Klassenzahl h von k ein Teiler des Produkts rh_0 aus dem Relativgrad von k über k_0 und der absoluten Klassenzahl h_0 von k_0.*

2. *Wenn für eine Primzahl ℓ die absolute ℓ-Klassengruppe von k zyklisch von der Ordnung ℓ^ν ist, so ist ℓ^ν Teiler von rh_0.*

Lösungen von L. Holzer und A. Scholz erschienen in Band **44**. Grüns Bemühungen, die Bedingung auszuschalten, wonach die Klassengruppen in den Oberkörpern zyklisch sein müssen, führten ihn letztendlich zu seinem berühmten gruppentheoretischen Satz; siehe Roquette [271] und Lemmermeyer [169].

[2]Sei K/k eine normale Erweiterung von Zahlkörpern mit Galoisgruppe G, und es bezeichne $C = \mathrm{Cl}(K)$ die Klassengruppe von K. Der Hilbert-Klassenkörper L von K ist dann normal über k mit Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/k) = \Gamma$; diese Gruppe besitzt eine zu C isomorphie Untergruppe mit der Eigenschaft $\Gamma/C \simeq G$.

Sei nun C zyklisch. Da die Automorphismengruppe einer zyklischen Gruppe abelsch ist, müssen die Elemente von Γ' (die Kommutatorgruppe muss offenbar C enthalten) mit denen von C kommutieren, folglich gehört C zum Zentrum von ??

Ist G auflösbar und haben Γ' und C teilerfremde Ordnungen, dann ist $\Gamma' \frown C = \Gamma' \times C$, und daraus folgt, das die gesamte Klassengruppe von der maximalen abelschen Teilwerweiterung K_0/k von K/k herrührt.

[3]Artin hatte eine unverzweigte nicht auflösbare Erweiterung eines quadratischen Zahlkörpers entdeckt, als er mit Polynomen 5. Grades herumspielte. Der Zerfällungskörper von $f(x) = x^5 - x + 1$ ist eine Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ vom Grad 120 mit Galoisgruppe S_5, und unverzweigt über seinem quadratischen Teilkörper $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2869}\,)$, der Klassenzahl 1 besitzt. Der Hilbert-Klassenkörper im engeren Sinne ist der biquadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-19}, \sqrt{-151}\,)$ mit Klassenzahl 7. Also besitzt $K(\sqrt{-19}\,)$ eine unverzweigte Erweiterung L/K vom Grad 7, und L/k ist eine Erweiterung vom Grad 14, die an allen endlichen Stellen unverzweigt ist. Die Erweiterung L/k ist allerdings nicht abelsch, sondern hat Galoisgruppe D_7, die Diedergruppe der Ordnung 14.

Wenn, was Taussky anscheinend dachte, K eine unverzweigte abelsche Erweiterung L/K mit durch 7 teilbarem Grad besitzt, dann sollte die entsprechende Untergruppe der Ordnung 7 der Klassengruppe vom maximalen abelschen Teilkörper von $K/\mathbb{Q}$ kommen, also dem quadratischen Zahlkörper k mit Klassenzahl 1, und das ist ein Widerspruch.

[4]In [S12] untersucht Scholz die Struktur von Klassengruppen in Erweiterungen mit Galoisgruppe S_3. Der Hilbert-Klassenkörper quadratischer Zahlkörper mit Klassenzahl 3 sind von diesem Typ.

4.21 23.06.1933, Scholz an Taussky, Postkarte

23. 6. 33.

Liebes Fräulein Taussky!

In aller Eile teile ich Ihnen mit, dass mir Ihr Referat sehr gefällt. Es ist alles wesentliche deutlich hervorgehoben. Nach dem, wie Sie schreiben, nehme ich an, dass es eine Abschrift ist und ich den Zettel behalten darf. Lege ihn in mein Separat. Sie brauchen mich aber wirklich nicht immer erst zu fragen. Wenn Sie z.B. 3 Tage eher geschrieben hätten, wäre ich jetzt auch erst zum Antworten gekommen. – An Hasse hab' ich gerade geschrieben[1)], dass er's im Juli bekommen wird. – Schicken Sie mir also vom 1. Kap. noch einen Durchschlag? Bei geringfügigen Änderungen brauche ich's garnicht mehr zu sehen. –

Elis ist Schweizer, Dialekt mit österreichischem Einschlag. Haare braun, gute Figur, sehr nett und ernst, Abteilungsleiter in der Kunstseide. Nur gerade evang. Hochzeit wird im Laufe des Jahres sein. Entschuldigen Sie den Klecks. – Dienstag war Feier bei Loewy. Krull hielt Rede. – Hab mich Pfingsten schon ganz an die vergrösserte Familie gewöhnt.

Herzliche Grüsse,

auch an Hahn

Ihr Noldi.

Anmerkungen zum 23.06.1933

[1]Brief vom 22.06.1933.

4.22 16.07.1933, Scholz an Taussky, Postkarte

Freiburg i.Br., 16. 7. 33.

Liebes Fräulein Taussky!

Wie geht es Ihnen? Was macht unsere Note? Haben Sie sie vielleicht schon an Hasse geschickt, oder wollten Sie mir nochmal ein Stück zuschicken? Haben Sie sonst viel zu tun? Ich reise am 28. Juli nach Bln. Eli heiratet 1. oder 3. Aug.

Mit den besten Grüssen, auch an Furtwängler, Hahn und Menger

Ihr Arnold Scholz.

4.23 23.07.1933, Scholz an Taussky, Postkarte

23. 7. 33.

Liebes Fräulein Taussky!

Für Ihren Brief vielen Dank! Mein gruppenth. Beispiel[1)] war natürlich sehr flüchtig überlegt. Ich dachte auch mehr daran, dass jeweils ein Erzeugendensystem jeder Kommutatorgruppe die Ordg. 1 haben sollte, ohne allerdings genauer zu überlegen, was das für weitere Relationen zur Folge hat. Das v.d. Waerdensche Gegenbeispiel besagt sogar für $n = 2$, dass nur die Gruppe der Ordg. 27 herauskommt, aber nicht die unsere, sondern die andere mit $\mathfrak{M} = \mathfrak{C}$. Sofort feststellbar auch aus unseren Ausdrücken für $(S_1S_2)^3$ und $(S_1S_2^2)^3$ durch S_1^3 und S_2^3. Da diese Gruppe aber nichts mit unseren zu tun hat – wegen allseitiger ‘Kapitulation’ würde ich darüber nichts mehr in die Note einfügen. Lassen Sie, bitte, doch auch die Bemerkg. über den Klassenkörperturm! Wenn man nicht einmal recht weiss, was man vermuten soll! Sind schon genug Gedanken in unserer Note. Wir können uns die Sache mit dem Gruppenturm aus zwei Erzeugenden mal nach Absendg. der Note überlegen! – Was Sie an meinen Separaten doppelt haben, können Sie mal einem Ihrer Schüler schenken.

Herzlichen Gruss. Noldi.

Anmerkungen zum 23.06.1933

[1]In seinem Brief vom 19.05.1933 hatte Scholz versucht, eine unendliche ℓ-Gruppe G mit $G/G' \simeq (\ell, \ell)$ und endlicher Abelianisierung zu konstruieren. Anscheinend enthielt das gemeinsame Manuskript eine Vermutung über Klassenkörpertürme imaginär-quadratischer Zahlkörper mit Idealklassengruppen vom Typ $(3, 3)$; Scholz war sich aber wohl recht unsicher, ob es in diesem Fall unendliche Klassenkörpertürme geben kann oder nicht.

Magnus bemerkte in [180], dass der Artikel von Scholz und Taussky nahelege, dass 3-Klassenkörper von imaginär-quadratischen Zahlkörpern mit einer 3-Klassengruppe vom Typ $(3^{m_1}, 3^{m_2})$ immer endlich seien. Magnus konnte dort 3-Gruppen G von beliebig hoher Stufe mit $G/G' \simeq (3, 3, 3)$ konstruieren.

4.24 31.07.1933, Scholz an Taussky, Postkarte

31. VII. 33.

Liebes Fräulein Taussky!

Gratuliere zum Abgang unserer Note! Ihr Schreibmaschinenmanuskript finde ich sehr schön deutlich, vor allem auch die Indizes! Mit dem Schluss der Einleitung bin ich ganz einverstanden! Freut mich, dass Ihnen auch der Titel gefällt; kann ruhig seine 3 Zeilen haben! Furchtbar nett von Ihnen, dass Sie so an Eli denken! Werde es richtig ausrichten. Die Trauung ist also Donnerstag nachm. Es wird ganz still stattfinden; mein Vater ist am 16. Juli gestorben, glücklich von seinen Leiden erlöst. Hoffe, dass ich dann jetzt bei meiner Mutter bleiben kann. Es wird immer wahrscheinlicher, dass ich nach Bln. zurückkehre[1)]. 10.–24. Aug. reise ich mit meiner Mutter nach Bornholm. 17. Sept. nach Würzbg. (allein) zur D.M.V.-Tagung. Haben Sie nicht Lust, auch hinzukommen? Ich trage über Lösbkt. der Nicht-Pellschen Gleichung vor, hab' jetzt rege Diskussion mit Rédei und Reichardt darüber[2)].

Erholen Sie sich auch mal etwas, und machen Sie eine schöne Reise!

Viele herzliche Grüsse. Ihr Ali.

Anmerkungen zum 31.07.1933

[1]Scholz wird seine Assistentenstelle bei Doetsch Ende Februar 1934 aufgeben.

[2]Scholz, Rédei und Reichardt untersuchten in den 1930er Jahren die Lösbarkeit der „anti-Pellschen“ Gleichung $T^2 - mU^2 = -4$. Die ersten Ergebnisse darüber gehen auf Legendre und Dirichlet zurück.

4.25 30.08.1933, Scholz an Taussky, Postkarte

Berlin-Schöneberg, 30. 8. 33.

Liebe Oli!

Von mir selbst noch viele Glückwünsche zum Geburtstag und herzlichen Dank für Ihre Karte! Den Satz: 'Sie haben doch Titel und Einleitung auch abgeschickt!' verstehe ich nicht ganz. Meinen Sie, dass ich die Einleitung wieder an Sie zurückgeschickt habe und das überflüssig war, oder fragen Sie mich, ob ich das beides (Titel u. Einl.) an Hasse abgeschickt habe? Soviel ich weiss, haben Sie mir nur Ende Juli die 3 Kapitel geschickt und mich nach Titel und Schlusssatz der Einl. gefragt. Ich habe jedenfalls inzwischen weder an Sie noch an Hasse was geschickt. Wenn ich da was verbummelt habe, bitte ich um Entschuldigung, ebenfalls für meine lange Leitung. – Für das Bogenexemplar von Hilbert II im voraus vielen herzlichen Dank! – Hasses Emmy-Note hab' ich, glaub' ich, noch nicht erhalten, sondern nur in Ztschr.-Exempl. gesehen. Kann mich auch irren. Jedenfalls hab' ich mich darin wohl geirrt, dass ich das Artinsche Rez.-gesetz doppelt hab: Das eine aus den Hamb. Abh. ist über L-Reihen. – Das letzte D.M.V.-Heft hab' ich nicht erhalten. Werde also mal die Grün'sche Aufgabe 'lösen'[1]. Reichardts Aufg.[2] ist wohl mit kub. *Körper*diskr.?

Herzliche Grüsse. Ihr Ali.

Anmerkungen zum 30.08.1933

[1]Grüns Ergebnisse waren Scholz bereits bekannt(vgl. den Brief vom 19. Mai 1933), daher die Anführungszeichen.

[2]Aufgabe 152 (J.ber. **43** (1933), *1*) ist folgende:

> *Unter allen (unendlich vielen) kubischen Körpern, deren Diskriminanten sich nur um Quadrate rationaler Faktoren unterscheiden, gibt es nur endlich viele, in denen Einheiten mit verschwindender Spur existieren (z.B. unter allen zyklischen nur einen).*

Diese Aufgabe wurde von Holzer, O. Taussky und Brandt gelöst.

4.26 08.09.1933, Scholz an Taussky, Postkarte

8. 9. 33.

Liebes Fräulein Taussky!

Die Einleitung liegt nun tatsächlich in Fgb. Wie ich aus Ihrem Brief – vielen Dank! – entnehme, habe ich sie schon vor meiner Abreise bekommen. Entschuldigen Sie, bitte, meine Schlamperei! Dass ich Sie auch so falsch verstanden habe, wo es doch viel näher lag und einfacher war, dass *ich* die Einl. an Hasse schicke! Ich muss meine lange Leitung mal durchpusten lassen, damit überhaupt noch was durchgeht. Ich hab nun Hasse geschrieben – mich entschuldigt – dass ich die Einl. Ende Sept. nachsende. Den Titel hab' ich ihm so mitgeteilt, wie Sie ihn mir geschrieben. Es wird ja doch noch nicht gesetzt. Hauptsache, dass es noch im Juli eingegangen ist. – Für den Hilbert II, der inzwischen eingetroffen ist, vielen herzlichen Dank! Wenn ich es unternehmen sollte, die Werke von Zolotareff (neuherausg. v. d. Russ. Akad.) zu übersetzen, was mir Schur vorgeschlagen, bekommen Sie natürlich auch ein Exemplar. Er soll auch eine Begründung der Idealtheorie haben[1)]. – Die Adresse von Rédei (Privatdoz.): Mezötúr, Ref. Gimnasium (Ungarn).

Viele herzliche Grüsse

Ihr Noldi.

Anmerkungen zum 08.09.1933

[1]Die Idealtheorie Zolotarevs hat ein p-adisches Flair; für eine lesbare Übersicht vgl. [99].

4.27 21.09.1933, Scholz an Taussky, Postkarte

21. 9. 33.

Liebes Fräulein Taussky!

Kongress[1)] gut verlaufen. Gestern Autoausflug nach Miltenberg, heute aber Kammermusik: Schuberts op. 99. Wie geht es Ihnen?

Herzliche Grüsse. Noldi.

F.K. Schmidt
A. Schmidt[2)]
[...] [...] [...] *Hesselbach*[3)]
Karl Boehle
Viele herzl. Grüsse Ruth Moufang
Süss
Zermelo
Magnus.

Anmerkungen zum 21.09.1933

[1]Scholz spricht von der Jahrestagung der DMV in Würzburg.

[2]Arnold Schmidt (1902–1967) war von 1927 bis Ende 1935 Assistent von David Hilbert in Göttingen. Hasse und Hilbert besetzten diese Stelle danach mit Gerhard Gentzen, der sich mit seinem Beweis der Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie für diese Arbeit qualifiziert hatte; sh. [194, s. 55ff].

[3]Benno Hesselbach, Diss. Münster 1930

4.28 09.10.1933, Scholz an Taussky

Freiburg, 9. Okt. 1933.

Liebes Fräulein Taussky!

Haben Sie vielen Dank für Ihren Brief vom 3. X.! Sie merken doch immer gleich, mit welchen Überlegungen ich noch nicht ganz fertig bin; so ist es tatsächlich auch mit den Relationen der n-stufigen Zweiggruppe, die ich etwas zurückstellen werde, bis zur Behandlung der Konstruktion von Körpern mit mehrstufiger Gruppe. Dann wird von selber das herauskommen, dass keine weiteren Relationen existieren als die durch das vorangehende Stück der Kommutatorreihe bestehenden. Vorläufig bin ich wieder mit den zweistufigen Konstruktionen beschäftigt, und zwar habe ich am 5. X. das überraschende Resultat erhalten, dass man zur Konstruktion eines Zweigkörpers vom Typ $(\ell^{h_1}, \ell^{h_2}; \ell^k)$, dessen Existenz damit bewiesen ist, als Kreiskörperbestandteil immer schon einen Körper $K_{p_1}^{\ell^{h_1}}.K_{p_2}^{\ell^{h_2}}$ nehmen kann, wenn nur p_1 und p_2 zueinander ℓ^{te} Potenzreste sind. (Also nicht einmal $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{\ell^{h_2}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\ell^{h_1}} = 1$!) – Das war ja schon die notwendige Bedingung dafür, dass es überhaupt einen Nichtabelschen Körper von ℓ-Potenzgrad mit $K_{p_1}^{\ell^{h_1}}.K_{p_2}^{\ell^{h_2}}$ als Kreisteil gibt. Man kann auch immer einen rein verzweigten Klk. von $K_{p_1}^{\ell^{h_1}}.K_{p_2}^{\ell^{h_2}}$ als Zweigkörper erhalten. – Ich schicke Ihnen jetzt mal die 2. Korr. meiner Annalen-Note zu. Vielleicht wird es Sie und auch Fw. interessieren, schon darüber orientiert zu sein. Dort hab' ich ja erst Zweigkörper vom Typ (ℓ, ℓ, ℓ^k) gewonnen, und nur bei sehr spezieller Wahl von $K_{p_1}^{\ell}.K_{p_2}^{\ell}$.

Wenn ich nichts anderes mehr schreibe, brauche ich die Korr. nicht mehr.

Das 3. Kap. der Note behält trotzdem seinen Wert, da es im 'verbreitetsten' Spezialfall von $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{\ell} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\ell} = 1$ die Gestalt der Einheitengruppe liefert. Vielleicht lesen Sie aber erst mal nur den Schluss der Einleitung, das 1. Kap. von Satz 1 ab; dann das 2. Kap., wo das wichtigste die 'Hauptirrealität'

$$r \neq \varrho^{XY} \sigma^{\ell} \text{ ist.} \tag{9}$$

(r Norm eines Primideals $\mathfrak{r}$ der erzeugenden Idealklasse $A = S_2^{-1} S_2^{S_1}$; ϱ und σ Idealpotenzen von $\mathfrak{r}$.)

Oder, wenn Sie mir das erst einmal glauben, dass (9) die notwendige und hinreichende Bedingung für die Erweiterbarkeit von $K^0 = K_{p_1}^{\ell^{h_1}}.K_{p_2}^{\ell^{h_2}}$ zu einem rein verzweigten Zweigkörper ist, so dürfen Sie jetzt gleich den Beweis lesen, dass (9) schon immer erfüllt ist, wenn $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{\ell} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\ell} = 1$. Den Beweis finde ich selbst wunderschön (hoffentlich Sie auch!). Ich bin darauf so stolz

wie damals bei der Auffindung der Einheit $\omega = \varphi^{XY}$ (vgl. Korr. S. 25 oben)[1)]

Zunächst schicke ich den Beweis einer auf S. 16 Mitte der Korr. erwähnten Irrealität voraus, die man, positiv gewendet, so ausdrücken kann:

Irrealität XY: I) Gilt $\alpha^Y = \beta^X$ und $(\alpha) = \mathfrak{j}^X$, so auch $\alpha = \gamma^X$.

II) Gilt $\alpha^Y = \beta^X$ und $\alpha = \mathfrak{j}^X$; $\beta = \mathfrak{j}^Y$, so gibt es ein gemeinsames γ, sodass $\alpha = \gamma^X$ und $\beta = \gamma^Y$. (Dies in belieb. Körpern $K^0 = K_1.K_2$, wo S_2 den zykl. Körper K_1 und S_1 den zykl. Körper K_2 invariant lässt.)

III) Haben K_1 und K_2 teilerfremde Diskriminanten, so gilt sogar $(\gamma) = \mathfrak{j}a$ mit rationalem a. Insbesondere ist also $\mathfrak{j}$ Hauptideal, und man darf $(\gamma) = \mathfrak{j}$ nehmen. (vgl. jedoch Beweis!)

(III) sagt mehr aus als Korr. 16 Mitte)

Beweis: I) $\alpha^{Xf_1} = 1$. $\alpha^{Yf_1} = \beta^{Xf_1} = 1$: $(\alpha^{f_1})^X = (\alpha^{f_1})^Y = 1$. $\alpha^{f_1} = a$ (rat.). Da aber $\alpha = \mathfrak{j}^X$: $(\alpha)^{f_1} = 1$. $a =$ Einheit: $a = 1$.

(Grundsätzlich wähle man bei allen Zahlen das Vorzeichen so, dass $N(\alpha) > 0$. [Natürlich ungerader Grad].)

Also $\alpha^{f_1} = 1$: $\alpha = \gamma^X$.

II) $\alpha = \gamma^X$; $\beta = \delta^Y$: $(\gamma^{-1}\delta)^{XY} = 1$: $\gamma^{-1}\delta = \alpha_1\alpha_2 \begin{cases} \alpha_1 < K_1 \\ \alpha_2 < K_2 \end{cases}$ (Beweisen Sie selbst!)

$(\gamma\alpha_2)^X = \alpha$; $(\gamma\alpha_2)^Y = \beta = (\delta\alpha_1)^Y$.

III) □□□ $\alpha = \gamma^X$; $\beta = \gamma^Y$: $\left\{ \begin{array}{ccc} \gamma^X & = & \mathfrak{j}^X \\ \gamma^Y & = & \mathfrak{j}^Y \end{array} \right\}$: $\gamma = \mathfrak{j}^k$, wo $k^X = k^Y =$ 1:

Jetzt habe ich aber etwas viel behauptet mit $\gamma = \mathfrak{j}a$: Es gibt ja irrationale invariante Ideale, nämlich die gebrochenen Potenzen der Diskriminantenteiler; aus diesen setzt sich also das k zusammen; das sind aber immerhin Ideale, die schon in K_1 oder K_2 liegen, und ist $K_1 = K_{p_1}^{\ell^{h_1}}$; $K_2 = K_{p_2}^{\ell^{h_2}}$, d.h., allgemeiner, sind die Diskr. von K_1 und K_2 Potenzen von p_1 und p_2, so sind $p_1^{1/\ell^{h_1}}$ und $p_2^{1/\ell^{h_2}}$ Hauptideale. Also stimmt in diesem Fall, dass $\mathfrak{j}$ Hauptideal.

Wie ich sehe, macht mein III)-Versehen nichts für den Beweis der Hauptirrealität aus. Selbst nicht für seine Übertragung auf bloss teilerfremde Diskriminanten $D(K_1)$ und $D(K_2)$. Dort lautet nämlich das Resultat so: Man muss einen Diskriminantenteiler von K_1 nehmen, der in K_1 Norm eines ganzen Hauptideals ist. Wenn dieser in der Hauptklasse für K_2 liegt, und umgekehrt eine Hauptidealverzweigung von K_2 in der Hkl. für K_1, so ist die Erweiterung von K_1K_2 unter Beibehaltung als maximaler Kreiskörper möglich und dann auch die Konstruktion des Zweigkörpers.

Ich komme jetzt zum Beweis der Hauptirrealität:

Angenommen:

$$r = \varrho^{XY}\sigma^{\ell}, \tag{1}$$

so ($f_\nu = f'_\nu f''_\nu$, wo $f'_\nu = 1+S_\nu+\cdots+S_\nu^{\ell-1}$ Bezeichnung. $f'_\nu = (S_\nu-1)^{\ell-1}+\ell I_\nu$)

$$\varrho = \mathfrak{r}^{X^{\ell-2}Y^{\ell-2}f''_1 f''_2-\ell Q}; \qquad \sigma = \mathfrak{r}^{I_2X^{\ell-1}f''_1 f''_2+QXY+I_1 f_2 f''_1} \tag{2}$$

für irgend welches Q (leicht nachzuprüfen: $r = \mathfrak{r}^{f_1 f_2} = \mathfrak{r}^{H_1XY+H_2\ell}$).

$\sigma^{f_2 f''_1} = \varrho_1$ ist eine Zahl aus $K_1^{(1)}$, Unterkörper ℓ^{ten} Grades von K_1

Also

$$\frac{\mathfrak{r}}{\varrho^{I_1\ell}} = \varrho_1^{f'_1-\ell I_1} = \varrho_1^{X^{\ell-1}} = \varrho^{XY}\tau^{\ell}, \text{ wo } \tau = \mathfrak{r}^{I_2X^{\ell-1}f''_1 f''_2+QXY} \tag{3}$$

Aus (3) folgt natürlich, dass τ^ℓ, also auch τ eine X^{te} Potenz. Anderseits folgt $1 = \varrho^{XY^2}\tau^{\ell Y} = \sqrt[\ell]{\varrho^{XY^2}}\tau^Y$. Dabei ist $\sqrt[\ell]{\varrho^{XY^2}}^{f_1} = 1$, also $\sqrt[\ell]{\varrho^{XY^2}}$ eine Potenz φ^{-X}. Nun haben wir $\tau^Y = \varphi^X$ und $\tau = \vartheta^X$, wo $\vartheta = \mathfrak{r}^{I_2X^{\ell-2}f''_1 f''_2+QY}$. Jetzt sehe ich aber nicht mehr, wie ich auf $(\varphi) = \vartheta^Y$ gekommen bin. Folgt natürlich noch nicht ohne weiteres aus $\varphi^X = \vartheta^{XY}$.

Ich gehe von (3) aus jetzt anders vor, so wie ich's F. K. Schmidt mitgeteilt habe; erhalte so aber nur einen vollständigen Beweis für $h_2 = 1$:

Durch Ausziehung der X^{ten} Wurzel aus (3) erhält man

$$\varrho_1^{X^{\ell-2}} = \varrho^Y\delta^\ell\alpha_2, \text{ wenn } \quad \tau = \delta^X; \quad \alpha_2 < K_2. \tag{4}$$

Dabei kann $\delta = \vartheta y_1^F$ ausfallen, wenn man einen aus K_2 hinzukommenden Faktor gleich weglässt, was sich dann nur bei α_2 bemerkbar macht. Vergleicht man die Idealzerlegung in (4), so hat man $(\varrho_1)^{X^{\ell-2}} = (\varrho)^Y\vartheta^\ell$, also:

$$y_1^{F\ell}\alpha_2 = (1), \text{ d.h.} \qquad \alpha_2 = \pi_1'^{-F}\varepsilon_2^H$$

(π'_1 Primteiler von p_1 in K_2, ε_2 Gr.-E. in K_2).

$(4)^{f_2} = (5)$ ergibt: $\varrho_1^{\ell^{h_2}X^{\ell-2}} = \delta^{\ell f_2}p_1^{-F}$ (also $F = \ell t + Ty$)

$p_1^t \cdot \sqrt[\ell]{(5)} = (6)$:

$$p_1^t\varrho_1^{\ell^{h_2-1}X^{\ell-2}} = N(\delta).$$

Jetzt benutze ich: $\mathfrak{r} < A$, also ϱ_1 genau X^{ter} Potenzrest mod p_2 ($\varrho_1 \equiv \alpha^X\gamma^{\ell^{h_2}}$, wo α kein L^{ter} Rest): Dann ist $\varrho_1^{\ell^{h_2-1}X^{\ell-2}}$ bestimmt schon kein Normenrest mod p_2, da das hier gleichbedeutend mit ℓ^{h_2} ter Potenzrest mod p_2. Ist aber p_1 selbst ℓ^{h_2} ter Rest mod p_2, so hat man also einen Widerspruch; denn dann steht links sicher keine Norm.

Also: für $h_1 = h_2 = 1$ gilt die Hauptirrealität schon immer, wenn nur $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_\ell = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_\ell = 1$, auch wenn wenigstens eine der Zahlen, etwa $h_2 = 1$.

Für beliebiges h_1, h_2 ist hier die Hauptirrealität vorläufig erst für den Fall bewiesen, dass ausserdem entweder $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{\ell^{h_2}} = 1$ oder $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\ell^{h_1}} = 1$. Den Rest des Beweises, dass schon $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{\ell} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\ell} = 1$ ausreicht, muss ich Ihnen vorläufig schuldig bleiben. – Den Beweis finde ich jetzt, auch abgesehen von seiner Unvollständigkeit, lange nicht mehr so schön. Das kommt, wenn man etwas selber "wunderschön" findet! Wie Zermelo sagt: wenn man etwas selber schön findet, ist es noch nicht fertig; erst wenn es einem trivial vorkommt, soll man es publizieren oder auch nicht mehr. Diesen nüchternen Standpunkt kann ich allerdings nun nicht teilen.

Aus (6) kann man auch nicht mehr herausholen; denn es könnte für $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{\ell^{h_2}} \neq 1$ gerade p_1^t gleichguter Potenzrest mit $\varrho_1^{\ell^{h_2-1}X^{\ell-2}}$ sein. Man kann aber auch nicht umgekehrt von (6) auf $r = \varrho^{XY}\sigma^{\ell}$ schliessen, wenn ϱ und σ Potenzen von $\mathfrak{r}$ bleiben sollen; denn schon, wenn man rückwärts auf die Gleichung (4) stösst, so kann sich dort in das ϱ schon eine Potenz von y_2 eingeschlichen haben.

Dass Ihnen der Genuss der schönen Italienreise verkürzt wurde, tut mir sehr leid. Hoffentlich sind Sie wieder ganz gesund. Sie müssen öfters eine kleine Erholungsreise machen.

Ringleb hat die Klage jetzt zurückgezogen. Trotzdem die Sache für mich günstig stand, habe ich noch die Zahlung der Kosten zugestanden. Ich konnte jetzt meine Zeit mit der Sache nicht verplempern, da ich viel zu arbeiten habe. Jetzt hab' ich nur noch Differenzen mit dem Rechtsanwalt von R., da dieser fast das Doppelte der gesetzlichen Summe haben will. Hab' aber beim Vergleich ausdrücklich nur die gesetzliche Summe zugebilligt. Das Sonstige können Sie sich von Nöbeling erzählen lassen. – Die "elegante Entschuldigung" hat jedenfalls nicht gereicht.

Die Werke von Zolotareff[2)] hab' ich mir vorläufig einmal bestellt. – Wie ich auf der D.M.V.-Tagung, ich glaube, von Nöbeling, hörte, sollte Radaković nach Graz kommen. Jetzt höre ich wieder, dass er zwar genannt war, aber nichts entschieden ist. Ich hatte nämlich einige Hoffnung auf Graz; jemand wollte mich auf die Liste bringen. Nun kann es natürlich sein, dass man augenblicklich nur Österreicher nimmt. – Es wär' für mich sehr schön gewesen; dann kämen wir auch öfters zusammen. Vielleicht hätten Sie dann überhaupt mal nach Graz kommen können. – Nun rechne ich aber nicht mehr sehr darauf. Sprechen Sie auch, bitte, sonst nicht davon! Furtwängler hat wohl auch keinen Einfluss dort?

Neulich erhielt ich einen Brief von Rédei. Er kommt jetzt um ein Auslandsstipendium ein, möchte von mir Universitäten genannt haben, wo er weiterstudieren kann. Werde ihm auch Wien nennen. Er scheint sich auch sehr einrichten zu müssen, weil er mit Frau und $2^1/_2$ jährigem Töchterchen reist, und in Wien ist es ja billiger als sonst wo. Er möchte gern "Wohnung" (1 Zimmer) mit Kost, "aber so, dass meine Gemahlin das Zimmer zusammenräumte und beim Kochen hälfe", möchte sich "ganz in eine Familie ein-

verleiben". Falls Sie eine solche Adresse in Wien wüssten, könnte ich sie ihm gleich mitteilen.

Mit herzlichem Gruss.

Ihr Noldi.

Zermelo lässt Sie grüssen.

Anmerkungen zum 09.10.1933

[1]Sh. [S14, S. 185].

[2]Schur hatte Scholz vorgeschlagen, Zolotarevs Werke ins Deutsche zu übersetzen. Dies stellte sich im nationalsozialistischen Deutschland allerdings als unmöglich heraus, wo es schon schwierig genug war, russische Autoren überhaupt zu zitieren.

4.29 23.10.1933, Scholz an Taussky, Postkarte

23. X. 33.

Liebes Fräulein Taussky!

Vielen Dank für Ihre Karte vom 20. X.! Ich habe Rédei Wien am meisten empfohlen, noch mehr als Marburg. Ich glaube auch, dass ihn das Leben hier zu teuer käme, wenn er mit Familie reist. Natürlich hab' ich ihm auch Freiburg vorgeschlagen.

Hoffentlich hat sich Furti wieder entkühlt! Er hat mir immer noch nicht das erbetene Zeugnis geschickt. (Ich hab' um Stipendium der Notgemeinschaft eingereicht.) Ob Sie ihn daran erinnern können? Oder ist das auf diesem Wege nicht angebracht? Spricht er überhaupt noch nett über mich? Oder hat er sich "verkühlt"? – Mitteilen wollte ich Ihnen immer noch, dass ich neulich eine Staatsexamensarbeit (Berlin) über Artinsche L-Reihen zu beurteilen hatte. Unter der benutzten Literatur war auch erwähnt: Artin-Vorträge über Klkth., "ausgearb. von Olga Taussky". Sind übrigens noch Exemplare geblieben? Schur hätte gern eins gehabt. Aber da muss ich wohl Magnus fragen?

– Der vermeintliche Druckfehler S. 3, Z. 7 ist keiner: Wegen der "Dreiecksrelation (1) kann $F_{\kappa\lambda}$ auf Funkt. $(S_1, \ldots, S_\lambda)$ reduziert werden. Freu' mich aber, dass Sie darauf achten. – Ihr venetianisches Bild hat auch meinem Schwager gut gefallen: Er stellte es gleich auf dem (eingebauten) Bücherschrank auf (in Gesichtshöhe). Passt sehr zur Tapete.

Viele herzliche Grüsse! Auch an Fw. und Hahn!

Ihr Noldi.

4.30 16.12.1933, Scholz an Taussky

Freiburg, 16. XII. 33.

Liebes Fräulein Taussky!

Jetzt hab' ich doch bewiesen (13. XII., 14. nachgeprüft), dass gegenseitiger Potenzrest von p und q auch hinreichend dafür ist, dass sich $K_p^{\ell^{h_1}} K_q^{\ell^{h_2}}$ zu einem Zweigkörper erweitern lässt (Typ $\ell^{h_1}; \ell^{h_2}; \ell^k$). Ich will Ihnen gleich den Beweis vorführen und wieder p_1, p_2 schreiben.

Wir hatten: Aus

$$r = \varrho^{XY}\sigma^{\ell} \quad \left| \begin{array}{lcl} \varrho & = & \mathfrak{r}^{X^{\ell-2}Y^{\ell-2}f_1'' f_2'' + \ell Q} \\ \sigma & = & \mathfrak{r}^{I_2 f_1'' f_2'' X^{\ell-1} + I_1 f_1'' f_2 - QXY} \end{array} \right. \tag{1}$$

folgt

$$\varrho_1^{X^{\ell-1}} = \varrho^{XY}\tau^{\ell} \quad \left| \begin{array}{lcl} \varrho_1 & = & \mathfrak{r}^{f_2 f_1''} \quad (\text{Norm nach } K_{p_1}^{\ell'}) \\ \tau & = & \mathfrak{r}^{I_2 f_1'' f_2'' X^{\ell-1} - QXY} \end{array} \right. \tag{2}$$

Dann

$$\varrho_1^{X^{\ell-2}} = \varrho^{Y}\delta^{\ell}\pi_1'^{\,T}\varepsilon_2^{H} \quad \left| \begin{array}{lcl} \delta & = & \mathfrak{r}^{I_2 f_1'' f_2'' X^{\ell-2} - QY} \cdot y_1^F \quad \left(\ell^{h_1-1} | F\right) \\ \pi_1' & & \text{Primteiler von } p_1 \text{ in } K_{p_2}^{\ell^{h_2}}. \quad F = -\ell^{h_1-1}T \end{array} \right. \tag{3}$$

Schliesslich durch Normbildung nach $K_1 = K_{p_1}^{\ell^{h_1}}$ und ℓ^{te} Wurzel:

$$\varrho_1^{\ell^{h_2-1}X^{\ell-2}} p_1^{t\ell^{n-1}} = N(\delta) = \delta^{f_2}. \tag{4}$$

Dies muss Normenrest mod p_2, also ℓ^{h_2}-ter Potenzrest mod p_2 sein. ϱ_1 ist nur X^{ter} P.R., also $\varrho_1^{\ell^{h_1-1}X^{\ell-2}}$ nur $X^{\ell-1}\ell^{h_2-1}$ ter Rest (gerade noch kein ℓ^{h_2} ter Rest). Dasselbe muss dann für $p_1^{\ell^{n-1}}$ $(t \sim 1)$ gelten, d.h. es muss genau $p_1^{\ell^n}$ erst ℓ^{h_2} ter Rest mod p_2 sein; und dann ist das auch der Fall.

Daraus folgt erst einmal $n > 0$, d.h. $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{\ell^{h_2}} \neq 1$.

Also ist unsere Aufgabe erledigt, wenn ausser $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{\ell} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\ell} = 1$ noch $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{\ell^{h_2}} = 1$ oder $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\ell^{h_1}} = 1$ gilt. [$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\ell} = 1$ wurde hier bei Normenrest wirklich verwendet.]

Wir betrachten jetzt den Fall, dass diese beiden Restsymbole $\neq 1$.

Neu! Wenn in $K_{p_1}^{\ell^{h_1}} \cdot K_{p_2}^{\ell^{h_2}}$ gilt: $r = \varrho^{XY}\sigma^{\ell}$(Resultat so auch in $K_1^{\ell^{h_1-1}} \cdot K_2^{\ell^{h_2}}$) so also

$$\psi = \varrho_1^{X^{\ell-2}\ell^{h_2-1}} p_1^{\ell^{n-1}} = N(\delta) \qquad [n \text{ wie vorher}]$$

Dann auch

$$\cdot\psi\cdots = N(\overline{\delta}) \quad \text{mit} \quad \overline{\delta} < K_{p_1}^{\ell^1}.K_{p_2}^{\ell^{h_2}}.$$

Denn

ψ ist Normenrest mod p_2. Auch mod p_1, da $(p_1^{\ell^{n-1}}) = (\pi_1^{\ell^n})$

in $K_{p_1}^{\ell}$ und $\pi_1^{\ell^n} = N(\pi_1) = \pi_1^{f_2}$ in $K_{p_1}^{\ell}.K_{p_2}^{\ell^{h_2}}$. (Einheiten sind immer Normenreste ausser für Diskr. Teiler) Auch Normenrest mod r, da ϱ_1 voll zerfällt. Also totaler Normenrest und daher Norm. (Gültiger Satz für relativ zykl. K.; s. Hasse Bericht II).

Bestimmt gilt daher

$$\psi = N(\overline{\delta}) \quad \text{mit} \quad \overline{\delta} < \check{K} = K_{p_1}^{\ell^{h_1-1}}.K_{p_2}^{\ell^{h_2}}.$$

(Ich nehme diesen Körper, weil in ihm der Primteiler y_2 von p_2 [...])

Etwas deutlicher: An sich ist die Sache so, dass die Ausziehung der Y^{ten} Wurzel aus γ^Y eindeutig bis auf j mit $j^Y = 1$. Das ist einmal $j = (\kappa_1) < K_1$, wo es nur Hauptideale gibt (wir brauchen immer nur mit ℓ-Klassen zu rechnen!), κ_1 läßt sich streichen. Ferner $j = y_2^G$, weil das auch invariant.

Liegt aber in $\check{K}$, kann daher zu $\check{\mathfrak{k}}$ geschlagen werden.

Nun $\check{\mathfrak{k}} = \mathfrak{r}^{\check{c}} \cdot \kappa$ mit $\kappa < \check{K}$, da $\mathfrak{r}$ erzeugende Idealklassen. Also $\gamma = \mathfrak{r}^c \cdot \kappa$ ersetzbar durch $\gamma = \mathfrak{r}^c$, weil das $\overline{\delta}$ nur um eine Zahl κ^Y aus $\check{K}$ verändert.

Gehn wir nun von (4) zu (3) rückwärts, so gilt jetzt

$$\begin{aligned} (3^a) \quad \varrho_1^{X^{\ell-2}} &= (\varrho\gamma^{-\ell})^Y \overline{\delta}^{\ell} \pi_1'^{T} \varepsilon_2^H \quad [\text{Verschiebung von } \gamma^{\ell Y}] \\ (3^b) \quad &= \overline{\varrho}^Y \overline{\delta}^{\ell} \pi_1'^{T} \varepsilon_2^H \quad \text{¡Gleichung in } \check{K}\text{¿} \end{aligned}$$

Nämlich: $(\varrho\gamma^{-\ell})^Y$ liegt mit den übrigen Faktoren in $\check{K}$, ist darum auch schon Y^{te} Potenz einer Zahl $\overline{\varrho}$ in $\check{K}$ (Hilbert Satz 90), und dabei ist dann

$\overline{\varrho}^Y = \mathfrak{r}^{HY}$, also $\overline{\varrho} = \mathfrak{r}^H \cdot y_2^R \cdot \check{\kappa}_1 \longrightarrow < K_1^{h_1-1}$ (kann darum fortbleiben)
↑
(sogar Relativnorm $K/\check{K}$ einer Y^{ten} Potenz von $\mathfrak{r}$)

Also $\overline{\varrho} = \mathfrak{r}^H y_2^R$

Nun aber

$$\overline{\varrho} = \varrho\gamma^{-\ell} \cdot \kappa_1 \qquad (\kappa_1 < K_1)$$

Also muss der p_2-Beitrag von $\overline{\varrho}$ in κ_1 stecken, wo er Potenz von π_2'. π_2' liegt sogar in $\check{K}_1 = \kappa_1^{\ell^{h_1-1}}$, kann also wieder aus $\overline{\varrho}$ rausgelassen werden. Also

$$\overline{\varrho} = \mathfrak{r}^H$$

Damit auch

$$r = \overline{\varrho}^{XY} \overline{\sigma}^{\ell} \quad \text{mit} \quad \overline{\varrho},\ \overline{\sigma} \quad \text{Potenzen von } \mathfrak{r}.$$

Wenn also $r = \varrho^{XY} \sigma^{\ell}$ *in* $K_1^{\ell^{h_1}} \cdot K_2^{\ell^{h_2}}$ *darstellbar* $(h_1 > 1)$*, so auch schon in* $K_1^{\ell^{h_1 - 1}} \cdot K_2^{\ell^{h_2}}$.

Damit ist vollständige Induktion gegeben.

Sollten Sie irgend einen Fehler finden, schreiben Sie mir bitte! Mir scheint aber jetzt nach sorgfältiger Prüfung die Sache ganz in Ordg. Es gibt tausend Fallen. Glauben Sie nicht, dass irgend ein Schritt gespart werden kann!

– Übrigens rechne ich von vornherein mit einem $\mathfrak{r}$, das in einer ℓ^m-ten Potenz Zahlideal ist. Und die Zahlpotenzen von $\mathfrak{r}$ sind immer als Zahlen mit positiver Norm gedacht! – Mir scheint der Beweis auch für $\ell = 2$ richtig zu sein, wenn man dort totale Positivität zugrunde legt. (Könnte man auch für $\ell > 2$). Ich muss das nochmal vergleichen.

Für Ihre letzte Karte noch vielen Dank! Schur liest seit längerem wieder. Das wird doch auch Fw. freuen?

Soeben ist als Sonntag-Weihnachtspaket meine Kreisklassenkörper-Note eingetroffen. Ich sende 1 Exemplar an Furtwängler gesondert, 4 an Sie, von denen das schönste (soweit ein Unterschied vorh.) für Sie bestimmt ist, die andern für Hahn, mit besten Grüssen, Menger und `[...]`

Tschebotarjow hat mir die Werke von Solotarjow geschenkt[1)]. Werde die Idealtheorie (200 S) `[...]`

Anmerkungen zum 23.10.1933

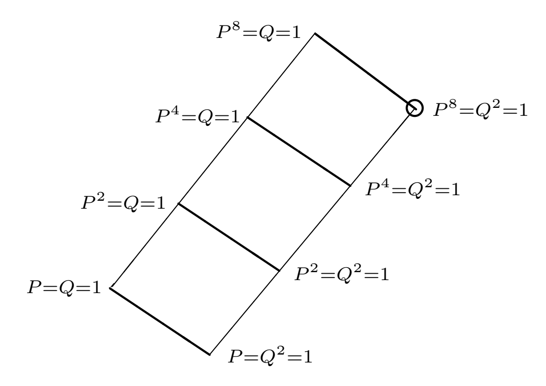
[1]Scholz hatte die gesammelten Werke Zolotarevs offenbar über Tschebotarjow bestellt; vgl. den Brief vom 09.10.1933.

4.31 o. Datum (1934?), A. Scholz an Furtwängler, Fragment

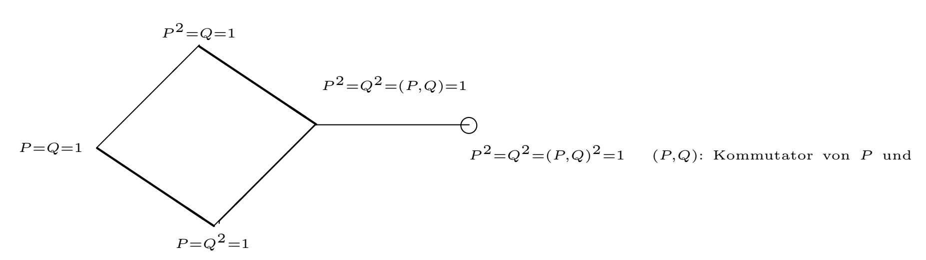
Das will ich gleich an dem Beispiel[1)] $P^8 = Q^2 = \mathcal{E}$; $QPQ = P^Q = P^5$ erläutern, das Sie mir durch Fräulein Taussky stellten:

Ich gebe meine Konstruktion an und zeige dann, dass es auch im wesentlichen die einzige ist, wenigstens dann, wenn man mit einem Minimum von verzweigten Prim$\binom{\text{idealen}}{\text{(zahlen)}}$ auskommen will.

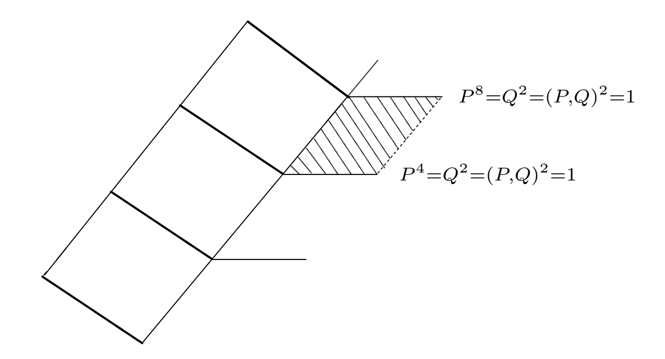
Die gegebene Gruppe lässt sich relativ zusammensetzen aus der Abelschen Gruppe $P^8 = Q^2 = \mathcal{E}$ und der Diedergruppe:



und



Zusammensetzung:



Aus dem schraffierten Parallelogramm:

$P^8=Q^2=(P,Q)=1$ $\quad$ $P^8=Q^2=(P,Q)^2=1$

$P^4=Q^2=(P,Q)=1$ $\quad$ $P^4=Q^2=(P,Q)^2=1$

ist nun die "Diagonale" zu bilden, die aus dem ganzen Parallelogramm das durch die Relationen $P^8 = Q^2 = (P,Q)^2 = 1$ definiert ist, durch Hinzufügung der Relation $P^4 = (P,Q)$ entsteht. [Während die beiden Seiten die Rel. $\left\{\begin{array}{c} P^4 = 1 \\ (P,Q) = 1 \end{array}\right.$ haben.]

Jetzt braucht man nur die zu $P^8 = \mathcal{E}$ und $Q^2 = \mathcal{E}$ gehörigen zyklischen Körper passend zu wählen. Zu $P^8 = \mathcal{E}$ einen K_p^8, z. B. K_{17}^8, den reellen Unterkörper der 17ten Ew. Zu $Q^2 = \mathcal{E}$ dann einen Körper $K_q^2 = K(\sqrt{q})$, wo nur $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, damit der Diederkörper existiert. Wünscht man den ganzen Körper reell, so muss $q > 0$ und $\left(\frac{p}{q}\right)_4 = \left(\frac{q}{p}\right)_4$ sein. Also z. B. $p = 17$, $q = 53$.

Wünscht man die Kreiskörper noch reell, den Diederkörper aber, und damit auch den gesuchten Körper imaginär, so wähle man $\left(\frac{p}{q}\right)_4 = -\left(\frac{q}{p}\right)_4$, also z. B. $p = 17$, $q = 13$. – Schliesslich schon der Kreiskörper imaginär für $q = -19$. – Für K_{41}^8 $(p = 41)$ Umkehrung der Fälle.

Variationen der Konstruktion erhält man, indem man beim Diederkörper in $K(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ einen Führer nimmt, was aber hier nicht nötig ist. Man darf auch p und q durch zusammengesetzte zueinander teilerfremde Zahlen ersetzen. (Die Teilerfremdheitsbedingung muss erfüllt sein, wenn der Diederkörper eine zum Kreiskörper prime Relativdiskriminante haben soll.) – Die Hauptsache ist, dass wirklich $p \equiv 1 \bmod 8$ (oder $p = 32$); denn nur dann ist p

auch wieder als Führer in $K_p^4 \cdot K(\sqrt{q})$ zu brauchen. – Also ist selbst die Aufspaltung, die ich meiner Dissertation; 2. Teil, Heid. Akad. Ber., Kap. 2 Anfang machte. Körpertheoretisch motiviert, weil sich der Körper mit der gegebenen Gruppe $P^8 = Q^2 = P^4(P,Q) = 1$ auch zu einem Körper mit der aufgespaltenen Gruppe $P^8 = Q^2 = (P,Q)^2 = 1$ erweitern lässt.

Wissen Sie etwas darüber, ob die Nachfolge von Rella schon bestimmt ist? Ich sollte einmal in Graz vorgeschlagen werden, habe aber indessen nichts mehr gehört (seit letzten Weihnachten). Es würde mich natürlich sehr freuen, wenn noch die Hoffnung besteht.

Mit den besten Grüssen, auch an Fräulein Taussky, und vielem Dank im voraus

Ihr ganz ergebener

Arnold Scholz.

Anmerkungen zum Brief von 1934

[1]Diese Gruppe taucht auf der Postkarte von Scholz an Taussky vom 3. Januar 1934 auf. Die Stelle in Graz wurde von Scholz erstmals in seinem Brief vom 9.10.1933 erwähnt.

Die Grüße an Taussky legen nahe, dass der Brief an jemanden in Wien adressiert war, also vermutlich Furtwängler. Dieser hatte Scholz wohl gebeten, ihm seine Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe an diesem Beispiel einer 2-Gruppe zu erklären.

4.32 03.01.1934, Scholz an Taussky, Postkarte

3. 1. 34.

Liebes Fräulein Taussky!

Vielen Dank für Ihre Neujahrswünsche und Ihre Karte vom 16. 12.! Wünsche Ihnen ebenfalls ein frohes Neues Jahr! Der explizite Körper mit $P^8 = Q^2 = \mathcal{E}$; $QPQ = P^5$ stimmt[1)].

Haben Sie den Schluss meiner Einleitung (Ann. 109, S. 165) gelesen? Da haben Sie meine Gruppensymbolik. Welches die Gruppenelemente sind, geht erst aus den jeweiligen definierenden Relationen hervor und steckt noch nicht im Namen der Gruppenelemente. Es ist dies sehr praktisch beim Übergang von Unterkörper zu Oberkörper, und schliessl. bewirkt ja eine Substitution des Oberkörpers auch eine solche im Unterkörper. – Mit den unabh. D-Zerf. ist's so am einfachsten: Faktorgr. $\prod q_\zeta^a / \{q^2, D\}$, wo $q_\zeta | D$, ist eine Gruppe vom Typ $(2, 2, \ldots, 2)$ mit $\lambda - 1$ Erz. Jedem El. der Faktorgr. entspr. eine D-Zerf. u. umgek. – Ihr Bild hängt jetzt in flachem Goldrahmen an der Wand.

Herzlichen Gruss. Ihr Noldi.

Vielen herzlichen Dank für Ihren lb. Brief und glückliches 1934!

Ihre Eli Korrodi

Anmerkungen zum 03.01.1934

[1]Scholz hatte Furtwängler ein Beispiel seiner Konstruktion geschickt.

4.33 11.02.1934, Scholz an Taussky

11. 2. 34.

Liebe Oli!

Vielen Dank für Ihren Brief, den ich heut' gleichzeitig mit der Nachricht bekommen hab', dass ich Onkel geworden bin! Eli hat einen kleinen Nicòla bekommen. Gut, dass ich den Brief noch nicht abgeschickt hatte, und schön, dass ich auch nichts zu ändern brauch'. Es freut mich sehr, dass Sie meine neuen Beweise so genau studieren. Anscheinend ist das auch sehr nötig, wie Sie aus meinen vorangeschickten, wieder halb verunglückten Darlegungen erkennen, wo ich von einem Fehler in den andern zu stürzen drohte, ohne zwar vollkommen an den Klippen zu zerschellen. Scheusslich, wenn man so an $\ell > 2$ und $\zeta_\ell \not< K_0$ gewöhnt ist und nun plötzlich gezwungen ist, das auf $\ell = 2$ zu übertragen[1)]! Ich würde schliesslich in der Beweisführung ganz unsicher werden, wenn ich nicht wüsste, dass Sie alles genau nachprüfen. (Sie sind also im obigen Bild der Anker.) Darf ich Ihnen dann am Schluss der kommenden Note meinen Dank für die sorgfältige Prüfung meiner Beweise aussprechen?

Zu Ihrem Referat (besten Dank!) möchte ich bemerken, dass es zwar sehr lang ist, aber doch das Wesentliche trifft. Einen Fehler haben Sie allerdings bei der 'hinreichenden Bedingung für den Typus $(\ell, \ell;\, \ell^k)$' gemacht: Dass $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_\ell = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_\ell = 1$ schon genügt, kommt erst in meiner jetzigen Note. In I hab' ich dies Resultat erst für den Spezialfall, dass y_1 in der Grundkl. A liegt, also $\mathfrak{r} = y_1$ gesetzt werden kann (vgl. Schluss von Kap. 2). Und dass sich dieser Spezialfall wirklich erreichen lässt. Könnten Sie das beiden an Stelle $\boxed{\text{Zeile 6 – 4 von unten auf S. 1}}$ anbringen? Dann brauchten Sie am Schluss der 6.-letzten Zeile des Referats nur $\boxed{\text{mit } r = p_1}$ anstelle: $\boxed{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_\ell = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_\ell = 1}$ zu schreiben.

Zu Ihren numerischen Fragen:

1) Der absolute Klk. $\overline{K}$ von $K = P(\sqrt{13}, \sqrt{17})$ ist imaginär. $\overline{K} = K(\sqrt{\varepsilon})$ für $|q| = 4n+1$ ist $K(\sqrt{|q|})$ reell, also *der* Körper $K(\square\square\square\sqrt{\varepsilon q})$ zum Führer $|q|$ imaginär. Ist aber der Führer $q = 4n - 1$ (q immer pos. Primzahl), so $K(\sqrt{-q})$ imag.; $K(\sqrt{-\varepsilon q})$ reeller Diederkörper, aber nicht zu brauchen, wenn ich mich recht erinnere, für die Fw. sche Gruppe der Odg. 16. Hab' ich was anderes behauptet? [Übrigens ist ε Einheit].

2) 'D-Zerfällung' heisst jede Zerlegung von D in Diskriminantenfaktoren (ohne Rücksicht auf quadr. Reste, was Rédei '2. Art' nennt); also $65 = (+5) \cdot$

(+13); $21 = (-3) \cdot (-7)$; $-20 = 5 \cdot (-4)$; $\pm 40 = 5 \cdot (\pm 8)$; $\pm 24 = (-3) \cdot (\mp 8)$. (Alle Typen $\lambda = 2$).

3) Wenn die im Institut eingehenden Separata wirklich aufgehoben werden und meine Dissertation noch dabei ist, geben Sie bitte die jetzige Note auch dazu!

Wie geht es Ihnen so und wissenschaftlich? Haben Sie noch mit Hilbert-Werken zu tun? Wie stehts mit Stipendium? Falls nein: soll ich mal mit Hasse sprechen, wenn ich ihn im März besuche? Er hat Beziehungen zu Mordell in Manchester. Auch Frl. Noether schreib' ich nächste Woche und kann sie bitten, sich gelegentlich Ihrer zu erinnern.

Herzlichst Noldi.

Etwas[1] muss ich Ihnen noch beichten: Ich habe am 2. II. die Entdeckung gemacht, dass die Hauptirrealität (9) meiner Annalen-Note[2)], so wie sie dasteht, nur für die Konstruktion eines Zweigkörpers vom Typ $(2^{h_1}, 2^{h_2}; 2)$, aber noch nicht $(2^{h_1}, 2^{h_2}; 2^k)$ massgebend ist; wenn nämlich

$$\left(\frac{\varrho^{XY}}{q}\right)_{\ell^k} = 1; \qquad \left(\frac{r}{q}\right)_{\ell} = -1$$

gleichzeitig gelten soll, darf ja, wie dasteht, $\sqrt[\ell]{r}$ nicht in $P(\sqrt[\ell^k]{\varrho^{XY}})$ enthalten sein, und das bedeutet:

$$(9)^k \qquad r^{\ell^{k-1}} \neq \varrho^{XY} \sigma^{\ell^k}.$$

(Oder: $r \neq \varphi \cdot \sigma^{\ell}$, wo $\varphi^{\ell^{k-1}} = \varrho^{XY}$)[2]

Tatsächlich ist $(9)^k$ i. allg. schärfer als (9): Man darf zwar die ℓ^{k-1}-te Wurzel ausziehen; aber es gibt Zahlen, die erst in ℓ^{ter} Potenz XY^{te} Potenzen von Zahlen ϱ sind, z. B. die Mitteleinheiten v.

Nun macht das aber für $\ell > 2$ beim Beweis der Gültigkeit der Hauptirrealität garnichts; sie ist in der Form $(9)^k$ mit denselben Worten zu beweisen, und der Beweis in Kap. 3 lässt sich entsprechend abändern.

Das Gesamtresultat für $\ell > 2$ lautet wie im Zusatz angekündigt:

> *Gegenseitiger ℓ^{ter} Potenzrest von p_1 und p_2 ist notwendig und hinreichend f. d. Konstr.*

Für $\ell = 2$ lauten die Bedingungen:

a) gegenseitiger quadratischer Rest für $(2^{h_1}, 2^{h_2}; 2)$

[1] Randnotiz: *Warum haben Sie das noch nicht bemerkt?*
[2] undeutlich

b) □□□ $\varepsilon_1 = \frac{t+u\sqrt{p_1}}{2} \equiv \alpha^2\ (p_2)$ für *reellen* Zweigk. $(2^{h_1}, 2^{h_2};\ 2)$.

c) gegenseitige biquadr. R. p_1, p_2 für Zweigkörper $(2^{h_1}, 2^{h_2};\ 2^k)$ bei $k > 1$

b) reicht also nicht, wie irrtümlich im Kap. 4 angegeben, sondern muss zu c) verschärft werden. [b) bedeutet nur $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4$]

Ich will nur nochmal das Beweisgerippe angeben, wie es jetzt für die Hauptirrealität aussehen muss:
($\ell = 2$ eingeschlossen, ohne totale Positivität gültig, also reeller Zweig)

$\boxed{\varepsilon_1 \text{ hier Gr.-E. von } K_1 = K_{p_1}^{\ell^{h_1}}}$

Angenommen:

$$\begin{array}{rcrcll}
 & & r^{\ell^{k-1}} & = & \varrho^{XY}\sigma^{\ell^k} & \textit{Fall } \ell = 2 \\
 & & & & & \text{Faktoren in eckigen Klammern} \\
 & & & & & \text{Kommen } \texttt{[...]} \\
 & & \varrho_1^{\ell^{k-1}}X^{\ell-1} & = & \varrho^{XY}\tau^{\ell^k} & \qquad\downarrow \\
\sqrt[x]{} & : & \varrho_1^{\ell^{k-1}}X^{\ell-2} & = & \varrho^{Y}\delta^{\ell^k}\pi_1' \ \cdots & \cdot\left[\left(\sqrt[X]{\varepsilon_1^2}\right)^{2^{k-1}}\right. \\
\text{hoch } f_2 & : & \varrho_1^{\ell^{k-1+h_2}}X^{\ell-2} & = & N(\delta)^{\ell^k}p_1 \ \cdots & \left[(\quad)^{2^{k-1}+\texttt{[...]}}\right. \\
\sqrt[\ell^k]{} & : & \varrho_1^{\ell^{h_2-1}}X^{\ell-2} & = & N(\delta)p_1^{-t} \ \cdots & \cdot\left[(\quad)^{2^{h_2-1}\texttt{[...]}}\right. \\
 & & \varrho_1^{\ell^{h_2-1}}X^{\ell-2}p_1^{\ell^{n-1}} & = & N(\delta') & \text{, wenn bewiesen,} \\
 & & & & & \text{dass } \left[\sqrt[X]{\varepsilon_1^2}\right] \\
 & & & & & \text{selbst Norm.}
\end{array}$$

(Dann so weiter, wie schon mitgeteilt.)

Hierbei musste, damit der linke Ausdruck überhaupt Normenrest mod p_2 sein kann, n im Exponenten von p_1 so ausfallen, dass p_1 in K_2 in Faktoren ℓ^n-ten Grades zerfiel. $n > 0$ für $\ell > 2$ ist klar. Dagegen ist für $\ell = 2$ auch $n = 0$ zulässig, da ja $p_1^{2^{-1}} = \sqrt{p_1}$ in K_1 liegt. Wenn nun $h_2 = 1$, also sicher $n = 0$, so könnte gut $\varrho_1^{\ell^{h_2-1}}X^{\ell-2}p_1^{\ell^{n-1}} = \varrho_1\sqrt{p_1}$ Norm sein, wenn $\sqrt{p_1} \not\equiv \alpha^2 \bmod p_2$. Wählen wir aber $\sqrt{p_1} \equiv \alpha^2 \bmod p_2$, also $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = 1$, so ist mit ϱ_1 auch $\varrho_1\sqrt{p_1}$ kein N.R. mod p_2. Für $h_1 = 1$ ist ferner $\sqrt[X]{\varepsilon_1^2} = \varepsilon_1\sqrt{p_1}$, also qu.R., d.h. N.R. mod p_2. [wenn auch $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4 = 1$]

Hiermit ist gezeigt, dass für Zweigk. $(2, 2;\ 2^k)$ genügt: $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4 = 1$. Dass das für $k > 1$ auch notwendig, zeigt folgende Rechnung:

Für $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4 < 2$ ist nach Rédei und mir die Klassenzahl von $P(\sqrt{p_1 p_2})$ im engeren Sinne nicht durch 8 teilbar. (Erst einmal: Fall $P(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2})$ *reell.*)

					abs. Klz.	unverzw. Klz.
A)	$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4 = -1$	:	$\left(\frac{\varepsilon_1}{y_2}\right) = +1$	:	$h = 4$	$\widetilde{h} = 4.$
B)	$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = -\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4$	:	$\left(\frac{\varepsilon_1}{y_2}\right) = -1$	:	$h = 2$	$\widetilde{h} = 4.$

(Wie aus meiner Nichtpellschen Note folgt, die nicht wie urspr. gedacht in der Bln. Akad. erscheinen wird, sondern in der Math. Z.)

B): Der Zweigkörper vom Typ $(2,2;\,2)$, ein Diederkörper, ist schon imaginär, also nicht erweiterbar zu einem $(2,2;\,4)$.

A): Die Klassenzahl von $P(\sqrt{p_1},\sqrt{p_2})$ ist nur 2, weil 4 die von $P(\sqrt{p_1p_2})$ ist. Also kann man $\mathfrak{r}^2 = \varrho$ bestimmen, wo $\mathfrak{r}$ in der Grundkl. Die Norm von ϱ in $P(\sqrt{p_1p_2})$ kann auf die Gestalt $x + y\sqrt{p_1p_2}$ gebracht werden, wo $x^2 - p_1p_2y^2 = r^2$ das Quadrat der absoluten Norm von $\mathfrak{r}$ ist. Dann ist bei passendem Vorzeichen

$$x + y\sqrt{p_1p_2} = \left(r_1\sqrt{p_1} + r_2\sqrt{p_2}\right)^2,$$

wo

$$x = r_1^2p_1 + r_2^2p_2, \qquad y = 2r_1r_2.$$

(Dies folgt einfach aus der Unverzweigtheit $\begin{matrix} K^2 & / & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(\sqrt{p_1},\sqrt{p_2}) & / & P(\sqrt{p_1p_2}) \end{matrix}$: es muss sich $K^2 = K(\sqrt{\alpha})$ erzeugen lassen, wo α keine Quadratzahl, aber Idealquadrat ist; Da aber in K für unsern Fall A) $N(\varepsilon) = -1$ ist, so □□□ $\alpha = \varrho^2$. Und zwar hat □□□ ϱ auch wirklich die Form $r_1\sqrt{p_1} + r_2\sqrt{p_2}$, (Entschuldigen Sie, bitte, die Unordnung!)

□□□

Einfach: $K^2 = K(\sqrt{p_1}) = K(\sqrt{p_1}\cdot(a + b\sqrt{p_1p_2})) = K(a\sqrt{p_1} + bp_1\sqrt{p_2})$. Diese Zahl braucht dabei nicht durch $\sqrt{p_1}$ teilbar zu sein; man kann b mit Nenner p_1 wählen.

Diese Resultate haben auch schon Rédei, Dirichlet (?) u.a. ..

Hat man jetzt $\varrho = r_1\sqrt{p_1} + r_2\sqrt{p_2} = \mathfrak{r}^2$, so gilt:

$$\varrho^{XY} = \frac{\varrho^{1+S_1S_2}}{\varrho^{S_1+S_2}} = \frac{-(r_1\sqrt{p_1} + r_2\sqrt{p_2})^2}{-(r_1\sqrt{p_1} - r_2\sqrt{p_2})^2} = \frac{(r_1\sqrt{p_1} + r_2\sqrt{p_2})^4}{(r_1^2p_1 - r_2^2p_2)^2\ (\leftarrow\, = r^2)}$$

Also

$$\boldsymbol{r^2 = \varrho^{XY}(r_1\sqrt{p_1} + r_2\sqrt{p_2})^4}.$$

Also Hauptirrealität für $(2,2;\,2^\kappa)$ nicht mehr erfüllt.

[Deutlicher: $\varrho^{XY} = \dfrac{\varrho^{2(1+S_1S_2)}}{N(\varrho) = r^2} = \dfrac{\varrho^4}{r^2}$. $\boxed{r^2 = \varrho^{XY}\varrho^4}$!]

Ebenso liegt die Sache, wenn man etwa $P(\sqrt{-p_1})$ imaginär wählt, also $p_1 \equiv -1\,(4)$. Es muss dann $p_2 \equiv +1\,(4)$ sein.

Somit ist $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_4 = +1$ notwendig und hinreichend für Konstr. von Zweigkörpern $(2,2;\,2^k)$. Ob auch hinreichend für $(2^{h_1},2^{h_2};\,2^k)$, muss ich nochmal nachprüfen.

An Hasse schreib' ich noch wegen der Korrektur und des Umstellens der Anmerkungen. Sie brauchen dann also bloss den Haupt-Korrekturabzug mit Manuskript als *Geschäftspapiere 250 gr.* (=Drucksache 250 gr.) an Hasse zu schicken.

Viele herzliche Grüsse.

Ihr Noldi.

Bemerkung zu S. 6 unten:

Es ist darauf zu achten, dass unser Ideal $\mathfrak{r}$ zu p_1 und p_2 teilerfremd ist. Nur dann hätte man die Gültigkeit der Hauptirrealität erwarten können. Für p_1 gilt sie ja z.B. schon nicht mehr bei $k = 1$. Nämlich es ist

$$p_1 = 1^{XY} \cdot (\sqrt{p_1})^2\,.$$

Aber wenn man p_1 durch r ersetzt, wo $\frac{p_1}{r}$ Norm einer Zahl in K°, gilt sie selbstverständlich, wenn auch $(r, p_2) = 1$.

Insofern ist auch die Bemerkung 2. auf S. 176 meiner Annalen-Note nicht ganz korrekt: Gilt die H.I. für $\mathfrak{S} = \tau\mathfrak{r}^F$, so brauchte sie nicht für $\mathfrak{r}^F$ zu gelten, wenn das eine Potenz von y_1 oder y_2; denn für y_1 ist schon $y_1^H = 1$, wenn $H \equiv 0\ (X)$ statt mod f_1X, mod f_2Y. Es brauchte daher für $p_1 = \mathfrak{r}_1^{XY}\mathfrak{r}_2^{\ell}$ nicht zu gelten:

$$\mathfrak{r}_1 = y_1^{X^{\ell-2}Y^{\ell-2}+\ell Q}; \quad \mathfrak{r}_2 = y_1^{\cdots - QXY}; \quad \begin{cases} \mathfrak{r}_1 = (\varrho) \\ \mathfrak{r}_2 = (\sigma), \end{cases}$$

sondern man kann garnichts über den Exponenten R_1 von $\mathfrak{r}_1$ aussagen ($\mathfrak{r}_1 = y_1^{R_1}$) als $R_1 \equiv 0\,(\mathfrak{M})$, wo $\mathfrak{M}$ Idealklordg.
Es kann also sein, dass man bei $\mathfrak{S} = \tau\mathfrak{r}^F$ keinen simultanen Exponenten R_1 für τ und $\mathfrak{r}^F$ hat und deswegen eine Irrealität für $\mathfrak{S}$ herauskommt.

Demnach besagt die Gültigkeit der Hauptirrealität im Falle $\mathfrak{r} = y_1$ (Kap. 3) etwas *mehr* als die Konstruierbarkeit eines Zweigkörpers. – Und für $\ell = 2$ ist sie bei $k = 1$ *nur* richtig für $r \neq p_1, p_2$. (Diederkörper muss es ja geben!)

Anmerkungen zum 11.02.1934

[1]Diese Art von Fehler ist in der Geschichte der Mathematik häufig aufgetreten. Der Satz von Grundwald war für $\ell = 2$ falsch, und eine ganze Reihe anderer Mathematiker haben in ähnlichen Situationen ähnliche Fehler gemacht. Der Scholzsche Beweis der Einbettbarkeit zyklischer 2-Erweiterungen in größere zyklische Erweiterungen enthält ebenfalls einen Fehler, den Richter zuerst bemerkt hat. Der Beweis von Schafarewitsch, wonach jede 2-Gruppe eine Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$ ist, ist ein weiteres berühmtes Beispiel einer solchen Lücke.

[2]Es geht um Gleichung (9) aus [S14].

4.34 17.03.1934, Scholz an Taussky, Postkarte

17. III. 34.

Liebes Fräulein Taussky!

Heute erhielt ich eine Karte von Hasse wegen unserer 2. Korr. Sie auch? Sind Sie einverstanden, dass ich die Korr. sofort nach Erhalt korrigiert an Hasse schicke, ohne Ihre Korr. abzuwarten? Sonst kriegen nämlich die Verf. i. allg. keine zweite Korr. Und ich glaube, ich werde es auch in Ihrem Sinne machen. Wenn Sie jedoch wollen, dass ich erst Ihre Korrekturen sehe, ehe ich meine (die Hauptkorr.) an Hasse weiterschicke, schreiben Sie mir, bitte, umgehend; denn wenn ich morgen noch die Korr. von W.d.G. zugeschickt bekomme und Mittw. nachm. keine Karte von Ihnen in *Freiburg*, Kybfelsenstr. 9 vorfinde bei meiner Rückkehr vom Arbeitsdienst, schicke ich die Korr. an Hasse ab, weil er sie möglichst noch 22. haben will.

Meine Karte vom 2. III. haben Sie erhalten? Ich will jetzt mal durchproben, ob $K_{181}^{9} \cdot K_{7}^{3}$ der Hauptirrealität genügt. 7 und 181 sind gegs. kubischer Rest, aber 7 kein 9ter Potenzrest mod 181. Ich hoffe noch mit genauso erträglichen Rechnungen auszukommen wie bei unsern kubischen Körpern. – Am 23. reise ich nach Bln. (Badensche 54). 25. ist Kindtaufe. Ich Patonkel[1)]. Bleibe da bis 9./15. April. Wie ist es mit Amerika? Werden Sie nächsten Winter hingehen?

Viele herzliche Grüsse. Ihr Noldi.

Anmerkungen zum 17.03.1934

[1]Es geht um die Taufe von Scholz' Neffen Nikola Korrodi

4.35 24.03.1934, Scholz an Taussky

Bln. 24. III. 34.

Liebes Fräulein Taussky!

Vielen Dank für Ihren lieben Brief, den ich gestern abend bei der Ankunft vorfand. Die Korrektur an Hasse (Nice, poste restante) ist soeben abgegangen. Hab' sie gestern auf der Bahn gelesen (vorgestern bekommen). Bin jetzt sehr arbeitsfreudig und erledige alles gleich. Entschuldigen Sie, dass ich Ihre Adresse nicht vollständig angegeben; hätte die Post allerdings trotzdem gleich finden können.

Textlich verbessert hab' ich nur:

S. 20/29: $K_0 \to \underbrace{P, \quad [1, \mathfrak{d}, \ldots, \mathfrak{d}^{n-1}] \to}_{\text{was Hasse rot vermerkt hatte}} [1, \mathfrak{d}, \mathfrak{d}^2]$

S. 24, Z. 11 v.u.: Auftreten→Aufheben→ (der Primteiler)

S. 34, Anm. 13, Z. 2 v.u. Dass dieser Typus *dann* tatsächl. auftr.

S. 38 zwischen (14) und (15): $f_3 \sim \boldsymbol{Y}^{\varrho_2+1} \cdots$

S. 40 oben: Die *letzte* Voraussetzg. dieses Satzes *ist* ....

Sonst nur grammatische, orthographische, satztechnische Fehler und Er-gänzung fehlender Seitenzahlen.

Ihren Namen in der Überschrift wollte ich schon bei der 1. Korr. in Taussky verbessern; anderseits gilt ß und ss als gleichwertig, wo im Deutschen **ß**[1] stünde; darum hab' ich gewartet, was Sie machen.

Ihr Referat über meine grüne Note[1)] ist sehr gut zu verstehen, vielleicht daraufhin auch meine grüne Note selbst. Zeile 17 habe ich zu bemerken, dass E die ganze Einheitengruppe schon ist; die ℓ^{te} Potenz *jeder* Einheit liegt schon in H. Das lässt sich ja leicht korrigieren. Sonst ist alles richtig. Pollaczek überflüssig.

Der Normalteiler mit grösster Abelscher Faktorgruppe ist doch die Kommutatorgruppe; also ist der Burnsidesche Satz genau dasselbe wie der Satz von Burnside.

In Frankfurt begrüsste mich Magnus mit Moufang auf meiner Durchreise. Wir tauschen dann immer unsere mathematischen Neuigkeiten aus. Von Norddeutschland hört man ja in Fbg. so wenig. Magnus kommt erst in den Sommerferien ins Dozenten-Arbeitslager. Jetzt kein Platz. Ich war jetzt hauptsächlich mit Handwerkern zusammen. Am 23. II. hab' ich meinen

[1] Sütterlin-sz

Assistentenstelle definitiv aufgegeben, allerdings ohne schon ein Stipendium zu haben. Aber ich wollte auf keinen Fall mehr Assistent bei D.[2)] bleiben. Da D. in keinem günstigen Ruf steht, kann mir das nichts schaden, und ich werde schon irgend[wo] zu was kommen. Im Sommer bleib' ich jedenfalls in Freiburg.

Ich wohne da im Günterstal so schön ruhig und beschaulich in frischer Luft, brauch' nur zweimal in der Woche in die Stadt rein zum Kolleg, dass ich sicher viel zu produktiver Arbeit und Literatur-Lesen kommen werde. Im Winter geh' ich vielleicht mal November-Dezember nach Bln., um über Klassenkörpertheorie vorzutragen. Lass mich dann von Freiburg aus beurlauben. Will mit Schur darüber sprechen. Er hat ja jetzt im Winter Idealtheorie gelesen, und ich reflektiere dann auf seine Schüler, die im Anschluss daran diesen Sommer sein Seminar besuchen. Bleibe entweder den ganzen Winter in Bln. oder geh' dann noch mal nach Schweden, wo es sich auch mal lohnte, die Klasskth. zu verbreiten. Es lebt sich dort billig, ich kenne Nagell in Uppsala, Schur kennt Marcel Riess in Lund und vielleicht wäre Schweden überhaupt was für mich. Eigene Leute haben sie ja nicht, sondern sind auf Norweger, Finnen, Deutsche angewiesen. In Deutschland scheint mir alles sehr langsam voranzugehen. F.K. Schmidt ist noch nicht einmal berufen, auch noch nicht Hasse nach Göttingen. – Sollte ich mal in Verlegenheit geraten, so würde mich Frl. Noether auch mal nach Amerika einladen, was mir allerdings sehr wenig liegt; aber sie hatte es mir ja schon 1932 angeboten. Schweden dagegen sehr. Ich bin jetzt so froh, dass ich frei bin.

Wenn Sie im Herbst nach Amerika fahren, besuchen Sie mich, bitte, mal auf einige Tage in Fbg! Im September? Denke, dass ich zweite Hälfte Sept. zu Haus bin; Könnte mich jedenfalls darauf einrichten, wenn ich weiss, wann Sie kämen. Es ist kein grosser Umweg nach Hamburg.

Viele herzliche Grüsse

Ihr Noldi.

Heute, 25. III. 13^{h} taufe ich meinen Neffen Nikola

Die Hauptirrealität heißt ja so, weil man daran ganz irre werden kann. Schreibe bald mehr darüber.

Anmerkungen zum 17.03.1934

[1]Der Artikel [S7] wurde in den Berichten der Heidelberger Akademie der Wissenschaften gedruckt; die Sonderdrucke hatten einen grünen Umschlag. Taussky hat den Artikel für das Jahrbuch besprochen.

[2]Scholz war Assistent bei Doetsch in Freiburg.

4.36 11.04.1934, Scholz an Taussky

Berlin, 11. IV. 34.

Liebes Fräulein Taussky!

Vielen Dank für Ihren Brief und die Separatenliste. Zuerst folgende Mitteilung:

> Am 9. April 1934 ist der
>
> *Zweigkörper von* $K_{181}^{9} \cdot K_{7}^{3}$
>
> infolge $r = \varrho^{XY}\sigma^{\ell}$ sanft entschlafen.
>
> In tiefer Trauer
>
> Die hinterbliebenen
> Klassenkörper.

Beweis:

Allgemeine Behauptung: $r = \varrho^{XY}\sigma^{\ell}$ darstellbar in $K = K_{p_1}^{\ell^2} \cdot K_{p_2}^{\ell}$,

$$\text{wenn} \quad \begin{cases} \varepsilon_1 \not\equiv \alpha^{\ell}\,(p_2) \quad \text{in} \quad K_{p_1}^{\ell}, \qquad \varepsilon_2 \not\equiv \beta^{X^3}\gamma^{\ell}\,(p_1) \quad \text{in} \quad K_{p_2}^{\ell} \\ p_2 \not\equiv a^{\ell^2}\,(p_1) \end{cases}$$

z. B.: $\ell = 3$; $p_1 = 181$, $p_2 = 7$: $\left(\frac{7}{181}\right)_9 \neq 1$, $\varepsilon_1 \not\equiv \alpha^3\,(7)$, auch $\varepsilon_2 \not\equiv \alpha^3\,(7)$

In $\overline{K} = K_{p_1}^{\ell}.K_{p_2}^{\ell}$: $\mathfrak{M} = (\ell, X, Y)$

d.h.: $\mathfrak{r}^{\ell}$, $\mathfrak{r}^{X}$, $\mathfrak{r}^{Y}$ Hauptideale

[woraus auch $\mathfrak{M}(K) = L$ folgt, was hier aber nicht benutzt wird]

ε_1 *Gr.-E. in* $K_{p_1}^{\ell}$ *!*

Allgemeiner Beweis:

$r = N(\bar{\mathfrak{r}})$ in $\overline{K} = K_{p_1}^{\ell} \cdot K_{p_2}^{\ell}$; $\bar{\mathfrak{r}} = N(\mathfrak{r})$[1] in K.

$\bar{\mathfrak{r}}$ und $\mathfrak{r}$ in Grundklasse von $\overline{K}$ und K.

$\overline{\boldsymbol{K}}$ **:** Sei $\bar{\mathfrak{r}}^{X^{\ell-2}} = \bar{\varrho}$

(Dass Hauptideal, folgt aus

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \not\equiv \alpha^{\ell}\,(p_2) \quad \rightarrow \quad \mathfrak{M} | (\ell, X^{\ell-2}, [\ldots]) \\ \varepsilon_2 \not\equiv \beta^{X^3}\,(p_1) \end{cases} \qquad)$$

[1] undeutlich

So ist

$$N_{K_1}(\overline{\varrho}) = \overline{\varrho}^{f_2} = \varrho_1^{X^{\ell-2}} \varepsilon_1^F,$$

wo $\varrho_1 = N(\overline{\mathfrak{r}})$, F [...].
Denn ϱ_1 ist nur X^{ter} Potenzrest mod p_2 in $\overline{K}$, also ϱ_1^X nur X^2-ter Rest, wie $\varepsilon_1^{X^{\lambda-1}}$, wenn erst $\varepsilon_1^{X^\lambda}$ ℓ-ter Rest mod p_2 (Hier ist $\lambda > 0$.). $\overline{\varrho}^{f_{,,}}$ muss aber als Normenrest mod p_2 auch ℓ^{ter} Potenzrest sein; daher muss gerade ein Faktor $\varepsilon_1^{X^{\lambda-1}}$ hinzukommen.

***K* :** Nun ist aber, wenn man zu K selbst übergeht, ε_1 eine Norm in K/K_1 (noch nicht für $\overline{K}/K_{p_1}^\ell$), wenn p_2 beim Übergang von $K_{p_1}^\ell$ auf $K_{p_1}^{\ell^2}$ nicht weiter zerfällt; denn da ε_1 eine Zahl aus $K_{p_1}^\ell$, ist sie in $K_{p_1}^{\ell^2}$ ℓ-ter Potenzrest mod p_2, also Normenrest mod p_2 und daher Norm in K:

$$\varepsilon_1 = N(\alpha), \quad \alpha = j^Y = (\gamma \mathfrak{r}^F)^Y = N(\alpha\gamma^{-Y}) = N(\mathfrak{r}^{FY})$$

Einfacher: Es gilt sogar: $\varepsilon_1 = N(\eta)$ in K, wo η Einheit; denn da p_2 in K_1 nur in ℓ Primfaktoren zerfällt, so gibt es höchstens ℓ unabhängige Ambige in K/K_1, daher höchstens $\ell - 1$ Nichtnormen unter den Einheiten η_1, η_1^X, $\ldots, \eta_1^{X^{\ell^2-2}}$ von K_1 (wobei hier η_1 Grundeinheit von K_1, $\varepsilon_1 = \eta_1^{1+S_1^\ell+S_1^{2\ell}[\ldots]}$) also $\varepsilon_1 = \eta_1^{X^{\ell(\ell-1)}}.\eta'^\ell$ und daher ε_1 bestimmt unter die Einheiten von K_1 fällt, die noch Normen von Einheiten in K sind.
Wegen $\varepsilon_1 = \eta^{f_2} = \eta^{Y^{\ell-1}}\eta^{I\ell}$ kann man in der Gleichung

$$\varrho_1^{X^{\ell-2}} = \varepsilon_1^{X^{\lambda-1}} \overline{\varrho}^{f_2} = \left(\eta^{X^{\lambda-1}} \overline{\varrho}\right) [\ldots]$$

aufteilen:

$$\begin{aligned} \varrho_1^{X^{\ell-2}} &= (\quad)^{Y^{\ell-2}\cdot Y} (\quad)^{I\cdot\ell} \\ &= \varrho^Y \cdot \delta^\ell \qquad \left.\begin{matrix}\varrho\\ \delta\end{matrix}\right\} \text{ Potenz von } \mathfrak{r} \text{ sogar } \overline{\mathfrak{r}} \end{aligned}$$

$$\varrho_1^{X^{\ell-1}} = \varrho^{XY}\tau^\ell \qquad \tau = \delta^X$$

$$r = \varrho^{XY}\sigma^\ell$$

So einfach geht es aber nur, wenn $\overline{\mathfrak{r}}^{X^{\ell-2}}$ Hauptideal in [...]. Daher weiss ich noch nicht, wie es bei

$$K = K_{19}^9.K_{1129}^3$$

liegt. Hier war ja

$$\mathfrak{M} = (3 \nmid X^2, Y) \quad : \quad \begin{cases} \varepsilon_{19} \equiv \alpha^3 \, (1129) \\ \varepsilon_{1129} \not\equiv \beta^3 \, (19) \\ 1129 \not\equiv c^9 \, (19) \end{cases}$$

Es geht hier bestimmt nicht mehr mit Idealpotenzen von $\bar{\mathfrak{r}}$. Ich wage nichts zu vermuten.

Also: Gegenseitiger ℓ^{ter} Potenzrest von p_1 und p_2 notwendig, aber keinesfalls hinreichend für Zweigkörper $(\ell^{h_1}, \ell^{h_2},$ [...]$)$ $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{\ell^{h_2}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\ell^{h_1}} = 1$ hinreichend. Ob notwendig?

Zu Ihrem 'Burnsideschen Satz' hab' ich zu bemerken: Der "grösste Normalteiler mit Ab. Faktorgr." ist die Gruppe selbst. Ich könnte mir höchstens noch denken, dass Sie überhaupt nur zweistufige Gr. meinen und dann einen 'maximalen Abelschen Normalteiler'. Dann stimmt aber die Erzeugungsbehauptung für die zugehörige Faktorgruppe nicht, wie man an den Gruppen der Ordnung 8 sieht.

Zur Separatenfrage:

1) Legen Sie Wert darauf, persönlich v.d. Waerden und Deuring zu [...], ebenso Grün? Was in Dtschld. lebt, könnte ich mit Dienstmarke senden.

2) Wo man Landau hinschicken kann, werde ich wohl durch Schur erfahren. Schliesslich erreicht's ihn auch in Gött., Herzberger Landstr. [...].

3) Wer ist Mrs. Wrinch-England (hab' ich sie etwa in Gött. oder Zürich bei Ihnen kennengelernt?) ? Wer ist Burkhardt-Schweiz? Muss der Separat haben? Wollen Sie Fueter und Gut beglücken? Haben die's nötig?

4) Von Morija und Zorn wissen Sie nicht, ob in Hamburg, aber sie sollen Separata haben? Morija hat ja jetzt Vandiver im Fermatproblem weit übertroffen. Ich könnte ihnen ja nach Hambg. schicken.

5) Ich weiss nicht einmal Chevalleys Adresse; aber man kann ruhig alles an Chevalley schicken. Soll ich das tun? Kann man evtl. 1-2 von den Parisern streichen, oder interessieren sich diese alle sehr?

6) Wir erhalten nämlich zusammen nur 100 Separata. Daher wäre es ganz gut, einige von den Erwähnten zu streichen. (Wer ist Gröbner-Wien?). Kann nicht Rellich-Gött. wegfallen?

Wenn Sie mir die Beschickung von Deuring, v.d. Waerden und Grün überlassen (und die Pariser), haben Sie 33 Leute, die Sie beschicken wollten. Wenn Sie etwa 3 streichen, sind's 30. Haben Sie dann ausreichend Separata, wenn ich W.d.G.[1] sage, er solle Ihnen 40 schicken? Also etwa mit 10 Exemplaren Reserve?

Nicht unterstrichen haben Sie 31. Lassen wir etwa 2 fortfallen (Paris, Gött.), hab' ich 29 zu versenden. Dazu 4-5 Freiburg, 11-12 Berlin (vielleicht etwas zu streichen, aber nicht viel; mitgezählt z.B. auch Specht), der jetzt

mit Fitting in Kgsbg.); das sind etwa 4[...]. Von den übrigen 15 eins an Boehle (Frankf.; könnte man vielleicht stattdessen Dehn fortlassen; den interessiert's doch wenig!) Interessieren tat sich aber C. Müller[2] – Hannover (quadr. F.); dem schick' ich eins (In Fbg. kriegt z.B. keins: Doetsch, Heffter; in Bln.: Bieberbach, Hammerstein; oder legen Sie bei Bbb. Wert darauf?). Weiter: Szegö-Reidemeister. *München*: Perron, Cara (evtl. Hartogs). *Heidelbg.* (Rosenthal) (Liebmann) *vielleicht* Ich behalte jedenfalls keine 10 übrig.

Oder wollen wir etwas spendabler sein und noch 20 Exemplare auf unsere Kosten bestellen, falls das noch geht? Dann hätten wir 120. Ich muss nur sagen: Analytikern wie Bbb und Doetsch, denen der Sinn für die Schönheit der Algebra und Zahlentheorie abgeht, sende ich nicht gern. Das heisst Perlen vor die Säue werfen. Geometer sind schon anders, aber die Analytiker sind heut oft reichlich gehässig gegen die Algebra.

[Nagell ist übrigens in Uppsala. Aber dem schick' ich ja sowieso.]

Ich will doch noch angeben, dass ich in *Fbg.* gebe: Zermelo, Kapferer, Loewy, Seminar, evtl. Breusch. Göttingen auch noch Seminar! Evtl. auch Hamburg. *Berlin*: Schur, Schmidt, Seminar, Feigl, Bra[...], Rohrbach, Specht, Behrend, Neiss (mein Lehrer), Remak, Frl. Held, Frl. Labus (Jerusalem).

Hoffentlich können Sie hieraus einigermassen klug werden!

Ich bin noch bis 18. in Berlin. 19. reise ich mit meiner Mutter, sie nach Bad Orb (Nähe Frankf.), ich nach Fbg. Wenn Sie nur bald schreiben, was Sie über 100 oder 120 Exemplare meinen, und ob Sie mit 40 (bzw. 50) Exemplaren, die an Ihre Adresse gehen, einverstanden sind, könnte ich vor meiner Abreise noch bei W.d.G. vorsprechen. An sich finde ich ja, dass die wirklich zahlentheoretisch Interessierten unsere Note bekommen sollten.

Durch Schur hörte ich jetzt, dass, wie Remak gefunden, die Hauptsache an der Hofreiterschen Arbeit über Minkowskischen Satz[3] falsch. Interessant finde ich die H.schen Sachen schon überhaupt nicht. Ich habe Schur Montag telefonisch gesprochen. Er war krank, aber wieder gesund. Hatte je 25 Hörer in der Idealtheorie und Gruppentheorie. Ganz schön für jetzt.[4]

Viele herzliche Grüsse.

Ihr Noldi.

Anmerkungen zum 11.04.1934

[1]De Gruyter hat Crelles Journal verlegt.

[2]Conrad Müller (1878–1953) studierte bei Klein und erhielt 1910 einen Ruf an die TH Hannover, wo er bis zu seiner Emeritierung 1948 arbeitete. Häufig zitiert wird vor allem seine Arbeit [216] über die Näherung von $\sqrt{3}$ bei Archimedes.

[3]Hofreiters Habilitationsschrift [139] wurde in den Monatsheften veröffentlicht. In seinem Nachruf auf Hofreiter beschreibt Hlawka [137] dieses Ergebnis wie folgt: „Minkowski hatte ein Problem formuliert, das sich mit dem Produkt von inhomogenen Linearformen beschäftigt. Der 2-dimensionale Fall wurde von ihm selbst erledigt, der 3-dimensionale wurde von Remak gelöst. Hofreiter versuchte nun in einer kühnen Attacke, mit jugendlichem Ungestüm, den schwierigen 4-dimensionalen Fall zu lösen. Es gelang ihm damals – in der Habilitationsschrift – nicht, das Problem zur Gänze zu erledigen [...]“. Die Lücke konnte erst 15 Jahre später geschlossen werden. Vgl. auch Merzbach [199].

[4]Scholz war ein Schüler von Issai Schur. Schur wurde trotz seiner jüdischen Abstammung erlaubt, 1933 Vorlesungen zu halten; er wanderte 1938 nach Israel aus und starb dort 1941 an Herzversagen.

4.37 14.04.1934, Scholz an Taussky, Postkarte

14. 4. 34.

Liebes Fräulein Taussky!

Jetzt hab' ich doch bewiesen, dass

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{\ell^{h_2}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\ell^{h_1}} = 1$$

notwendig und hinreichend für Erweiterbarkeit des $K_{p_1}^{\ell^{h_1}} \cdot K_{p_2}^{\ell^{h_2}}$ zu einem Zweigkörper vom Typus $(\ell^{h_1}, \ell^{h_2}; \ell^k)$ ($\ell > 2$; für $\ell = 2$ verschärfte Bedingung)[1)].

Allgemeiner: Sind P/O und Q/O zwei relativ zyklische rein verzweigte Körper vom Primzahlgrad mit zueinander teilerfr. Diskr., so müssen die Diskr. Teiler y von P in Q voll zerfallen und umgekehrt, damit PQ sich zu einem Zweigkörper über O erweitern lässt. Wahrscheinlich ist diese Bedingg. auch hinreichend. – Von Schur hörte ich gestern, dass Prüfer[2)] plötzlich gestorben ist. – Haupt ist indessen nach Leipzig berufen. – Landau ist erreichbar: Bln., Pariser Platz 2 (Frau Medizinalrat L.)

Herzlichen Gruss!

Noldi.

Auch einen Gruss, bitte, an Furtwängler!

Anmerkungen zum 14.04.1934

[1]Im Brief vom 16.12.1933 hatte Scholz noch geglaubt, dass gegenseitiger p-ter Potenzrest ausreiche.

[2]Heinz Prüfer stammt wie Scholz aus Berlin und hat 1921 wie dieser bei Issai Schur promoviert. Danach arbeitete er in Hamburg, Jena und Münster, wo er 1930 außerordentlicher Professor wurde. Er starb bereits mit 37 Jahren an Lungenkrebs.

4.38 21.04.1934, Scholz an Taussky, Postkarte

Freiburg i. B. – G'tal, 21. 4. 34.

(Furtwänglers 65. Geburtstag)

Liebes Fräulein Taussky!

Vielen Dank für Ihren lieben Brief vom 15.! Inzwischen werden Sie auch meine K. vom 16. erhalten haben mit Landaus Adr. (Berlin, Pariser Pl. 2) und der notw. Bed. f. Konstr. von Zweigkp.:

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{\ell^{h_2}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\ell^{h_1}} = 1.$$

Wegen unserer Abhandlg. hab' ich Feigl gesprochen. Er wird es erledigen. Sie bekommen dann 50 zugeschickt, ich 70. Die Kosten f. d. Mehrexempl. werden uns nach meinem Vorschlag von unserem Fortschritts-Honorar abgezogen. D. h. wenn Feigl am 18. noch rechtzeitig Bescheid sagen konnte.

Jetzt versteh' ich Ihren Einwand, nachdem ich hier S. 38 meiner grünen Arbeit nachgesehen: ich hatte dort die Alteinhgr. H nicht aus allen Unterkörpereinh. erzeugt, sondern nur aus symb. Pot. je einer Gr.-E. Dann ist natürlich besagtes E mit $E^\ell < H$ auch nur Ugr. aller Einh., aber von zu ℓ primem Index, was das wesentliche. (Es ist ε^ℓ das Produkt der Normen nach allen zykl. Unterkörpern.) Ihre Bemerkg. ist demnach richtig; ich hatte H wie in Ann.-Note def. in Erinnerg. – An Frl. Noether möchte ich mich gegebenenfalls lieber später erst wenden, nicht mehr für 34/35. – Do. bin ich bei herrlichem Wetter mit meiner Mutter gereist, sie nach Bad Orb, ich in Frankf. Station gemacht, wo ich ausser M & M[1)] auch Reichardt traf, der dort jetzt Assistent, und erfuhr, dass Hasse nach Gött. berufen. Fraglich, ob er für d. Sommer schon annimmt. Wir haben Hasse u. Fw. gleichzeitig gratuliert, ohne Adressen zu vertauschen. [Berufung und Geburtstag]

Viele herzliche Grüsse!

Ihr Noldi.

Anmerkungen zum 14.04.1934

[1]In Frankfurt hat Scholz regelmäßig W. Magnus und Ruth Moufang besucht; sh. seinen Brief vom 24.03.1934.

4.39 20.05.1934, Scholz an Taussky, Postkarte

Kyburg, 20. 5. 34.

Liebe Oli!

Inzwischen werden Sie die 50 Sep. erhalten haben. Wollte Ihnen mitteilen, dass Frl. Noether mir geschr. – sehr herzlich – dass sie Mitte Mai wieder abreist und wieder in Göttingen bis Sept. Haben Sie ihr schon Sep. geschickt? Sonst schicken Sie ihr wieder nach G., Stegmühlenweg 51! – Die Existenz mehrstuf. Gr. mit 2 Erzgd. erscheint mir immer fragwürdiger[1)].

Herzliche Grüsse, auch einen Gruss von meiner Mutter, die hier in Pension.

Ihr Noldi.

Niki gedeiht.

Anmerkungen zum 20.05.1934

[1]Dies ist ein Spezialfall von Tausskys Gruppenturmproblem: gibt es für jede nichzyklische abelsche p-Gruppe G außer $(2,2)$ einen unendlichen Gruppenturm mit $\Gamma/\Gamma' \simeq G$ und endlichen höheren Kommutatorgruppen? In der gemeinsamen Arbeit [S17] hat ursprünglich wohl die Vermutung gestanden, dass der 3-Klassenkörperturm jedes Zahlkörpers mit 3-Klassengruppe $(3,3)$ notwendig abbricht.

4.40 04.06.1934, Scholz an Taussky

Freiburg, 4. Juni 34.

Liebe Oli!

Haben Sie vielen Dank für Ihren lieben Brief mit St. Florian, der mich sehr gefreut hat und gleichzeitig ankam mit einem Brief von Hasse, der mich weniger gefreut hat. Jedenfalls gleichzeitig Antwort auf meine neuen Ergebnisse, die ich etwa gleichzeitig mitteilte. Schön, dass Ihre Amerikareise jetzt festliegt, und dass Sie in Bryn Mawr erwartet werden. Ich freue mich mit Ihnen aufrichtig und bin auch in Gedanken umsomehr dabei, als ich jetzt doch auch vorhabe, Emmy Noether wegen Stipendium anzufragen. Vielleicht tu' ich's heut' schon. Die Sache ist dadurch ins Rollen gekommen, dass hier plötzlich der Nachfolger für Loewy aufgetaucht ist, Herr Süss aus Greifswald, ein sehr netter Mensch, den ich auch durch Feigl kenne, aber: Kein Algebraiker. Nun scheint der Doetschsche Vorlesungsplan, der höhere algebraische Vorlesungen praktisch ausschaltet, platzgegriffen zu haben, sodass ich mich hier jetzt überflüssig fühle. Habe daraufhin sofort an Hasse geschrieben wegen Umhabilitierung nach Göttingen, was jetzt doch das Gegebenste für mich wäre und ich schon länger in Erwägung gezogen habe. Glatte Absage: hält 'meine Person' für diesen 'hochgespannten Boden' jetzt nicht für geeignet. Mag ja recht haben; vielleicht will er mich vor der Gesellschaft des Herrn W. u. ä. bewahren. Aber: ohne jeden anderen Ratschlag, wo er weiss, dass ich nicht mehr hier bleiben will und mich auch garnicht mehr hier erwartete, das finde ich etwas ruppig.

(Bitte das mit Gött. vertraulich zu behandeln und auch Fw. gegenüber nicht von Hasse zu sprechen. Weiss selbst nicht recht, wie er's meinte. Dass es mir schlecht geht, dürfen Sie ruhig sagen.) – Nun habe ich es eben für das beste gefunden, mich an Frl. Noether zu wenden und glaube auch hier nichts zu verpassen, wenn aus dem Ore-Stipendium was würde; denn wenn mich Hasse nicht fördert, der einzige Algebraiker, der es hier in der Hand hat, dann überhaupt niemand. –

Wenn ich das Ore-Stipendium noch bekommen könnte, würden wir uns ja sicher auf der Reise oder dort sehen. Weiss zwar nicht, wie weit New-Haven und Bryn Mawr auseinander liegen. Vielleicht könnte ich dann durch Ore weitere Empfehlungen für Skandinavien bekommen, wo ich mich ausserdem an Nagell wenden könnte. An den werde ich sowieso mal schreiben. – Vielleicht könnte ich durch Vermittlung von Frl. Noether auch ein Rockefeller-Stipendium bekommen. Dann würde ich bestimmt nach Skandinavien gehen.

Wissen Sie die Adresse von Ore? Haben Sie ihm schon ein Separat geschickt. Ich will Ihm nämlich auch noch eins von meiner Annalen-Note

schicken, könnte es sonst zusammen tun. Sie schreiben mir bald mal wieder? Wo sind Veblen, Weyl, Dickson? – Wenn Sie an Chevalley schicken, ist mir recht; dann können Sie ja nach Gutdünken unter den Parisern auswählen oder, falls Sie noch genug Separata haben, alle beschicken. Ich behalte sowieso nur etwa 9. Die Leute, die ich beschickt habe, ohne dass Sie sie mir aufgeschrieben hatten, notiere ich auf beiliegender Karte von Hahn, auf der er mir offenbar etwas mitteilen wollte. Vielleicht fragen Sie ihn gelegentlich mal, was! Wahrscheinlich hat er zwei Karten gegriffen, und die Mitteilung irrt adressenlos rum. – Was die Mehrkosten der Separata anbelangt, werden auf uns jeden wohl kaum mehr als 3 M entfallen. Und 3 Referate haben Sie bei Feigl allein wohl über mich gemacht. – Ulkig übrigens, dass im Zentralblatt auch eine Berichtigung noch berichtet wird.

Die Beliebighochstufigkeit von Primgruppen mit □□□ 2 Erzeugenden fester Primpotenzordg. h schien mir durch körpertheoretische Überlegungen zweifelhafter als bisher, weil dann schon der Klassenkörper des Kreiskörpers aus Körpern mit paarweise nicht teilerfremden, konjug. Führern zus. gesetzt ist. Für $h > 3$ kommen aber auch teilerfrd. Paare vor (bei meiner Zwgkg. Konstr., sonst auch schon für $h \leqq 3$), immerhin aber konjugierte Führer, wo man nicht ohne Weiteres in eine höhere Stufe gelangen kann, sodass Hochstufigkeit fraglich, für $h < 4$ sogar aussichtslos. Näheres später, wenn ich schon etwas mehr weiss.

Wann werden Sie etwa Basel passieren? Ende August? Da bin ich vielleicht gerade auf der Rückreise meiner Graubündener Bergtour. September denke ich in Freiburg zu sein. Können Sie dann nicht von Basel aus einen Abstecher machen? Das wäre sehr schön. Haben Sie keine Angst vor der französ. Eisenbahn?

Herzliche Grüsse. Ihr Noldi.

Als ich neulich Furti schrieb, fing ich unter 'Wien' schon an, das '$\mathcal{E}$' von Eckpergasse[1)] zu malen – hab' dann einfach M davorgesetzt, sodass dastand: Messerschmidtgasse

Anmerkungen zum 04.06.1934

[1]Taussky wohnte damals in der Eckpergasse 39.

4.41 o. Datum, Scholz an Taussky, Fragment

Fortsetzungen einer Abelschen Gr. nach Tschebotarjów.

(unabh. von der Basis, da El. teilerfremder Ordg. vertauschbar bleiben müssen. Daher tritt hier von der allg. zweistufigen Gr. nur die "innere Kommgr." (vgl. meine Red. d. zweistf. Gr., Heidelbg Ak 1929.) auf; die äussere Kommgr. braucht neue Trägh.subst.)

$$\begin{aligned} \mathfrak{V} &= \{S_1, S_2\} = \text{Vierergruppe} \\ \mathfrak{V}_1 &= \text{Diedergruppe (neue Rel. } S_2S_1 = S_1S_2C) \\ \mathfrak{V}_2 &= \text{Gruppe 16. Ordg. mit } S_1^2 = S_2^2 = 1 \end{aligned}$$

u. s. f. hier natürl. nur zweistf. zykl. Kommgr.[1)]

$$\mathfrak{H} = \{S_1, S_2\} = \text{Neunergruppe}$$

$$\text{zweistf.} \left\{ \begin{array}{lcl} \mathfrak{H}_1 & : & \text{Kommutator } A;\ \operatorname{ord} A = (3, X, Y) \\ \mathfrak{H}_2 & : & \operatorname{ord} A = (3, X^2, XY, Y^2) \\ \mathfrak{H}_3 & : & \operatorname{ord} A = (9, 3X, 3Y). \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{zweistufig?}} \longrightarrow \left\{ \ \mathfrak{H}_4 \ : \ \operatorname{ord} A = (9, 3XY, f_1, f_2) \right.$$

im zweistufigen Teil u. s. f.[2)]

Dass hier $\mathfrak{H}_3$ noch zweistufig, ist ein Resultat unserer gem. Note (Schluss).

Ob das mit $\mathfrak{H}_4$ noch richtig? Leider gibt die Def. zu wenig Möglichkeiten prakt. Rechnung.

Wenn man ein wirkliches Rechenverfahren hätte, könnte man entscheiden, ob eine 3-Potenzgr. aus zwei Erzgd. der Ordg. 3 überhaupt dreistufig sein kann, was wir ja immer wissen wollten. Sie schrieben mir mal ein Resultat von Magnus[3)], dass die Existenz dreistuf. Gr. mit [...] zweistuf. Teil (aus zwei Erzeugden der Ordg. 5 ?) nachweist.

Jedenfalls glaube ich, dass man durch das Tschebotarjówsche Prinzip sowohl mehr Einblick in die Struktur auflösb. Gr. erhalten kann, sowie übersichtliche Körperexistenzkriterien.

Nochmals herzlichst. Ali.

Anmerkungen zum Fragment

[1]Scholz konstruiert Gruppen Γ mit $\Gamma/\Gamma' = V$, der Kleinschen Vierergruppe. Die einzige solche Gruppe der Ordnung 8 ist die Diedergruppe $\mathfrak{V}_1 = D_4$, für Ordnung 16 existieren bereits drei solcher Gruppen.

[2]Scholz beginnt hier mit der elementar-abelschen Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung 9. Die Erweiterung $\mathfrak{H}_1$ der Ordnung 27 hat zwei Erzeugende S_1 und S_2, mit Kommutator $A = [S_1, S_2]$, dessen symbolische Ordnung durch $\mathfrak{M} = (3, X, Y)$ gegeben ist. Durch Erhöhen der Ordnung von A findet er verschiedene 2-stufige Gruppen mit Faktorgruppe $\mathfrak{H}$, aber für $\mathfrak{H}_4$ kann er es noch nicht beweisen.

Wie es scheint, hängen diese Fragen mit der Bemerkung über $h < 4$ usw. im letzten Brief zusammen, weswegen wir dieses Fragment an dieser Stelle eingefügt haben; sh. auch den Brief vom 12.05.1935.

[3]In [180, p. 278] hat Magnus bewiesen, dass es für jede Zahl $N \geq 1$ eine 3-Gruppe G der Stufe n gibt mit $G/G' \simeq (3, 3, 3)$.

4.42 02.09.1934, Scholz an Taussky, Postkarte

Pontresina, Pension Edelweiss 2. 9. 34.

Liebe Oli!

Nun reist Eli am 7., und so wäre es mir lieb, wenn Sie am 14. etwa abreisten und wir uns dann am 15. 9. in Sargans 11^{21} träfen. (Einen Tag früher wär' mir schliesslich auch recht.) Bin hier bis 7. früh, von da ab:

Kurhaus Cresta-Avers (Graubd.)

erreichbar. Bisher herrliche Tour ins Unterengadin, Scuol und Münstertal. Ist die Dorfstrasse in S. Maria nicht schön? Viele herzliche Grüsse!

Auf Wiedersehen!

Ali.

4.43 19.04.1935, Scholz an Taussky, Fragment

Dass Deurings Beweis für den allg. Hauptidealsatz noch eine Lücke enthält, ist schade. Wird sich doch wohl aber ausgleichen lassen.

Ferner überlegte ich mir mit Nehrkorn[1)] noch genauere Kriterien für welche Abelsche Körper der Hassesche Normensatz gilt. (Totaler Normenrest = Norm.) Meine Überlegungen in II gaben nur eine hinreichende Bedingung für seine Ungültigkeit. Notwendig war diese gleichzeitig, wenn der Normensatz wenigstens für Einheiten richtig ist. Es kann aber sein, wie im Falle $P(\sqrt{13}, \sqrt{17})$ oder $P(\sqrt{65}, \sqrt{85})$, dass dieser Körper eine Klassenzahl 1 hat, also keine "Kommutatorklasse" existiert, trotzdem aber der Normensatz falsch ist, weil er für die Einheiten falsch ist. In der Tat ist hier von P aus:

$$-1 \text{ totaler Normenrest, aber keine Norm.}$$

Denkbar wäre auch folgender Fall: Grundkörper P mit Einheiten. K_1/P, K_2/P Körper ℓ^{ten} Grades mit Primführern φ_1 und φ_2, die gegenseitig voll zerfallen. Trotzdem könnte K_1K_2 eine zu ℓ prime Klassenzahl haben. Ohne dass dadurch die Konstr. möglichkeit eines Zweigkörpers als Fortsetzung von K_1K_2 berührt würde. Der (Prim-)Führer q über K_1K_2 dürfte aber nicht so beschaffen sein, dass über P schon ein Körper ℓ^{ten} Grades mit dem Führer q existiert (Einh. in P)! Dann muss der Normensatz für Einheiten versagen.

Nun noch was: wie ich jetzt die Körperkonstruktion für auflösbare Gruppen versuche (ich weiss nicht, wieviel ich schon berichtet)

mit der

Tschebotarjówschen Aufspaltung

Gegeben Gruppe $\mathfrak{H} = \{Q_1, \ldots, Q_r\} = \{Q\}$ ← Erzeugendensystem aus vollen Klassen konjugierter El.

Definierende Rel.

$$\begin{array}{rcl|rcl}
Q_1^{h_1} & = & 1 & Q_1^{h_1} & = & 1 \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
\boxed{\mathfrak{H}} & & & & & \boxed{\text{Aufspaltung } \mathfrak{H}_Q} \\
\searrow & & & & & \swarrow \\
Q_r^{h_r} & = & 1 & Q_r^{h_r} & = & 1 \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
f_t(Q_\varrho) & = & 1 & f_t(Q_\varrho) & = & C_t; \quad C_\varrho C_\sigma = C_\sigma C_\varrho; \quad C_\varrho Q_\tau = Q_\tau C_\varrho
\end{array}$$

Also: Die Aufspaltung soll im Zentrum liegen unter Beibehaltung der Ordnungen der Erzeugenden (Trägh. subst.). Maximale Gr. dieser Eigsch.

Tsch. sches Resultat : Gruppe ist endlich.

Meine Überlegung: Gegeben Körper K der Gruppe $\mathfrak{H}$ mit den Trägh. subst. Q_ϱ.

(Keine höheren Verzweigungen; keine störenden Einheitswz.)

Notwendig dafür, dass der Klassenkörper $\overline{K}$ von K einen Körper der Gruppe $\mathfrak{H}_Q$ enthält, ist, dass die zu den Q_ϱ gehörigen Primz. p_ϱ in dem zu $\{Q_\varrho\}$ gehörigen Unt. kp. von K voll zerfallen. Wahrscheinlich auch hinreichend. – Jede auflösb. Gr. von Primpotenzordg. wird durch Iteration des Verfahrens vom Kommutanden aus erfasst.

Herzliche Grüsse, auch an Emmy.

Ihr Noldi.

19. 4. 35.

Anmerkungen zum 19.04.1935

[1]Harald Nehrkorn (1910–2006) promovierte 1933 bei Artin; die Ergebnisse der Dissertation wurden in [223] publiziert. Danach arbeitete er als Assistent im Hamburger Seminar für Mathematik. Nach dem Krieg wird er Lehrer an der Hermann-Lietz-Schule Schloss Bieberstein. Zusammen mit Chevalley [55] lieferte er einen Beitrag zum arithmetischen Aufbau der Klassenkörpertheorie.

4.44 12.05.1935, Scholz an Taussky, Fragment

[...]

[1)] Tschebotarjów bildet nun seine Erweiterung, indem er Transformation $S_\beta^{-1} S_\alpha S_\beta = S_\gamma$ der Erzeugenden betrachtet (das Erzgd. system soll aus ganzen Klassen bestehen), die bei der Aufspaltung in neue Rel. $S_\beta^{-1} S_\alpha S_\beta = S_\gamma C$ übergehen. Die C erzeugen, wenn der Abelsche *Faktor. Teil* nicht vergrössert werden soll, die neue Aufspaltg. bei jedem Schritt. – Einfachere Übersicht durch die *Reidemeister*sche Erzeugung: $A_1, \ldots, A_r$ seien die Erzgd. von $\mathfrak{G}_{k-1}/\mathfrak{G}_k$, $S_1, \ldots, S_n$ die von $\overline{\mathfrak{G}}$, so erzeugen die $A_\varrho^{S_\nu - 1}$ die $\mathfrak{G}_k/\mathfrak{G}_{k+1}$, sind natürlich nicht alle voneinander unabh.

Beispiele: $S_1^2 = S_2^2 = 1$:

Gruppenelemente: $S_1 S_2 S_1 S_2 S_1 \cdots$ und Transf., darstellbar (Die Zweistufigkt. hieraus am einfachsten) $S_1^{0,1} S_2^{0,1}.A^a$, wo $A = S_1 S_2 S_1 S_2$ Kommutator. Die "halbfreie Gr." $\overline{\mathfrak{G}}$ besitzt hier als Faktorgr. die Spiegelungsgruppen aller zykl. Gruppen. Sie entsteht durch eine neue Relation: $S_1 S_2 S_1 S_2 \ldots S_1 S_2 = 1$.

$$1, S_1, S_2, S_1 S_2, S_2 S_1, S_1 S_2 S_1, \quad \Big| \quad S_2 S_1 S_2, \ldots$$

bilden ein gemeinsames Repräs. system aller Spiegelungsgr., das mitten in den beiden El. der Länge m abzubrechen ist, wenn m die Ordg. der gespieg. zykl. Gr. (Es stecken hier natürlich keine zugehör. Körper drin. Vorsicht im Unendlichen!)

Es handelt sich im allg. Fall darum: Gegeben eine Erzeugung $\{S_1, \ldots, S_n\}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ mit den eingliedrigen Relationen $S_\nu^{e_\nu} = 1$ und einer Reihe von mehrgliedr. Rel. $F(S_n, S_\nu, \ldots) = 1$. Man bilde nun die halbfreie Gruppe $\overline{\mathfrak{G}} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ mit den blossen Rel. $S_\nu^{e_\nu} = 1$ und unterteile diese Aufspaltung in "Fortsetzungen" $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_k, \ldots$, die so beschaffen sind, dass $\mathfrak{G}_{k-1}/\mathfrak{G}_k$ im Zentrum von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_k$ liegt, und $\mathfrak{G}_k$ jedesmal die maximale Aufspaltung dieser Art ist. (Eigentl. wollte ich mit $\mathfrak{G}_k$ die Faktorgr. bezeichnen, hab's nun aber verwechs.) – Für den Fall, dass das gegebene $\mathfrak{G}$ eine Abelsche Gr. und $\{S_1, \ldots, S_n\}$ seine Basis – ganz gleich, wie gewählt – entstehen so die Reidemeisterschen Kommutatorgruppen, besser genannt: die "Konzentratorgruppen" (Dieser Name Konzentrator passt allerdings auf allg. $\mathfrak{G}$).

Bei Abelschem $\mathfrak{G}$ sind die Fortsetzungen selbst direkte Prod. von Primärgruppen, da wegen der Forderg. $\mathfrak{G}_{k-1}/\mathfrak{G}_k < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_k)$ Elemente teilerfremder Ordg. vertauschbar bleiben müssen in jedem $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_k$ mit endlichem k. (Natürlich nicht bei $k = \infty$; richtiger $k = \omega$, wo man die gänzlich aufgespaltene freie Gr. hat. Diese enthält bei $S_1^2 = S_2^2 = 1$ z. B. die Diedergruppen

$\mathfrak{G}/\mathfrak{d}$ als Faktorgruppen, und diese sind, wenn von den Ordngen 6, 10, 14, … in unserem Sinne „nicht auflösbar“, d.h. $\mathfrak{d}\mathfrak{G}_k \neq \mathfrak{d}$ für jedes k.)

Interessanter Fall: $S_1^3 = S_2^3 = 1$.

$$S_1,\ S_2 \mid A \mid A^X,\ A^Y \mid A^{3\sim X^2 \sim Y^2},\ A^{XY} \mid \\ \mid A^{3X},\ A^{3Y},\ \underline{A^{XA}} \mid A^9,\ \ldots$$

Dies die schrittweise Erzeugg. Es ergibt sich, dass der Kommutator von A mit A^X oder A^{S_1} existiert und genau bei der 4. Aufspaltung auftaucht (dass ferner, wenn man es weiter verfolgt, die halbfreie Gr. aus zwei Erzeugd. der Ordg. 3 ∞-stufig)

Setzen wir S_1 durch 1, S_2 durch 2, S_1^{-1} durch 9, S_2^{-1} durch 8, so ist

$$\begin{aligned} (A, A^{S_1}) &= 129\,8|\underbrace{\underbrace{91}\,2}\,981|2189|9218\underbrace{91} \\ \downarrow &= 12\underbrace{99}81\ 218\underbrace{99}\ 218 \qquad \text{für } S_1^\ell = S_2^\ell = 1 \\ &= 1218 \mid 1218 \mid 1218 \qquad \text{für } \ell = 3. \end{aligned}$$

ungek. Schreibw. (Reidemeister)

Also dritte Potenz von $9 \cdot \underbrace{9218}_{\text{Komm.}}$, natürlich keine Konj. von 9.

Dies ist wohl das Magnussche Ergebnis; nämlich es gilt also, dass es keine dreistufige Gr. aus 2 Erzgd. mehr gibt, in der alle El. die Ordng 3 haben, wohl aber Ordg. 5, …. Dagegen gibt es dreistuf. Gr., in der[1] nur die beiden Erzgd. die Ordg. 3 haben, wie oben $\mathfrak{G}_4$ (4te Aufsp.)

Grüssen Sie Magnus!

Dass (A, A^S) nicht schon in der dritten Aufsp. vorkommen kann, folgt aus unserer Crelle-Note: Man könnte sonst $A^{XY} = A^3 = 1$ setzen, ohne dass $(A, A^{S_1}) = 1$. Wenn man dagegen $A^9 = 1$ setzt und $A^{3X} = A^{3Y} = 1$, wird (A, A^{S_1}) noch nicht 1, wie ich nur flüchtig gerechnet. Vielleicht rechnen Sie's nochmal nach!

Die Reidemeistersche Erzeugung ergibt übrigens die Möglichkeit, alle El. rechnerisch zu ordnen:

$$S_1^{S_1} S_2^{S_2} A^a (A^X)^{a_X} (A^Y)^{a_Y} (A^{X^2})^{a_{X_2}} (A^{XY})^{a_{XY}} \ \cdots$$

und so genau die Fortsetzg auszurechnen, wo sich ein gegebenes “Wort“ von der Identität löst.

Die Körperkonstr. muss immer so erfolgen, dass alle Diskr. teiler in Primideale 1. Grades zerfallen (soweit nicht die Träghgr. des einen echt in einer

[1] undeutlich

anderen liegt), und wenn die Konstr. bis zu einer gewissen Fortsetzg. gelangt ist, lässt sich die letzte Fortsetzg. durch “Aufpfropfung“ von Verzweigungen so “veredeln“, dass die Zerfallsbed. wieder erfüllt ist. Der Nachweis, dass diese Bedingg. auch hinr. f. d. Konstr. (wenn ausserdem bei zykl. Verlängerung die Führernorm $\equiv 1\,(\ell^m)$; m genüg. hoch.), dass dann der Index der Normen in dem totalen Normenrest gleich der Ordgsaufspaltng, muss noch durch Bew. einer “Hauptirr.“ geliefert werden. Dann wäre ich mit allen Primpotenzgruppen fertig.

Mit herzlichsten Grüssen, auch von Ore, dessen Vortrag (Strukturen i. d. abstrakten Algebra) ich hier hörte.

Ihr Noldi.

Hamburg, 12. Mai[2)]

Aus Eile nicht mehr durchgelesen.

Anmerkungen zum 02.09.1934

[1]Die Blätter dieses Briefs sind mit den Zahlen 4, 5 und 6 numeriert; die ersten sechs Seiten scheinen zu fehlen.

[2]Das Datum 1935 ist in diesem Fragment nicht angegeben, aber in seinem nächsten Brief schreibt Scholz. dass er Ore in Hamburg getroffen hat.

4.45 04.07.1935, Scholz an Taussky, Postkarte

Kiel, 4. Juli 35.

Liebe Oli!

Herzlichen Dank für Ihre letzten beiden Karten aus Bryn Mawr und Oxford! Hoffentlich fühlen Sie sich in England recht wohl! Neulich war hier Foradori aus Innsbruck, jetzt Berlin, den Sie vielleicht auch noch flüchtig kennen, ein sehr netter, bescheidener Mensch. Zu seinem Vortrag war auch Frl. Heesch. Sie und ihr Bruder, in Kiel zu Haus, haben jetzt beide nichts zu leben[1)]. Da geht es mir immer noch etwas besser: Die Notgem. hat mir nach abgelaufenem Stipendium wenigstens noch 200 M nachgespendet, die sie seit Oktober an mir eingespart. Der Lehrauftrag hier lässt noch auf sich warten. Wissen Sie, wie weit Ore das Stipendium, über das er verfügt, schon vergeben hat? Ich hätte ihn ja selbst fragen können, als ich ihn in Hamburg sah, aber da hielt ich meine Lehrauftr.-Chancen noch für besser. Möchte auch das nächste Jahr noch hier abwarten. Aber vielleicht wird's für 1936/37 was, hinter Oslo. Vorläufig verdien' ich ja literarisch ein wenig durch einen neu aufzunehmenden Enzyklopädie-Artikel (Neuherausgabe: Alg.-Zahlth.): C 7a: Spezielle Zahlkörper, wo auch unsere Sachen mit hineinkommen. Ausserdem besteht englisches Projekt: Zahlentheoretische Tabellen (Nautical Institute), wo Hasse mich zur Mitarbeit vorgeschlagen und Sie auch vorschlagen wird (bitte, fragen *Sie* nicht vorzeitig danach! Hab gerade heut Nachricht von Hasse.). Über Gruppen-Aufspaltungen werde ich Ihnen später ausführlich schreiben, trage auf der D.M.V.-Tagung drüber vor wie auch im Winter in Hamburg. Nachdem ich jetzt so oft da war, hat uns Blaschke mit Schülern neulich Gegenbesuch gemacht. – Der Niki entwickelt sich goldig! Trägt schon schwere Gegenstände und betätigt eifrig das Radio. Auf Besuch Ihrer amerikan. Freundin werde ich Eli vorbereiten.

Herzlichen Gruss!

Ihr Ali.

Anmerkungen zum 06.07.1935

[1]Der Bruder Heinrich Heesch (1906–1995) promovierte 1929 in Zürich mit einer Arbeit in Kristallographie. 1930 ging er mit Hermann Weyl nach Göttingen. Er weigerte sich 1935, dem Nationalsozialistischen Deutschen Dozentenbund beizutreten, und arbeitete von 1935 bis 1948 nur noch privat. Er hat aber nach Ausbruch des Kriegs an der Schiffsartillerieschule in Kiel unterrichtet und dabei Scholz näher kennengelernt

4.46 27.08.1935, Scholz an Taussky

Kiel 27. Aug. 1935

Arnold Scholz	1.-20. Sept	Oktober	ab Nov.
Kiel-Kitzeberg	Freiburg i.Br.-Günterstal	Berlin W 35	Jena
Drosselhörn 6	Kybfelsenstr. 9	Hildebrandstr. 20	Abbeanum

Liebe Oli!

Herzlichen Glückwunsch zu Ihrem Geburtstag! Und vielen Dank für Ihren Brief vom 10. Juli! Es freut mich sehr, dass ich meinen Enzyklopädie-Artikel letzten Endes Ihnen zu verdanken habe; ich hoffe mich dessen würdig zu zeigen. Auch hat es mich beim Wiederlesen interessiert, dass Sie P. Hall in Cambridge haben, der den Kommutator (S, T) genauso wie wir eingeführt hat. Ich erfahre das jetzt von Magnus, mit dem ich einmal wegen Enzyklopädie und dann überhaupt wegen gruppentheoretischer Fragen eifrig korrespondiere. Die freien Gruppengeschichten interessieren mich wahnsinnig, und ich finde Magnus' Arbeit in Ann. 111 ausserordentlich schön, glaube auch, dass seine Dimensionsmethode klassenkörpertheoretisch sehr weit führt. – Sie werden's ja schon durch mündlichen Verkehr kennen. Eben habe ich mein Fortschrittsreferat darüber gemacht; das dreimal so lang geworden ist als jedes andere.

Mit der Beantwortung Ihres Briefes hab' ich absichtlich noch gewartet, nicht weil ich Ihnen erst zum Geburtstag schreiben wollte, sondern weil ich Ihnen etwas Bestimmtes über meine Zukunft wollte sagen können. Nun ist es also so gut wie entschieden, dass ich Assistent von F.K. Schmidt in Jena werde. Es sind noch nicht alle Formalitäten erledigt; aber F.K.S. hat den Weg so weit geebnet. Es geht nämlich jetzt immer durch soviel Instanzen, dass man oft monatelang nicht weiss, woran man ist. Bei meinem beantragten Lehrauftrag war das besonders schlimm; alles war in den Ferien, und es kostete vier schriftliche Mahnungen von Seiten des Dekanats und zwei telefonische Anrufe im Ministerium, bis ich endlich am 14. Aug. die Nachricht erhielt, dass ein Lehrauftrag höchstens vom nächsten Jahr ab in Betracht käme. Nun, darauf konnte ich mich nicht mehr einlassen, nachdem ich das Angebot von Jena hatte. Ohne dieses Angebot, durch das ich besonderen Druck aufs Dekanat ausüben konnte, hätte ich bestimmt noch keine Antwort wegen des Lehrauftrags.

Auf die Zusammenarbeit mit F.K. Schmidt freue ich mich eigentlich; es ist doch schöner, an einer Uni zu sein, wo eine wissenschaftliche Grösse das Institut leitet. Hier wird das eben allmählich ein Seichbetrieb in Kiel, wenn Kaluza und Hammerstein zu leicht prüfen und die Leute infolgedessen kaum höhere Dinge hören, wogegen F.K.S. sie zu Höherem anregt, wenn auch das

Niveau in Jena anfängl. sehr niedrig war. An sich werde ich als Assistent wenig zu tun haben; es ist fast wie ein Lehrauftrag. Die schöne Kieler Umgebung verlasse ich zwar ungern für immer. Aber im düsteren Winter ist der Abschied weniger schmerzlich, wäre sogar verlockend, wenn man hier immer nur den Sommer hätte. Und den hab' ich hier ausgiebig genossen; habe jetzt noch viele schöne Spaziergänge an der Meeresküste und ins Land hinein an die Seen gemacht und im Meer geschwommen. Die Seite, auf der ich wohne, ist auch besonders schön. Womöglich komme ich nächsten August vor dem Osloer Kongress mal wieder her.

Es freut mich sehr, dass Sie es in Cambridge so schön finden. Hoffentlich können Sie da was Festes bekommen? Würden Sie da gern immer leben? Ich hätte wirklich Lust, auch eine Zeitlang mal dort zu sein, vielmehr als in Amerika. Vielleicht macht sich's mal für ein Semester. Nun werde ich freilich wohl etwas bodenständiger werden in Jena. Hatte ich zwar auch von Kiel geglaubt. Aber da war's ja nun so unsicher mit der pekuniären Seite bestellt. Auf F.K. Schmidt kann ich mich auch in dieser Hinsicht verlassen. Sollte es offiziell nicht klappen, könnte ich mich ja dann immer noch an Ore wenden. Vorläufig kommt das aber nicht in Frage. Vielen Dank aber jedenfalls für die Angabe der Daten.

Mit meiner Mutter hab' ich eine schöne Zeit hier gehabt. Vom 13. Juni – 3. Aug. Dann 2 Tage Hamburg zusammen. Dann war sie noch am Rhein, und jetzt ist sie bei meiner Schwester, die jetzt viel Arbeit hat, da sie schon einen ganzen Monat ohne Hausmädchen ist. Sind schwer zu bekommen. Der Niki ist schon kräftig, kann allerhand Gegenstände tragen. Zähne hat er noch wenig. Dass er eifrig das Radio betätigt, erzählte ich wohl schon.

Sonst ist noch zu berichten, dass mein Lehrer Neiss, der bisher in Halle Privatdoz. war, an die Berliner Uni versetzt wurde.

In Stuttgart[1)] werde ich über Gruppen- und Körpererweiterungen vortragen. Auch im Zusammenhang mit den Magnusschen Sachen. Hauptsächl. anschliessend an Tschebotarjow.

Ich vermute übrigens durchaus, dass es bei festem Kommutatorfaktor vom Typ $(3,3)$ einen unendl. Gruppenturm mit endl. $\mathfrak{G}^{(\nu-1)}/\mathfrak{G}^{(\nu)}$ gibt. Dass es dazu keinen *absoluten Klk*turm über Kreiskörper K° vom Typ $\underline{(3,3)}$ gibt, wird einfach daranliegen, dass die in K° Verzweigten weiter in $\overline{K^\circ}$, $\overline{\overline{K^\circ}}$, ... schliesslich so zerfallen, dass sie nicht mehr voll zerfallen. Dies lässt sich aber bestimmt beheben, wenn man "Hilfsprimideale" q als Führer passend wählt. Es wird also vermutlich möglich sein, $K^\circ = K_7^3 \cdot K_{181}^3$ oder $K^\circ = K_9^3 K_{73}^3$, da $\left(\frac{7}{181}\right)_3 = \left(\frac{181}{7}\right)_3 = \left(\frac{9}{73}\right)_3 = \left(\frac{7^3}{9}\right)_3 = 1$, zu einem unendlichen nicht-absoluten Klk. turm zu erweitern. $K_7^3 K_{181}^3$ hat erst mal eine durch 3 teilbare Klz. Diesen Klk. darf ich aber nicht nehmen (weil die Klz. nicht durch 9 teilbar), da die Vollverzw[eigt]h[ei]t der Diskr. teiler nicht erfüllt sind in ihm. Bei passendem Führer q erhält man weiter zwei Basiskl. d. Ordg. 3 in $K^\circ(q)$, Klk. mit Führer

q über K°. Jetzt sehe man wieder nach, was die Diskr. teiler im zugehörigen abs. Klk. machen, veredle ihn evtl. mit einem Führer u.s.w.

Herzlichen Gruss!

Ihr Noldi.

Anmerkungen zum 27.08.1935

[1] Jahrestreffen der DMV.

4.47 11.09.1935, Scholz an Taussky

11. IX. 35.

Arnold Scholz	H I N T E R Z A R T E N
z. Zt. Freiburg i. Br.-Günterstal	Hinterzarten (Schwarzwald)
Im Entengarten 6	Pension Imberg
[bei Temesvary]	17.-21. Sept.

Liebe Oli!

Vielen Dank für Ihren lb. Brief und das Separat! Waren Sie also schon lange wieder in Wien (während des Sommerkurses auch schon?) und machte mein letzter Brief einen Umweg! Wegen der Enzyklopädie habe ich einfach an Teubner geschrieben, er möchte noch je einen Abzug von C3 und C8 an Fw. senden. Das ist die richtige Adresse, von der man sich alle Abzüge holen soll! Sie können sich ja dann den C8 von Fw. ausbitten. Ich besitze sowieso nur ein vielleicht mit dem Abzug nicht ganz übereinstimmendes Konzept meines C8, weil ich bei der endgültigen Abfassung das Konzept oft nicht vollst. verbessere. Hasse schlug mir ausserdem noch einen (Artikel) Kapitel über Kreiseinheiten, Gausssche Summen ... vor, das ich aber Fw. gern überlasse, wie ich schon schrieb. Ich beginne mit Kap. 4 $\rightarrow$ 9 Zitate hab' ich erst willkürl. angegeben, wie sie mir einfielen. In 9 kommt auch Ihre Hauptidealsatzverschärfung in Betracht, wo Sie ja, wie mir gerade einfiel wohl zum ersten Mal deutlich darauf hinweisen, dass ein Körper keinen Oberkörper der Klassenzahl 1 haben kann, wenn sein Klkturm unendlich. Dies ist Aufgabe 192 D.M.V. (Holzer). Bei der "Lösung" suchte ich erst in unserer gemeinsamen Note nach Zitat, fand aber keins, erst jetzt fiel mir ein, dass es wohl in Ihrer J.f.M 168 steht[1)].

Es freut mich sehr, dass Sie sich in Cambridge so wohl fühlen. Hoffentlich haben Sie da noch mehr als ein weiteres Jahr. Eine Günterstälerin, Frau Gottschalk, hat jetzt ein Stipendium (entw. philos. oder oriental.) als Research Fellow für 3 Jahre nach Cambridge ins Newnham- oder Lucy-College.[2)] (Sie werden schon entziffern können, welches College gemeint ist.) Sie meinte, dass Sie sich sicher kennen lernen würden, was sehr nett wäre. Gab ihr Ihren Namen und Girton College an. Der Mann von Frau Gottschalk ist auch Orientalist, hat Bez. in England und ist der Sohn eines hiesigen Psychologen.

In Kiel wird es im Winter tatsächlich leer werden: Kaluza geht nach Göttingen. R. Schmidt an die Marine-Schule als Spezialist für Ballistik, liest nur noch nebenbei, und ich nach Jena. Festen Vertrag hab' ich allerdings immer noch nicht. Sollte man mich nach Kiel zurückhaben wollen wegen der Vakanz, so müsste man mir schon eine Vertretung geben. Lieber wär's mir,

ich wär im Winter wirklich mal in Jena und man beriefe mich dann gleich im Sommer nach Kiel, falls die Kaluzasche Stelle wieder besetzt werden soll. Jedenfalls sind die Chancen für mich günstiger, wenn ich inzwischen mal weg bin von Kiel. – Ist natürlich nur so ’ne Idee. Habe keinerlei sichere Anhaltspunkte.

Zum Gruppenturmproblem:

Nehmen Sie die freie Gruppe $F = \{S, T\}$ von zwei Erz.! Fügen Sie als definierende Rel. hinzu: $S^\ell = T^\ell = C^\ell = 1$, wo C alle Kommutatoren von F durchläuft!

Für diese Gruppe $\mathfrak{G}$ gilt bestimmt:

$$\mathfrak{G}^{(\nu-1)}/\mathfrak{G}^{(\nu)} \quad \text{endlich}$$

und vermutlich:

$$\mathfrak{G}^{(n)} \neq 1.$$

Endlichkeitsbeweis: $\mathfrak{G}'/\mathfrak{G}''$ ist endl., weil symbolisch erzeugt aus Kommutator (S, T) endl. Ordg.; also überhaupt Ab. Gr. von $\leqq \ell^2$ Erzeugenden der Ordg. ℓ. Schluss von $\mathfrak{A}^{(\nu-1)} = \mathfrak{G}^{(\nu-1)}/\mathfrak{G}^{(\nu)}$ auf $\mathfrak{A}^{(\nu)} = \mathfrak{G}^{(\nu)}/\mathfrak{G}^{(\nu+1)}$:

$\mathfrak{A}^{(\nu)}$ wird symbolisch erzeugt aus den Kommutatoren der k Elemente von $\mathfrak{A}^{(\nu-1)}$; das sind höchstens $\binom{k}{2}$ Kommutatoren endlicher Ordg. Transformiert man diese nun noch mit allen k' El. der Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^{(\nu)}$, so kommen höchstens $k'\binom{k}{2}$ Erzeugende der Ab.Gr. heraus, die alle wieder nur die Ordg. ℓ haben. (oder Ordg. 1). Im ganzen ist $\mathrm{Ord}\,\mathfrak{A}^{(\nu)}$□□□ $\lesssim \ell^{\{\mathrm{Ord}\,\mathfrak{A}^{(\nu-1)}\}^2}$, sogar ein Klein o.

Dass $\mathfrak{G}^{(n)} \neq 1$, hab’ ich noch nicht raus; scheint schwierig. Sie dürfen meine früheren Briefe nicht darauf prüfen; dort habe ich die verschiedenen Unendlichkeiten nicht genügend auseinandergehalten. – Sie halten die Existenz *abs. un*endlicher Klk.türme doch für möglich (Hier hab’ ich Sie wohl gerade falsch rum verstanden; Sie bezweifeln die Fortsetzbkt. der Gruppentürme.)? Ich kann mir nicht denken, dass “mit der Stetigkeit ins ∞ e wachsende El.-Ordg.“ hier was helfen könnten. Die Trägheitsgruppen des ganzen absoluten Körpers bleiben ja ganz unberührt davon; ihre Ordg. bleiben dieselben, sie müssen zerfallen. Aus einer unendl. Fülle *immer wieder neu verzweigter* Körper wird das ein $\to 0$ abnehmender Prozentsatz tun. Es ist nach meinen bisherigen Körperth. Erfahrungen unwahrscheinlich, dass darunter ein unverzweigter Klk. turm ist.

Magnus wird wohl leider nicht nach Stuttgart kommen, da er wahrscheinlich in die Danziger Dozentenakademie muss.

In Kiel ist ein riesig netter Germanist: Höfler (Österreicher), mit dem ich auch noch in den letzten Tagen beisammen war. Er studierte auch SS 1927 in Wien. Neulich zählten wir uns mal die Wiener Bezirke auf, wobei sich herausstellte, dass ich sie besser wusste, obwohl seine Verwandten in Hietzing ein

Haus haben. Mir fiel gerade nur noch ein, dass IX Alsergrund heisst. Beide haben wir trotz Krampfhaften Nachdenkens nur VII nicht herausbekommen; dabei ist doch VII ein recht bedeutender Bezirk. Erst verfielen wir auf Josefsstadt; das ist aber VIII. Er griff noch zu Margarethen und Mariahilf, aber das sind V und VI. Fünfhaus ist XV und Rudolfsheim (mit Sechshaus) XIV. Wenn man von Hietzing (XIII) in die Stadt fährt, kommt man durch VII.

In Hamburg besuchte ich Sonntag, 1., Artin, wo wieder Hausmusik war. Montag noch meinen Schüler Hannink. Reiste nachts bei verdunkeltem Wagen und Bahnhöfen (Übung) nach Fbg., wo sich nach anfängl. Regen wieder prächtiges Wetter einstellte. Wohne bei musikalischer Familie; Sohn Stefan wird Mathematik studieren. Viel nette Bekannte wiedergetroffen. Am 17. geh' ich noch auf 5 Tage nach Hinterzarten (900m), wo ich noch etwas ungestört arbeiten will bei guter Verpflegung. 22. Sept. fahr ich zur Tagung nach Stuttgart, 28./29. etwa werde ich mit F.K.S. gemeinsam nach Jena fahren, dort bis 4. Okt. etwa bleiben; dann zur Eli. Ende Okt. nach Jena. Denke mir dann eine 2. Z.-Wohg einzurichten, mit Flügel. Meine Mutter kann dann auch mal bei mir wohnen, bevor sie selbst wieder eine Wohng nimmt.

Magnus' $\sum(-1)^i s^i$ sind schon deswegen völlig korrekt, weil die Glieder steigende Dimension haben. Mir war's sehr bald klar. Magnus ist ja auf manches nur andeutungsweise eingegangen!

Herzlichen Gruss!

Ihr Noldi.

Die Pontrjaginschen Sachen sind interessant, müsste mich erst mal näher mit befassen.

Anmerkungen zum 11.09.1935

[1] Ich konnte dort eine entsprechende Behauptung nicht finden.
[2] Gemeint ist wohl das Lucy-Cavendish-College in Cambridge.

4.48 23.02.1936, Scholz an Taussky, Postkarte

Breslau, 23. II. 36.

Liebe Oli!

Diesmal bin ich wieder der eifrigere Schreiber. Meinen Neujahrsbrief haben Sie doch erhalten? Nunmehr kann ich Ihnen mitteilen, dass mir die Konstruktion von Körpern mit bel. ℓ-Gruppe um die Monatswende endgültig gelungen ist. Aufgrund des Richterschen $\mathfrak{p}$-adischen Einbettungssatzes (Math. Ann. 112, 72). Die Konstr. gelingt, wie vermutet, bei voll zerf. Diskriminantenteilern, deren Norm $\equiv 1\ (\ell^h)$, wenn die Trägheitssubst. maximal die Ordg. ℓ^h erlangt. Ich nehme jetzt wirklich Minimalschritte (rel. zykl. ℓ. Grades), verwende also Kompositionsreihen, wie mir Emmy testamentarisch vermacht hat. Ihr denke ich darum diese Note zum Gedächtnis zu widmen. Furti kommt dann mal dran, wenn es mir gelingen sollte, die jetzigen Konstr. bedingungen zum "verschärften Hauptidealsatz" auszunutzen. Sein 70. Geburtstag ist nur noch etwas lange hin. Seit diesem Jahr geht es mir etwas besser. Im Januar bekam ich eine "einmalige Beihilfe zur Förderung meiner wissenschaftl. Bestrebungen". Wurde auch in die Prüfungskommission ernannt. So hoffe ich zu Ostern auf den Lehrauftrag. In Breslau hab' ich jetzt, von Feigl – der auch grüssen lässt – eingeladen, vorgetragen, fahre noch zu Verwandten aufs Land. Meine Schwester sah ich neulich noch mal vor ihrer Übersiedlung nach Brüssel. Wie geht es Ihnen? Haben Sie Frau Gottschalk kennengelernt? Grüssen Sie sie von mir! Auch Behrendt u.a. Math. in Cambridge. – In Hamburg war die Kieler Math. im Jan. Gutes Einvernehmen. Schreiben Sie mal wieder!

Herzl. Gruss. Ihr Ali.

4.49 30.08.1936, Scholz an Taussky, Postkarte

Kiel, 30. Aug. 36.

Liebe Oli!

Herzlichen Glückwunsch zu Ihrem heutigen Geburtstag! Meinen langen Brief vom 9. Aug. haben Sie erhalten? Sie sind doch jetzt wohl mal wieder zu Haus? In letzter Zeit hab' ich mich mit Minimaldiskr. beschäftigt. Die Strahlklk. mod p überm Körper der $(p-1)$-ten Ew. liefern eine unendl. Schar von Körpergraden n mit $E_n = \sqrt[n]{D_n} < (\log n)^2$. Enorm niedrig! Hasse war zuerst auf $E_n = o(n)$ f. [...] n gekommen. – Selbst der Körper der $2\cdot 3\cdot 5 \cdots q$-ten Ew. liefert bei Graden schon $E_n = \mathcal{O}\left(\frac{n \lg \lg n}{\lg n}\right)$. Für reelle Körper konnte ich bisher auch nur $E(n) = o(n)$ f. [...] n bekommen. Grüssen Sie, bitte, Furti!

Herzlichst grüsst Sie

Ihr Ali.

4.50 03.09.1936, Scholz an Taussky, Postkarte

Kiel, 3. 9. 36.

Liebe Oli!

Haben Sie vielen Dank für Ihren Brief vom 28., den ich leider erst gestern in Empfang nahm, da sich der Einzug in meine Wohng. noch bis 25. Sept. verzögert. Postalisch bin ich aber da schon zu erreichen, auch wenn ich inzwischen noch verreise, evtl. nämlich zur Math.-Tagung, wo u.a. Magnus über auflösb. Gr. vorträgt. Am Samstag – bevor ich Ihnen die Geburtstagskarte schrieb – war allerdings Ihr Brief noch nicht da, sodass sich unsere letzten Nachrichten richtig gekreuzt haben. Durchkreuzg. eines Körpers K' mit einem K° bedeutet folgendes: Die Gruppe von K° muss erstmal mit einer Untergr. von $\mathfrak{G}(K')$, etwa mit der von K'/K isomph. sein. Dann bilde man $K'K^\circ$ und schmeisse auf *andere* Weise K° wieder heraus, sodass ein Körper K'' der Eigsch. $K''K^\circ = K'K^\circ$, $[K'', K^\circ] = [K', K^\circ]$ entsteht. Dies wäre die allgemeinste Formulierg, auch bei nichtgal. K. brauchbar. Sollen aber alles Galoisk. sein, so kommt nur etwas raus, wenn die Erweiterg. $K/K_0 \to K'/K_0$ (K_0 Grundk) zentral ist, d.h. $\mathfrak{G}(K'/K)$ in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}\, K'/K_0)$. – Entspr. definiere man's bei Fktgr., wobei die Gr. bei Durchkr. ihre Struktur ändern kann, wenn sie nicht direkt ($K'K^\circ \neq K' \times K^\circ$) war.

Aufg. 208 folgt allerdings unmittelbar aus meiner Lösg. 171. Die Aussage ist sogar für bel. Grad gültig! Beweisen Sie das u. vgl. Sie v. d. W. Math. Ann. 111, 732! Senden Sie bitte Lösg. ein! Hatte Artin keine so einf. Lösg. für $n = 5$?

– Ihre Char. der Π_p-Gruppe ist sehr interessant; hat nicht O. Grün aber auch diesen Satz?

– Freut mich, dass Sie auch die schöne Bergensbanefahrt hatten. Ich fand ja Finse noch schöner. Warum sind Sie aber erst wieder nach England gefahren und warum bleiben Sie so kurz in Wien?

– Eli wohnt Bruxelles, 144 Boulevard Brand-Whitlock.

Herzlichst Ihr Ali.

4.51 04.12.1936, Scholz an Taussky, Postkarte

Kiel, 4. Dez. 36.

Liebes Fräulein Taussky!

Vielen Dank für Ihre Karte vom 4. Nov., auf die ich Sie nun 1 Monat hab' warten lassen! Aber ich bin nun gerade jetzt erst auf den Minkowskischen Verbessergsfaktor

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^s \frac{n!}{n^n} = v$$

gestossen, wonach es in jeder Idealklasse ein Ideal mit $N(j) \leqq v\sqrt{D}$ gibt. (Vgl. Gött. Nachr. 1918, S. 96) In diesem Band finden Sie überhaupt sehr viel über Klassenzahlen. $s =$ Anz. d. Paare Konj. imag. Wurzeln.

Wie mir Artin gerade schrieb, liefern die *Siegel*schen Verallgemeinergen. des *Heilbronn*schen Satzes erstaunlich viel über $h \times R$. Allgemein wohl

$$\lim \log hR / \log D = \frac{1}{2}.$$

$\log T / \log D \to 0$ (T Idealdichte). Bei reell quadr. Zahlk. schwanken erfahrgsgemäss $\log h$ und $\log R$(egulator) zw. $0 - \varepsilon$ und $1/2 + \varepsilon$. Gäbe man der Klassenzahl das gleiche Gewicht wie jeder Fundamentaleinh., so ist $\frac{1}{2(r+s)}$ als Durchschnittswert für $\log h / \log D$ zu vermuten. D. h. $\frac{1}{n}$ bei total imag. Körpern. Das spräche für ein etwaiges Konstantbleiben der Klassenzahlen im Klassenk. turm auf lange Zeit, ab und zu starkes Anwachsen und in bes. seltenem Fall, aber dann endgültig $h = 1$ werdend. Ich möchte höchstens noch vermuten, dass die *meisten* Klk. Türme abbrechen. Alle?? Ihre letzte Frage über Klassenzahlen kann ich leider nicht verstehn. Auch fragten Sie nach Exist. von Körpern in Aufg. ... (208?)

– Wenn die Klassenzahltabellen voran kämen, würd's mich freuen. Ich meine, man sollte eine geschickte Auswahl von Körpern weit genug hinauf nehmen, mit Berechng. aller Stücke der Klz.-formeln – Sodass man Bild über die „Streuung" der Grössen bekommt.

18. Dez. fahr' ich nach Bln.-Zehlendorf, Kronprinzenallee 264. Dass ich mich hier in der Kochkunst übe, erzählte ich?

Ein frohes Weihnachtsfest wünscht Ihnen

Ihr Noldi.

4.52 16.03.1937, Scholz an Taussky, Postkarte

Kiel 16. 3. 37.

Liebe Oli!

Neulich ist mir eine fast fertig geschriebene Karte für Sie abhanden gekommen. Darum will ich wiederholen, dass ich 23. März abds. bis 31. März bei Eli (144 Bd. Brand Whitlock) bin und mich sehr freuen würde, Sie auf der Durchreise zu treffen, insbes. wenn Sie uns besuchen wollen.

Ferner: hab' ich Hall schon von früheren Arbeiten Sonderdrucke geschickt, und hat er noch welche von L.M.S. 1933(?), seiner grossen gruppth. Arbeit übrig? Für seine Aufklärg. über die Darstellgr.[1)] $\mathfrak{d}_{120}$ der $\mathfrak{A}_{60}$ danke ich auch bestens. Beweisen Sie[2)]: es gibt mit Diskr. $(19.1129)^6$ sowohl normale als nichtnormale Körper 9. Grades! Ich arbeite jetzt an meiner Göschen-Zahlentheorie, bringe auch einige Tabellen.

Hoffentlich auf Wiedersehen!

Ihr Ali.

Anmerkungen zum 16.03.1937

[1]Wie es scheint, interessiert sich Scholz für die Darstellungsgruppe endlicher Gruppen aus der Theorie des Schurmultiplikators. Solche Gruppen spielen im Zusammenhang mit Normenresten eine große Rolle.

[2]Der dazugehörige kubische Körper tauchte bereits im Brief an Hasse vom 06.02.1931 auf; vermutlich ist diese Frage mit der Scholzschen Aufgabe 249 im Jahresbericht der DMV 47 verwandt.

4.53 02.05.1937, Scholz an Taussky

Hotel Metropole Bruxelles, 2. Mai 1937.

Liebes Fräulein Taussky!

"Auflösbare Gr. ungerader Ordg." ist zuviel gesagt, „zweistufige Gr. ungerader Ordg." aber zu wenig, weil da die ℓ-Gruppen bel. Stufe nicht dabei sind. Sie müssten den Text schon umstellen[1)] und sagen:

> "... wird für bel. Gruppen von ung. Primzahlpot. Ordg. (ℓ-Gruppen) gelöst. Nach früh. Erg ... (...) folgt daraus gleichzeitig die Ex. v. Kp. zu *bel. zweist.*-Gr. ung. Ord."

Stelle }# ist nicht ganz in Ordg.; es ist nur so: Die Konstr. *kann* immer gleich so geleistet werden (und dies geschieht bei mir und nicht bei Reichardt), dass ℓ unverzweigt ist. Ferner *kann* durch Kreisk. Durchkrzg. erreicht werden, dass $K_\mu/K_{\mu-1}$ nur die in $K_{\mu-1}$ (nicht K_1) verzweigten Pr. id. wieder [...] als Verzweigte auftreten, falls die zugehör. Gruppe $\mathfrak{C}_\mu$ im Kommutator liegt, $K_\mu/K_{\mu-1}$ also selbst keine Kreisk. erw. darstellt (der Abelsche Teil der Konstr. wird ja zuerst erledigt und erfordert i. allg. neue Diskr. teiler). Es wird aber für die Konstr. (vgl. 4.!) in der Regel nicht dieses minimal verzweigte K_μ genommen, sondern damit der spezielle Einbettsatz (s. Ihr Referat oben) wiederum erfüllt ist, nochmals eine Durchkreuzung von $K_\mu/K_{\mu-1}$ vorgenommen, die dann doch neue Diskr. Teiler heranzieht. Sodass $K_\mu/K_{\mu-1}$ zwar neue, aber *passend ausgewählte* Diskr. teiler hat, während beim Herausgreifen irgend eines K_μ ungeeignete Diskr. teiler auftreten könnten.

Der wesentliche Unterschied bei Reichardt ist, dass er einen selbständigen direkten Beweis des Speziellen Einbettsatzes hat, der unabh. vom Richterschen Satz ist und dessen hyperkomplexen Hilfsmittel der Körpertheorie adäquater sind als Richters. Für Reichardt kommt es ferner garnicht auf Unverzweigtheit von ℓ an. In diesem Fall fällt sogar die Zerfallsbedng. für das ℓ fort. – Reichardt geht auf die Konstruktion mit den günstigsten Mitteln (des spez. Einbettungssatzes) aus; ihn interessieren die andern Fälle nicht, die ich z. B. in 6. näher untersucht habe. Ich wollte eine möglichst breite Konstr. basis.

Bei mir kommt in 3. ferner heraus, dass der Richtersche Satz bei Grad ℓ stets über'm *rationalen* Zahlk. schon gilt, nicht nur der spez. Einbettsatz. (Dies hatte ich nicht hervorgehoben, war mir auch nicht so wichtig.)

Wir haben hier ganz überraschend schönes sonniges und warmes Frühlingswetter, gerade seit 27. März Regen und in paar Tagen jetzt alles Grün raus. 30. April mit Schweden draussen gefeiert. (Sonnenuntergang $^3/_4$ 8.) Ganz blauer Himmel. Gestern ordentl. von der Sonne verbrannt. Di fahr' ich nach Berlin auf fünf Tage, wo ich Eli und Niki bei meiner Mutter wiederseh'.

Herzlichen Gruss.

Noldi.

Anmerkungen zum 04.07.1935

[1] Offenbar hatte Taussky Scholz die Besprechung eines Artikels für die Fortschritte der Mathematik geschickt.

4.54 13.09.1937, Scholz an Taussky, Postkarte

Eisenstein, 13. 9. 37.

Liebe Oli!

Hier bin ich also wieder mal gestern gelandet, ungefähr der Tag, wo wir vor 6 Jahren abgereist. Der Lärchenhof hat sich sehr rausgemacht, Zimmer mit fl. W. und aufgestockt. Auch noch viel mehr Betrieb als damals. Während der südl. Bayer. Wald schon ausgestorben. Leider war vier Tage Regen, aber jetzt wird's wieder schön. Die alten Wiesen, Wald, Seebachschleife gefällt mir wieder, nette Erinnerung.

– Übrigens weiss ich ja Ihre Telefon-Nr. R 62465; so kann ich Sie ja nach Ankunft anläuten; denn bis zum Prater[[...]] wird's für Sie doch'n bischen weit sein. (Also je nach Ihrer Laune! Ich seh' ja, ob Sie da sind.)

Komme also jedenfalls *Do. abd.* an.

Herzlichen Gruss. Ali.

4.55 12.12.1937, Scholz an Taussky, Postkarte

Kiel 12-12-37.

Liebe Oli!

Sicher werden Sie sich über mein "Gegenbeispiel" vom 30. Nov. gewundert haben, zu Furtis Basisfrage. Das war aber falsch. Vielmehr scheint mir jetzt doch wieder Fw.s Vermutung allg. zu stimmen. Man hat eine zu Ihrer Frage inverse Frage zu beantw.: Ob der aus der beschr. Basis summierte Ausdruck

$$\prod \left(1 + S_i + \cdots + S_i^{h_i - 1}\right)$$

für alle Abelschen Charaktere $\neq 1$ Null sein kann, ohne dass es *ein* Faktor für alle Char. ($\neq 1$) zugleich ist. Mir scheint, es muss mit Abzählen gehn. Ich hab' wahnsinnig viel zu arbeiten; kann kaum was überlegen. – Sah 20th Century Fox Film: Signale nach London. – Sehr gut.

Herzlichst Ali.

Gruppenth. haben wir doch immer geglaubt, dass nicht nur die Zweiergruppen Ausnahmen machen, sondern auch jede höhere Primzahl in genüg. kompl. Fällen.

Körper vom Grade p^k, $k \geqq p$ können schlimmere Verzweigungsgruppen haben.

Weihn. bin ich Bln. Sie nicht Wien?

4.56 25.02.1938, A. Scholz und Siegel an Taussky, Postkarte

25. 2. 38.[1]

Liebes Fräulein Taussky!

Vielen Dank für Ihre letzte Karte! Der Beweis von Tannaka ist also falsch[1)] für $\ell = 2$. Also nichts neues. Bin hier auf der Durchreise, fahr' noch nach Frankfurt und Berlin.

Herzliche Grüsse! Ihr

Arnold Scholz

Der Beweis von [...][2] ist richtig für $\lambda = -\infty$. Also doch etwas neues! Trotzdem herzliche Grüsse!

Ihr Siegel

[...] herzliche Grüsse [...]

Hasse

Hel Braun

W. Magnus.

Anmerkungen zum 25.02.1938

[1]Der Fehler in Tannakas Artikel [314] wird in der Besprechung durch Reichardt und Scholz im Jahrbuch erwähnt.

[1] Poststempel vom 26. 2. 38.

[2] „Schelmufsky“ ?

4.57 04.05.1938, Scholz an Taussky, Postkarte

4. Mai 38.

Liebe Oli!

Wie geht es Ihnen? Haben Sie meine Grüsse aus Göttingen erhalten? Mit der Bemerkung, dass der Beweis von Tannaka falsch, und der witzigen Glossierung von Siegel?

Finde, dass diese Karte durch die originellen Grüsse von Siegel einen besonderen Wert hat. Für Ihre Grüsse aus dem Palais de Glace mit Eli und Niki noch vielen Dank! Hoffentlich bauen sich Ihre Lehraufträge in England zu einer festen Stellung aus! Zu Semesterschluss werd' ich mit einigen Kollegen und Studenten eine Studienreise der Univ. Kiel nach Schweden machen. Mein Göschen-Bdch. kommt langsam voran. Augenblicklich hier ganz herrliches Wetter; schöne Spaziergänge am Meer und Baumblüte. Fühle mich hier immer mehr zu Haus. Mit Eli treff' ich mich viel, im Allgäu in August.

Viele herzliche Grüsse

von Ali.

4.58 25.08.1938, Scholz an Taussky, Postkarte

25. 8. 38.[1]

Liebe Oli!

Herzliche Glückwünsche zum Geburtstag und vielen Dank für Ihre Karte aus Sussex! Nach Schottland wäre ich dies Jahr beinah auf einer Gesellschaftsreise gekommen. Irgendwann werd' ich wohl mal so'ne 6-Tagesfahrt nach London machen; die sind immer August-Sept. Jetzt bin ich mit Mutter, Eli und Niki hier, fahr' dann nach Fbg. und Baden[21)] zur Math.-Tag., wo ich auch Mayrhofer zu treffen hoffe. Er hat mich auf die Liste gebracht, im Einvernehmen mit Fw. Mein Göschen-Bdchen hab ich zu $^5/_6$ abgeliefert im Juli. "Algorithmisches Rechnen" ist im Entwurf fertig und liefere ich Ende Sept. ab. – Magnus' Verlobungsanzeige aus Hadamard & de la Vallée Poussin werden Sie erhalten haben. – Fitting[2)] ist †. Zur Tagung kommt auch Chevalley, der den rein arithm. Aufbau der Klkth. vorträgt. Hier im Allgäu hab' ich schon manch schöne Bergwanderungen gemacht.

Mit freundlichen Grüssen.

Ali.

Herzl. Gruss E. Korrodi

Anmerkungen zum 25.08.1938

[1]Baden[2] steht natürlich für Baden-Baden.
[2]Fitting hat 1932 in Göttingen promoviert und war danach als Stipendiat der Notgemeinschaft dort; Taussky dürfte ihn also persönlich gekannt haben.

[1] vielleicht auch *26. 8. 38.*

4.59 Nov. 1938, Scholz an Taussky-Todd, Fragment

[1)] [...] so die männlichen Kollegen betreffend; bei Ihnen hab' ich keine Furcht, dass Sie plötzlich weniger nett zu mir sein könnten – so werd' ich doch allmählich etwas einsam werden und vielleicht gar aus dem Grund noch heiraten. Obwohl das ja eigentlich kein echter Beweggrund ist; das muss sich doch da um den Menschen selbst handeln. Oder ich muss es mit Geschick so weiter machen, dass ich immer wieder von neuem Menschen kennen lerne, von denen ich gleich zu Anfang glaube, das könnte auf die Dauer der rechte herzliche Verkehr sein, und wenn das dann wieder abflaut, dann wieder neue (komm' grad' von so'm netten Abend.) Na, augenblicklich bin ich ja in schöner Durchgangsstimmung und hoffe weiter sehr auf Wien. Das scheint mir so die Entscheidung zu sein: wird das was, so wird alles gut; und sonst ist alles ziemlich gleich. Mein Göschen-Bändchen hab' ich zu 93% in Reinschrift, Konzept über 99%. Hoffe es diese Woche fertig zu kriegen. Eigentlich sollte es nun bis Ende Sept. fertig sein; aber es war ja alles zu aufregend. Nun hat sich alles so glücklich gelöst, und das Böhmische Eisenstein (Spitzberg!) und der Plöckensteiner See wird heut schon bei uns sein. Wenn mein Göschen-Bändchen fertig ist, hab' ich noch zwei Manuskripte für's Crelle fertig zu stellen: Gruppengeschlechter oder Abelsche Durchkreuzung und: Totale Normenreste II. Dann meinen Beitrag für die Furtwängler-Festschrift, wohl Fortsetzung über Diskr. (Sind Sie auch aufgefordert?) Dann erst Enzyklopädie-Artikel. Haben Sie gehört, dass Artin die Klassenkörperturm-Vermutung (Abbrechen!) bewiesen haben soll? Wär ja fabelhaft! Werd' ihn mal fragen:

1) ob überhaupt
2) ob mit Diskr. oder Gruppth.

Viele herzliche Grüsse und nochmal alles Gute!

Ihr Ali.

Freut mich sehr, dass Sie die Algebraic numbers schreiben!

Anmerkungen zum Nov. 1938

[1]Dieses Fragment muss nach September 1938 geschrieben worden sein; in seiner letzten Postkarte hatte Scholz geschrieben, dass er das Manuskript im September vollenden wolle. Er hofft immer noch auf die Stelle in Wien, die aber, wie er in seinem nächsten Brief schreibt, an Hofreiter ging.

4.60 09.04.1939, Scholz an Taussky-Todd

Arnold Scholz, z. Zt. 15 rue de l'industrie

Brüssel, 9. IV. 39.

Liebe Oli!

Vom heutigen Osterfest viele herzliche Grüsse, das ich mit Eli und Niki im strahlenden Sonnenschein im Parc Royal und jetzt im [...] zusammen feiere. Diese Osterwünsche werden Sie vielleicht wenigstens doch zum 3. Ostertag noch erreichen. Erst wollt' ich Ihnen schon vor Ostern schreiben; anderseits wollt' ich Ihnen besseres berichten können als im letzten Brief, aus dem Sie meine zeitweise melancholische Stimmung herauslasen (die damals, als ihr letzter Weihnachts-Neujahrsbrief ankam, für den ich Ihnen noch vielmals danke, eher gereizt war); aber das dauert vielleicht nun doch etwas lange, bis sich alles, wenn nicht wunschgemäss, so doch wenigstens zufriedenstellend regelt. Inzwischen hab' ich aber auch sehr viel nette Gesellschaft im Winter gehabt, hauptsächlich mit einer Egerländer Familie, in der ich schon ganz Hausgast bin, sodass ich oft auch wieder ausgelassener und fröhlicher Stimmung war und vor Weihnachten in meiner Behausung ein übermütiges Fest für zehn Personen (mit Tanz) gab. So hat sich im ganzen eine gleichgültige bis gelassene Stimmung ergeben. Den schlimmsten Ärger hatt' ich dadurch (bitte das ganz vertraulich zu behandeln), dass angeblich der Furti selbst es fertig gekriegt hat, den Hfr.[1] in W. an erste Stelle zu setzen (wie mag der ihm zugesetzt haben?!); dieser hat nun erst mal die Vertretung für Fw. bekommen, was noch nicht weiter schlimm wäre, aber so, als ob es definitiv sei – es sei denn, dass noch jemand Geschicktes [kann ich Ihnen nicht näher erzählen] für mein natürliches Recht auf diese Stelle, die sowieso nur Extraordinariat wird, interveniert. Werde wohl nächstens Näheres hören, wenn ich mein Vorhaben ausführe, Fw. zu seinem 70. Geburtstag am 21. April persönlich zu gratulieren. Werde mich wahrscheinlich, nachdem mein finnischer Dampfer Antwerpen-Kiel am 14. April eingetroffen, bereits 18. April wieder auf die Reise nach W. machen. Übrigens ist der Mayrhofer immer sehr nett zu mir, auch Rella.

Nun werden Sie wenigstens bald mein Zahlentheorie-Bändchen erhalten. Die zugehörigen Grüsse send' ich Ihnen voraus, da ich nicht weiss, ob man nach England in eine Drucksache eine Widmung reinschreiben darf. Ich denke, meine Eigenheiten, die ich in das Zahlentheorie-Bändchen hineinbrachte, werden Ihnen gefallen. Dies ist nun mal etwas, was ich wirklich mit Erfolg zu Ende gebracht. Hat auch viel Arbeit und Mühe gemacht, auch die Korrekturen noch, weil die ersten sehr schlecht gesetzt waren.

War überhaupt noch kein Jahr so voll von Arbeit, Enttäuschung und Vergnügen wie das Jahr 1938, und November machte sich eigentlich alles so

schön, mit Hoffnung auf W. u.a., dass ich mich freute, dass alles Vorangegangene nicht geklappt hatte; aber der Dezember brachte mir dann die doppelte Enttäuschung. Von den drei maximalen Dingen von 1938 wird sich jedenfalls die Arbeit nicht als Max. 1939 wiederholen; denn ich bin eben so abgearbeitet, dass ich oft lange pausieren muss und in schlimmen Stunden □□□ schon plante, die Mathematik überhaupt ruhen lassen zu müssen; so haben meine ersten Korr. mit Unterbrechungen sich sechs Wochen hingezogen; dazwischen hab' ich freilich noch meine Furti-Note „Abelsche Durchkreuzung" fertiggemacht. Bei der ich oft an lächerlichen Kleinigkeiten steckenblieb, was mich furchtbar nervös machte, weil es mir doch sehr peinlich gewesen wäre, gerade für die Fw.-Festschrift zu spät zu kommen. Nun erscheint diese doch erst später und werden einige Arbeiten mit Widmung in Band 47,3 vorweggenommen.

Haben Sie Furti was besonders gewidmet?

Und wie ist es Ihnen im Winter gegangen? Gefällt Ihnen Ihr jetziges Leben? Sicher doch! Treiben Sie jetzt Mathematik mit vereinten[2)] Kräften! Schreiben Sie mir gelegentlich mal wieder Näheres, ohne auf meine Erörterungen über W. einzeln einzugehen! Was ich so einzeln von Kollegen noch erfahre, so ist Schur, der über Weihnachten noch in Bln. war, in der Schweiz. Seine Frau ist nachgekommen; sie hatte mehr Steuern zu zahlen, als sie im Reich besass, und konnte darum erst raus, nachdem sie die Differenz von einer Bekannten bekommen. Alfred Brauer hatte bereits vor Weihnachten assistance-prof. in Princeton, wird aber von amerikanischen Behörden, die furchtbare Bürokraten zu sein scheinen, trotzdem noch nicht als Non-quota reingelassen. Wenigstens war das Ende Januar noch nicht so, wo ich manches in Hamburg hörte, während der Siegel-Vorträge, die sehr interessant und gut besucht waren. Siegel machte am Schluss seiner Vorträge noch schöne Witze, u.a. von dem amerikanischen Prof., der in Göttingen langweiliges Zeug vorgetragen, worauf Hilbert ihn fragte: "Das ist ja sehr schön, was Sie da vorgetragen□□□ haben, aber was fangen Sie damit an?" Antwort: „Das werde ich publishieren". – Wie ich durch Magnus höre, wird Hall im Juli in Göttingen vortragen. Wird mich sehr freuen, ihn kennen zu lernen. Werde sicher viel Interessantes von ihm lernen. Unser Semester geht ja jetzt wieder bis Ende Juli: 12. April – 29. Juli; 21. Okt. – Ende (29.) Febr. Hoffentlich bringt das S. S. 39 recht viel Gutes, von dem ich Ihnen bald berichten kann!

Herzliche Grüsse! Ali.

Obige Anschrift ist Eli's neue; sie ist im Okt. umgezogen. Eli hab' ich über meine augenblicklichen Misserfolge, die sich ja schliesslich mal in Erfolge verwandeln können, weniger unterrichtet; [...]

Ein komisches Wortspiel machte ich neulich unwillkürlich; fragte mich: "Ja, warum hab' ich das eigentlich so gemacht?", wiederholte das "Ja, warum" öfters und fragte mich dann: "Wie komme ich jetzt auf 'Java-Rum'?"

Ein Satz mit “Maxi Herber“[3]: “Trinken Sie Bowle gern süss?“ – “Naa, ich mag sie herber lieber“.

Anmerkungen zum 09.04.1939

[1]Hofreiter hat die Stelle dann auch bekommen. Scholz hatte vor Hofreiters mathematischen Arbeiten keinen großen Respekt, und Hofreiter hat nach 1941 nur noch Anfang der 50er Jahre zwei kleinere Arbeiten über die Approximation komplexer Zahlen veröffentlicht.

[2]Taussky hatte inzwischen den Mathematiker John Todd geheiratet.

[3]Maxi Herber (1920–2006) hat bei den Olympischen Spielen 1936 eine Goldmedaille im Eiskunstlauf gewonnen.

4.61 21.07.1939, Scholz an Taussky-Todd, Postkarte

21. 7. 39.

Liebe Oli!

Vielen Dank für Ihre freundliche Karte, die mich grad' an meinem Namenstag 18. 7. erreichte! Hofftl. haben Sie auf Ihrer Reise besseres Wetter als wir hier! Wir hatten's dafür den ganzen Frühling schön. Grüsse hab' ich Ihnen noch von Ph. Hall zu bestellen. Eigentlich sollte an Sie von Gött. aus eine gemeinsame Karte gehn. Sie wissen sicher, dass da 26. auf 30. Juni eine Gruppentheorie-Tagung war, wo Hall die Hauptvorträge hielt und sonst jeder einen (ich z. B. am 29.). Speiser ist ein wenig vertrottelt. Grün lernt' ich so auch mal kennen; sehr witziger Herr, früher Bücherrevisor der Fleischerinnung Bln. Bei Siegel waren die Vortragenden zu einem Erdbeeressen eingeladen. Artin dementiert, die Klk. turmvermutung bewiesen zu haben. Über meine verschiedenen Wünsche des Jahres 38 bin ich glücklich hinweggekommen. Ende August will ich in die Hohen Tauern, Salzkammergut und Böhmer Wald, anschl. 24. 9. Marienbad (D.M.V.)

Herzliche Grüsse Ihnen beiden. Ali.

5. Die Korrespondenz Elisabeth Korrodi – Olga Taussky

5.1 12.10.1931, Korrodi an Taussky-Todd

Charlottenburg, den 12. Okt. 1931.

Ihre Bilder sind übrigens reizend, das schönere mit der Kaffeekanne nahm ich mir und gab das andere Ali. Sacro egoïsmo!
E mille grazie!!!

Liebe Oli.

Sie werden sich gewiss schon wundern, dass ich Ihnen auf Ihren lb. Brief so spät antworte; an der Schachaufgabe liegt's nicht etwa, die Sie mir so netter Weise einlegten, ich kriegte sie sogar verhältnismässig schnell raus und fand sie auch sonst besonders herzig! eher lag's an einer anderen Schachaufgabe, die ich doch selber erst lösen musste, ehe ich sie Ihnen stelle und die mir etwas schwerer wurde. Mein Säumen hat aber noch andre Gründe. Der kleine Wengemuth, der mich in Leipzig so gut herumführte, war nach Berlin zu Poppow's[1]eingeladen (auf Sonntagskarte) und sollten auch wir Samstag–Sonntag mit ihnen Allen zusammen sein, wovon ich Ihnen nach fait accompli berichten wollte. Wir haben uns ganz nett unterhalten, wieder viel schlimme Witze erzählt und [...] und anständige (etwas muss doch wenigstens anständig sein) Bowlen getrunken. Ein bildschöner Musiker war auch eingeladen und redete ebenso eingebildet wie sein kleiner Eisensteiner College. A propos [...] der kommt morgen angekleckert und ich werde mit ihm seine 7 Sachen einkaufen gehen. Dafür kriege ich einen Strauss Astern, den er mir eigens aus Marburg mitgebracht hat, wie er mir telefonisch glaubhaft versicherte.

A propos Blumen, schickte mir neulich Jacoby[1)] einen prächtigen Strauss Rosen (blutrote Rosen!!!) nicht etwa aus Leipzig; ach nein, er war bereits hier und trafen wir uns alle (er und Hamburger[2)] und Ali und meine schöne Freundin Bärbel) in unserem italienischen Stammlokal und landeten schliesslich im Kakadu, wo wir viel Absinth und Cocktails tranken. Überhaupt wird hier das Elsterer unsolide Leben ganz nett weitergeführt. Jacoby ist schon wieder weg. Hamburger bleibt noch bis November. Und Prof. Fischer[3)] hab' ich in Leipzig genossen. Er fuhr mit meinem Zug von Elster ab. So musste ich Leipzig in Wengemuth + Fischer teilen. Jacoby mit seinem Wagen wär' mir schon lieber gewesen und er hat mich tüchtig ausgeschimpft, als er hörte, dass ich in Leipzig war. Dabei hatte ich schon vorher sowas erzählt, meine ich. Mir soll's Wurst sein. Das schönste von allem war doch Elster, nicht? Ich denke mit Wonnegrunzen daran zurück. Ich freue mich, dass Ihnen Eger so

[1] undeutlich

gut gefallen hat; glaube und hoffe aber doch, dass Sie eher mal Gelegenheit haben werden, nach Berlin zu kommen als ich nach Wien, was nämlich sobald nicht möglich ist. Lust hätte ich schon, auch grosse Neugier, Linz kennen zu lernen, wo's doch so nette Menschen geben soll. Der Kleine Franzl [...] schreibt mir übrigens fleissig. [...] erst auch, er scheint pikiert, dass ich mehr mit'm Franzl correspondiere. Von Poppow's[2]und Wengemuth soll ich Sie herzlichst grüssen. Wir haben Ihrer bestens gedacht. Auch Hamburger spricht immer – fast so wie ich – mit grösster Begeisterung von Ihnen. Von Ali kann ich Ihnen noch kein Bild mitschicken, später mal. Vorläufig müssen Sie mit meinen „zsammdetschten Ofenrohren" vorlieb nehmen. (Anbei: Bild + ?Schachaufgaben bzw. -Lösungen) 1000 herzl. Grüsse von Ihrer

Eli Scholz

Anmerkungen zum 12.10.1931

[1]Vielleicht Sidney Jacoby, der zuerst in Heidelberg und dann in Berlin Jura studiert und 1934 dort promoviert hat.

[2]Hans Hamburger (1889–1956) war von 1922 bis 1924 Professor für Mathematik in Berlin, ab 1924 dann ordentlicher Professor in Köln. 1935 wurde ihm von den Nationalsozialisten die venia legendi entzogen; er zog nach Berlin und floh 1939 nach England, wo er von 1941 bis 1947 als Lecturer in Southampton arbeitete und Freundschaften u.A. mit Margaret Grimshaw schloss, die später seinen Nachruf im Journal of the London Mathematical Society veröffentlichte. 1947 ging er an die Universität in Ankara und kehrte erst 1953 wieder nach Deutschland zurück, nachdem er wieder den Titel eines ordentlichen Professors in Köln erhalten hatte.

[3]Ernst Hugo Fischer (1897–1975) hat von 1918 bis 1921 in Leipzig Geschichte, Psychologie und Indologie studiert, wurde dort 1921 promoviert und 1925 habilitiert, war danach dort Privatdozent und von 1938 bis 1939 Professor. 1938 emigrierte er zuerst nach Norwegen und dann nach England; 1949 war er Gastprofessor in Benares, und 1956 kehrte er nach Deutschland zurück und nahm einen Ruf nach München an.

[2] undeutlich

5.2 10.04.1950, Korrodi an Taussky-Todd

Zürich, den 10. April 1950.

Liebe Oli,

Dein lb. Brief ist nun wohl schon einen Monat hier, und dabei hätte ich am liebsten gleich geantwortet, da es mich doch so freut, daß Du jetzt den Nachruf auf Ali machen willst. Da aber unser Haus ein äußerst unruhiges ist, finde ich nie die stille Stunde der Concentration, und so musste es erst Ostermontag werden und der Papi mit der Kinderschar ausfliegen, bis ich Dir die gewünschten Daten aus Arnolds Leben mitteilen kann.

Zunächst aber möchte ich Dir und Deinem Gatten noch nachträglich ein frohes Ostern oder, da es doch vorbei ist, einen fröhlichen Frühling wünschen. Und noch eine Frage: ist Hyattsville nun Eure Stadt auf lange Sicht, oder geht Ihr noch wo anders hin? Für Amerika scheint Ihr Euch ja jedenfalls entschieden zu haben, und hoffe ich, dass es Euch gut gefällt.

Mit meiner Mutter zusammen konnte ich also Folgendes zusammenstellen:

Arnold S c h o l z , geb. 24. Dezember 1904 in Berlin-Charlottenburg. Sohn des Prof. Dr. Reinhold Scholz (Physiker u. Mathematiker), Abt.–Vorstand am Militär–Versuchsamt.

Von Ostern 1911 – Ostern 1923 (Abitur) besuchte er die Vorschule und das Kaiserin-Augusta-Gymnasium in Charlottenburg. (Nebenbei hatte er Klavier- und Violin-Unterricht, sowie Harmonie-Lehre im Benda'schen Conservatorium in Charlottenburg).

Ab 1923 studierte er an der Berliner Universität, z. T. mit Stipendium: Mathematik, Philosophie und Musikwissenschaft. Schüler von I. Schur. Sommersemester 1927 Universität Wien als Schüler von Ph. Furtwängler. Im Juli 1928 promovierte er in Berlin (magna cum laude), wo er bereits vor Beendigung des Examens die Assistentenstelle bei Prof Erhard Schmidt erhielt. Ab 1929 Assistent bei Prof. Heffter in Freiburg. Dortselbst Habilitierung 1930. Als Prof. Doetsch nach Freiburg berufen wurde, ging A. im Okt. 1935 als Privatdozent nach Kiel, wo er im Jahre 1936 einen Lehrauftrag erhielt und in die Prüfungskommission berufen wurde. Er arbeitete dort mit Prof. Hammerstein, später mit Prof. Lettenmeyer.

Im Mai 1940 wurde er eingezogen und nach kurzer Ausbildung als Funker nach dem Osten geschickt. 1941 wurde er als Lehrer f. Math. an die Marineschule Flensburg-Mürwik kriegsverpflichtet. Im dortigen Lazarett starb er am 1. Februar 1942 nach kurzer schwerer Krankheit u. wurde am 4.2. auf dem Marine-Friedhof (Friedenshügel) begraben.

Das sind so die Hauptdaten seines Lebenslaufes. Vielleicht noch zu erwähnen,

dass er während seiner Berliner Studentenzeit dem Kath. Studentenverein "Askania" angehörte und später niemals Parteimitglied wurde, aber letzteres weiß man ja sowieso. Für den Fall, dass in so einem Nachruf auch Einiges über den Menschen (nicht nur über den Mathematiker) ausgesagt wird, gebe ich Dir noch einige Tips über seine Liebhabereien, wovon Du zwar selbst das meiste schon wissen wirst, wie Du ja auch seinen Charakter und seine Qualitäten so gut kennst, daß ich nichts hinzuzufügen habe.

Mathematik und Musik sind gleichsam seine Musen, und zwar gleichrangig, nicht eine vor der andern. In der Mathematik schafft er Objektives, in der Musik reflektiert er Subjektives. (Schubert, als letztes spielte er die B-Dur Sonate, die er am meisten liebte, Beethoven). Es ist also das eine seine größte Gabe, das andere sein größter Genuss. Das eine seine Berufung, das andere seine Erhöhung, (wenn man so will).

Seine Religiosität ist stark ausgeprägt, d.h. es ist die kindliche Frömmigkeit des reinen Menschen, des Gott nahen.

Im übrigen ist er Aesthet (z.B. den Frauen gegenüber) und Humorist (z.B. in der Kunst; er liebt Breughel, er liebt Heine, er liebt Morgenstern).

Er hat sich erst spät für Malerei und Literatur interessiert (im Gegensatz zu mir, daher fiel es mir so auf). Sein Lieblingsbuch war dann schliesslich: Gogol "Die Toten Seelen".

Ein grosser Sportler war mein Bruder nicht. Er begnügte sich mit Schwimmen und Wandern, allerdings wurden daraus ganz schöne Bergtouren, ein bischen Skilaufen kam hinzu.

Also Berge und Reisen, das waren seine liebsten Erholungen und von allen Städten Wien die bevorzugte!

Von Wien zum Wein ist nur eine kleine Umstellung, und den Wein darf man bei Ali nicht vergessen, er spielte eine edle Rolle in seinem Leben, und Ali war nicht nur Genießer, sondern auch Kenner dieses geistigen Getränks (er hat verschiedene Preise gewonnen in Gestalt von Weinkistchen, u. ist auch mal von einem Wirt zur Neubestellung von Weinen zu Rat gezogen worden, worüber mir Ali ganz stolz in einem Briefe berichtete).

Dies alles mag Dir zur Information dienen, nimm heraus, was Du brauchst, denn ich habe ja keine Ahnung, wie solche Nachschriften aussehen. Das Sonett, das ich Dir mitschicke, passt ja höchstwahrscheinlich nicht hinein, widme es Dir aber in Erinnerung an unsere gemeinsame Freundschaft.

Von Ali möchte ich da noch sagen: er war ein treuer Freund, einer von denen, die auch treu sind, wenn Mut dazu gehört, und das ist eine ziemlich seltene Eigenschaft; er verdient also schon einen schönen Nachruf, und ich danke Dir sehr, auch im Namen aller, die ihn gernhatten, dass Du diese grosse Mühe übernehmen willst.

Herzlichst grüsst Dich
Deine Eli

5.3 25.03.1951, Korrodi an Taussky-Todd

Zürich 8, Ostersonntag, 25. März 1951.

Liebe Oli,

Soeben hörten wir, meine Mutter und ich, das C-Dur-Quartett von Schubert am Radio, das schöne, das Ali so liebte; u. das passt gut zu meinem Vorhaben, Dir endlich heute zu schreiben. Seit Empfang Deines lb. Briefes mit dem Nachruf, hatte ich Tag für Tag vor es zu tun. Bin aber seit Monaten ohne Mädchen u. derart mit dem Hausbetrieb belastet, dass ich abends fast umsinke u. einfach zu müde bin. Jetzt hilft mir endlich eine Stundenfrau, bis eine neue Maid kommt, die ich aus Kärnten erwarte. Zu 4 Kindern findet man halt nicht so leicht eine. Umso mehr muss ich Dich bewundern, dass Du bei all Deiner wissenschaftlichen Arbeit u. in neuer Stellung noch Zeit fandest und die grosse Mühe auf Dich nahmst, den Nachruf auf Ali zu schreiben.

Meine Mutter und ich waren sehr gerührt über diesen treuen Freundschaftsdienst an unserem lieben und grossen Toten. Keiner war auch dazu so berufen wie Du, da niemand diesen gleichzeitigen Einblick hatte in seine Persönlichkeit *und* sein Werk, wenn er auch viele Freunde unter seinen Kollegen besass.

Was also den 2. Teil des Nachrufes betrifft, so kann u. brauche ich da ja gar nicht mitzureden; aber imponieren tat er mir gerade gewaltig: welche Schaffensfülle in diesem kurzen Dasein! Und meine Mutter sagte dazu „Dabei merkte man fast nie, dass er arbeitete, das meiste erledigte er auf Waldspaziergängen." So erkläre ich mir auch heute seine von uns sogenannten „Bocksprünge" um den Tisch herum, als er noch klein war u. auch später noch während der Schulzeit. Er war dabei geistig völlig abwesend, d.h. also völlig von seinen Gedanken absorbiert, sodass er nicht einmal merkte, wenn wir ins Zimmer traten.

Was nun den 1. Teil des Nachrufs betrifft, den sie beurteilen können, so hast Du ihn sehr schön geschrieben u. bewiesen, dass Du Ali ausgezeichnet verstanden hast. Gut gefallen hat mir der Schur'sche Satz "More Landau, less Goethe"[1)], wovon ich noch nicht gehört hatte. Das erinnert mich übrigens an einen Ausspruch seiner Freunde. Die Mathematiker machten Hausmusik, u. als einmal bei uns so ein Abend war, spielten mein Bruder u. ich vierhändig die „Liebeswalzer" von Brahms. Nachher sagten sie, Ali habe die „Liebe" gespielt und ich den „Walzer".

Sein kindlich frommes Gemüt hast Du übrigens in dem Bericht unterschlagen. Ich überlasse das natürlich ganz Dir; nur fand ich, dass es einen wichtigen Teil seines Wesens ausmacht u. wahrscheinlich direkt mit seiner Schöpfernatur zusammenhängt.

Dagegen hast Du *mich* ordentlich herausgestrichen, sodass ich fast verschwunden bin; obwohl es mir natürlich wohltat, dass Du so nett von mir denkst. Aber ob die andern Mathematiker, die mich kennen "a beautiful and elegant girl" nicht etwas übertrieben finden werden? Darf ich Dich bitten „Eli" in „Elisabeth" umzuändern, da ja auch „Arnold" und nicht „Ali" geschrieben wird? Thank you very much.

Dann dachte ich noch, könnte vielleicht bei dem Satz: He died on February 1, 1942 erwähnt werden „im Alter von 37 Jahren" oder „mit 37 Jahren", was meinst Du dazu?

Ich vergass damals in meiner Zusammenstellung Prof. O.H. Keller zu erwähnen, der immerhin als letzter Freund bis zum Schluss mit ihm zusammen war und als einziger von uns allen an seinem Krankenlager stand. Ich schicke Dir auf alle Fälle eine Abschrift seines Berichtes mit, um den ich ihn seinerzeit gebeten hatte. Falls dieses Dokument Dir für den Nachruf nicht mehr dienen sollte, denke ich doch, dass auch Du gerne Einblick gewinnst in die letzten Tage meines Bruders. Für mich ist dieser Brief eine Kostbarkeit geworden. Ich war nicht dabei und nun ist es, wie wenn ich dabei gewesen wäre.

Wie knapp vor seinem Tode er sein letztes Manuskript beendet hat!

Nach seiner letzten unvollendeten Artikelserie (No. 27! meine Lieblingszahl; *er* mochte sie auch gern) forschte einmal Hasse bei uns nach. Ist es denn verlorengegangen? Falls meine Mutter es mit den übrigen Papieren in Flensburg verpackt u. nach Schlesien geschickt hat, wird es allerdings, wie alles dort, auch seine Kieler Sachen: Manuskripte, Bücher, Möbel rettungslos verloren sein.

Danke Dir auch noch für Deinen 1. Brief vom Januar, auf den ich ebenfalls säumig blieb. Was Du nur von mir denken musstest! Halt uns bitte weiter auf dem Laufenden u. sei für Deine [...] Arbeit von Herzen bedankt von meiner Mutter u. mir. Gruss von Haus zu Haus

D. Eli.

Anmerkungen zum 25.03.1951

[1]Taussky schrieb den Nachruf auf Englisch; als Hasse ihr mitteilte, dass ein Nachruf auf Scholz doch besser in deutscher Sprache geschrieben werden sollte, wurde der Artikel dann von Eva Erdélyi ins Deutsche übersetzt.

5.4 22.07.1951, Korrodi an Taussky-Todd

Zürich 8, 22–VII–51.

Liebe Oli,

Leider gingen wieder ein paar Monate hin, bevor ich meinen Vorsatz, Dir zu antworten, ausführe. Dabei habe ich kaum einen Tag vergehen lassen, ohne daran zu denken, dass ich es eigentlich tun möchte.

Inzwischen habe ich wenigstens an Hasse ein Bild von Ali geschickt u. von ihm Antwort erhalten, dass es ihm passe für den Abdruck. Bei der Gelegenheit (Das war schon im Monat Mai. Bin ganz schuldbewusst, dass ich soviel Zeit verstreichen liess, denn schon damals meinte er, dass er *immer noch* keine Zusage von Dir habe.) bat er uns, Dich noch einmal zu bestürmen, dass Du doch bitte Ali's Manuskript vollenden wollest. Er schreibt: „Vielleicht hilft es, wenn Sie ihr einen Brief schreiben, dass Sie doch grossen Wert darauf legten, dass gerade sie als vielleicht beste mathematische Bekannte Ihres Bruders diese Arbeit übernimmt. Ich wüsste wirklich niemand anders als sie, an den ich mit dieser Bitte herantreten könnte."

Damit, dass ich auch grossen Wert darauf lege, hat er ganz recht; nur trau ich mich nicht, Dich einfach so zu drängen, da es doch eine (für mich jedenfalls) unvorstellbar schwere Aufgabe ist, mühsam u. langwierig auf alle Fälle, das mathematische Werk eines andern fortzusetzen.

Schon der Nachruf war ein ganzes Stück Arbeit, und ich bin Dir schon so dankbar, dass Du das so schön gemacht hast. Deine Frage nach wieviel Separaten ist nicht so einfach zu beantworten. Wenn sie Dir unbeschränkt zur Verfügung stehen, würde ich 9 erbitten; sonst würde ich mich zum Beispiel mit 3 begnügen: eins für meine Mutter, eins für Niki, eins für mich.

Wie geht es Dir sonst? In Amerika bist Du nun sicher ganz eingelebt, insbesondere als Du gewiss viele Unbekannte aus dem alten Europa dort wiederfinden wirst. Hier in der Schweiz begegnet man dauernd Leuten, die nach drüben weiterwollen. Die Schweiz ist nur so ein vorübergehendes Durchgangsland; das Ziel fast immer Amerika. Besonders viel komme ich – durch meinen Bridge-Club – mit Ungarn zusammen u. die meisten sind bereits weitergeschwommen über den grossen Teich.

Nett wäre es aber, wenn Dich ein Kongress oder einfach Sehnsucht nach der alten Heimat mal wieder in unsere Längengrade führen würde u. wir ein gemütliches Wiedersehen feiern könnten.

Meine Kinder sind in den Ferien, daher reichte die Musse endlich mal zu einem Brief. Nur `[...]`[1] ist da. Wir fahren nächste Woche mit ihm nach Zermatt während des Urlaubs meines Mannes.

[1] s.o.

Mit vielen herzlichen Grüssen von Haus zu Haus

Deine Eli

5.5 20.12.1952, Korrodi an Taussky-Todd

Zürich 8, 20. Dez. 52.

Liebe Oli,

Seit fast einem Monat ist nun schon die grosse Überraschung, der lang erwartete und dann fast nicht mehr erwartete Nachruf in meiner Hand. Am meisten freute mich dabei, dass er mit meiner Geburtstagspost eintraf u. so an diesem Tage bei weitem mein schönstes Geschenk wurde!

Hab vielen lieben Dank dafür wie für die grosse Mühe, die Du Dir gemacht hast. Wenn auch mein Bruder gewiss einen solchen Nachruf von Freundeshand verdiente, ist doch nicht jeder Freund bereit oder berufen, diesen verdienten Liebesdienst zu erweisen, und es freut mich besonders, dass *Du* diejenige warst und sein konntest und nicht etwa ein anderer.

Wie geht es Dir jetzt und wann kommt Ihr mal nach Europa? Siehst Du ab und zu Mathematiker des alten Kreises und aus den guten alten Zeiten?

Ich habe oft Heimweh danach, besonders nach jener natürlich–geistigen Atmosphäre, in der wir damals – bei aller Lebenslust – uns bewegten. In meiner Familie jetzt finde ich diese geistige Grundstimmung nur bei Niki wieder (vielleicht noch Monika?). Doch scheint ihm eine ausgesprochene Begabung zu fehlen, die meinem Bruder von Anfang an den Lebensweg so leicht u. deutlich zeichnete.

Es war lieb, dass Du Niki namentlich erwähntest (ich empfinde da auch einen inneren Zusammenhang); nur hättest Du mir nicht soviel Beachtung schenken müssen, denn ich fühle mich doch immer irgendwie als der „intellektuelle Abfall“ der Familie. Dementsprechend habe ich mich seit einiger Zeit ganz der Bridge–Leidenschaft ergeben!

Mit herzl. Grüssen von Haus zu Haus u. nochmals von Herzen dankend, wünsche ich Dir und Deinem lb. Gatten recht frohe Weihnachten und ein glückliches Neues Jahr!

Deine Eli.

Teil IV

Briefwechsel Hasse–Taussky

6. Die Korrespondenz
Helmut Hasse – Olga Taussky

6.1 24.08.1930, Taussky an Hasse

Wien, 24. 8. 1930.

Sehr geehrter Herr Professor!

Ich erlaube mir Ihnen gleichzeitig meine Dissertation, die ich im vergangenen Jahre bei Herrn Professor Furtwängler verfaßt habe, zu übersenden. Sie beschäftigt sich im Anschluß an eine noch nicht aufgezeichnete Arbeit von Herrn Professor Furtwängler[1)] mit der folgenden Frage: sei

$$c_1^{x_1}\, c_2^{x_2}\, \cdots\, c_n^{x_n}\ ,$$
$$x_i = 0,\, 1,\, \ldots\, \ell - 1\ ,\ i = 1,\, 2, \ldots\, n$$
$$\ell \text{ eine Primzahl}$$

eine Basisdarstellung der Klassengruppe eines algebraischen Zahlkörpers. Gibt es dann n Unterkörper des Klassenkörpers über k, k_1, k_2, … k_n von den Relativgraden ℓ in Bezug auf k, sodaß jeweils c_i in k_i in die Hauptklasse übergeht[2)]. –

Ich habe inzwischen den in der Dissertation bewiesenen Satz für n Basisklassen verallgemeinert. Diese Arbeit wird demnächst zum Druck eingereicht[3)] werden. Bei der Tagung[4)] der Deutschen Mathematikervereinigung in Königsberg werde ich über Verschärfungen des Hauptidealsatzes sprechen.

Ich würde mich sehr glücklich schätzen, wenn Sie es der Mühe wert fänden, meine Dissertation wohlwollend zu lesen.

In längst gehegter Verehrung

Olga Taussky.

Anmerkungen zum Brief vom 24.8.1930

[1]Furtwängler hatte eben den gruppentheoretischen Hauptidealsatz bewiesen und wollte nun sehen, was sich aus diesem Ansatz sonst noch für die Kapitulation von Idealklassen ergeben würde.

[2]Furtwängler hatte für Zahlkörper mit elementar-abelscher 2-Klassengruppe bewiesen, dass man eine Basis $\{c_1, \ldots, c_n\}$ der 2-Klassengruppe so wählen kann, dass jede Klasse c_i in einer quadratischen unverzweigten Erweiterung kapituliert.

[3]Hasse hat den Artikel [Ta32a] offenbar für das Crelle-Journal angenommen.

[4]Taussky hielt auf der Jahrestagung der DMV (cf. [29]) zwei Vorträge: am 4. Sept. trug sie *Über eine Verschärfung des Hauptidealsatzes* vor, am 6. Sept. über (*Eine metrische Geometrie in Gruppen*).

6.2 06.10.1930, Taussky an Hasse

Wien, 6. Oktober 1930.

Sehr geehrter Herr Professor!

Ich danke Ihnen bestens für Ihre Freundlichkeit, mir die beiden Bildchen zu senden. Ich glaube bestimmt, daß die Person, die Sie darauf nicht erkennen konnten, Herr Scholz ist.

Ich danke Ihnen auch vielmals, daß Sie Professor Artin auf meine Dissertation aufmerksam machen wollten. Ich lasse gleichzeitig einen Abzug an ihn gelangen.

Scholz hat inzwischen den $k(\sqrt{-3299})$ näher untersucht. Er konnte feststellen, daß dessen Klassengruppe den Typus $(3, 9)$ hat, und daß er sich ähnlich wie $k(\sqrt{-65})$ verhält, was das Hauptidealwerden in den zyklischen Unterkörpern des Klassenkörpers betrifft[1].

Vielleicht interessiert es Sie, daß ich für die folgende Frage eine große Reihe von Fällen untersucht habe:
$\mathfrak{G}$ sei die zweistufige Gruppe $S_1^{x_1} S_2^{x_2} \dots S_n^{x_n} \mathfrak{C}$, $0 \leq x_i < e_i$, $\mathfrak{C}$ die 1. Ableitung[2] von $\mathfrak{G}$. Es gibt ja sicher 2 Arten von Relationen, die stets zwischen den Kommutatoren einer zweistufigen Gruppe bestehen müssen[3]

1. $S_i^{e_i \Delta_k} = T_{ik}^{f i}$

2. $T_{ik}^{\Delta_j} T_{kj}^{\Delta_i} T_{ji}^{\Delta_k} = \mathcal{E} \quad i \neq k \neq j \neq i$

Die mehrgliedrigen:

$$\left(T_{i_1 i_2}^{\frac{1}{\Delta i_1 \Delta i_2}} T_{i_2 i_3}^{\frac{1}{\Delta i_2 \Delta i_3}} \;\; \cdots \;\; T_{i_r i_1}^{\frac{1}{\Delta i_r \Delta i_1}} \right)^{\Delta i_1 \Delta i_2 \dots \Delta i_r}$$

lassen sich als Potenzprodukte der dreigliedrigen Relationen darstellen.
Nun habe ich mir die Frage vorgelegt, ob diese beiden Relationen die einzigen seien, die für jede zweistufige Gruppe gelten müssen, und vermute, daß die Antwort bejahend[4] ausfällt. Die Typen von zweistufigen Gruppen, die ich untersuchte, lassen es vor allem als sehr wahrscheinlich erscheinen, daß keine weiteren Identitäten wie die unter 2. genannten, die von den $S_i^{e_i}$ unabhängig sind, auftreten können. –

Leider ist schon fast ein Monat seit der Königsberger Tagung verstrichen; ich stehe sehr unter dem Eindruck Ihres Vortrages und Ihrer übrigen Ausführungen und weiß es wohl einzuschätzen, daß ich Ihre wissenschaftliche Persönlichkeit kennen lernen durfte.

Mit den besten Empfehlungen

Olga Taussky.

Anmerkungen zum Brief vom 6.10.1930

[1]Die 2-Klassengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{-65})$ hat Typ $(2,4)$; ist c eine Klasse der Ordnung 4, dann kapituliert c^2 in keiner unverzweigten quadratischen Erweiterung. Daraus folgt, dass c in keinem echten Teilkörper des Hilbert-Klassenkörpers kapitulieren kann. Dieses Beispiel war von Artin gefunden worden.

[2]Die „erste Ableitung“ der Gruppe G ist deren Kommutatorgruppe G'.

[3]Hier bezeichnet S_i die Basiselemente der abelschen Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$; weiter ist $\Delta_i = S_i - 1$ (ähnliche Bezeichnungen finden sich im zweiten Teil von Hasses Klassenkörperbericht [116], nämlich im Kapitel über Furtwänglers Beweis des Hauptidealsatzes) und $T_{ij} = S_i^{-1}S_j^{-1}S_iS_j$. Die Kommutatoren T_{ij} erzeugen symbolisch die gesamte Kommutatogruppe (sh. [116, Satz IX]), d.h. jedes Element von $\mathfrak{C}$ ist Produkt von Potenzen der T_{ij} mit Exponenten aus dem Gruppenring $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$. Die Relation 2. ist identisch mit Gleichung (3) in [116, S. 187], Gleichung 1. erscheint dort als (4).

[4]Scholz schreibt in seinem Brief an Hasse vom 18. Februar 1931, dass Taussky ihm den Beweis der Vermutung geschickt hat, die hier formuliert ist.

6.3 19.03.1932, Hasse an Taussky

Mathematisches Seminar
der Universitaet

Marburg-Lahn, den 19. März 1932.

Liebe Fräulein Taussky!

Mit den vorgeschlagenen Änderungen bin ich gerne einverstanden. Ich muß allerdings sagen, daß mir nach Ansicht der genannten Stellen Dedekind doch bei weitem nicht die Hilbertsche Theorie des galoisschen Zahlkörpers besessen zu haben scheint. Was ich sehe, sind doch nur die ersten Ansätze, und auch die nur verschwommen. Der allgemeine Gedanke, in die galoissche Gruppe abzubilden, ist gar nicht ausgesprochen. Emmy Noether geht m.E. ein wenig zu weit in ihrem Bestreben, die ganze Zahlentheorie schon für Dedekind in Anspruch zu nehmen.

Mit herzlichen Grüßen
stets Ihr
H. Hasse

6.4 17.05.1932, Taussky an Hasse

Mathematisches Institut
der Universitaet

Goettingen, den 17. Mai 1932.
Bunsenstrasse 3/5

Sehr geehrter Herr Professor,

Vor allem möchte ich Ihnen bestens für die Separata danken, die ich bei meiner Rückkehr nach Göttingen in der „Matrix" vorfand. Ihre „amerikanische" Arbeit[1)] zu besitzen, begeistert mich besonders.

Hier in Göttingen helfe ich jetzt[2)] unter anderem bei der Herausgabe des zweiten Bandes der Hilbertschen Werke. Augenblicklich habe ich mit der Ausarbeitung der Artinschen Vorträge[3)] begonnen, die ich ja seinerzeit Frl. Noether versprochen hatte. Sie haben mir damals vorgeschlagen, die Berechnung des Quotienten $\frac{(H:E^{1-\sigma})}{(\varepsilon:NE)} = \frac{n}{\Pi e(\mathfrak{p}_\infty)}$ näher auszuführen. Professor Artin hat nämlich den Beweis in seinem Vortrage nicht angegeben, sondern nur erwähnt, dass er durch Übergang zu einer Untergruppe von endlichem Index nach dem gruppentheoretischen Hilfssatz von Herbrand zu erbringen sei. Ich mache nun von Ihrer gütigen Erlaubnis, mich wegen des Beweises an Sie zu wenden, Gebrauch. Ich glaube, dass der folgende Beweis ziemlich einfach ist: E bedeutet die Gruppe der Einheiten des Oberkörpers, ε die Einheiten des Grundkörpers, H diejenigen Einheiten, die $(1-\sigma)$–te Potenzen von Zahlen sind. Nach Artin (siehe Henselfestschrift) gibt es $r+1$ Einheiten $H_1, H_2, \ldots, H_{r+1}$, welche mit ihren konjugierten und einem System unabhängiger Einheiten des Grundkörpers $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ eine Untergruppe $\overline{H}$ von endlichem Index von E erzeugen. Zwischen diesen Einheiten bestehen nur die folgenden Relationen:

$$H_i^{1+\sigma+\ldots\sigma^{n_i-1}} = 1 \qquad \text{und} \qquad H_i = H_i^{\sigma^{n_i}}, \quad \text{wobei} \quad n_i = n/e(\mathfrak{p}_\infty^{(i)})\,.$$

Die nun bei Normenbildung 1 – werdenden Elemente sind die H_i und ihre konjugierten, dagegen keine Einheit des Grundkörpers, weil die n–ten Einheitswurzeln nicht in der Untergruppe vorkommen können. Die bei Potenzierung mit $(1-\sigma)$ 1–werdenden Elemente sind die Einheiten aus dem Grundkörper, also $\varepsilon_1^{x_1}\varepsilon_2^{x_2}\cdots\varepsilon_r^{x_r}$. An die Stelle von H tritt also $H_1^{x_1}H_2^{x_2}\ldots H_{r+1}^{x_{r+1}}\overline{H}^{1-\sigma}$, $0 \leq x_i < n_i$. An die Stelle von $E^{1-\sigma}$ tritt $\overline{H}^{1-\sigma}$. Wir erhalten daher als Zähler

$$(H_1^{x_1} H_2^{x_2} \dots H_{r+1}^{x_{r+1}} \overline{H}^{1-\sigma} : \overline{H}^{1-\sigma}) = \frac{n^{r+1}}{\Pi\, e(\mathfrak{p}_\infty^{(i)})} .$$

Im Nenner erscheint der Index

$$(\varepsilon_1^{x_1} \varepsilon_2^{x_2} \cdots \varepsilon_r^{x_r} : \varepsilon_1^{nx_1} \varepsilon_2^{nx_2} \cdots \varepsilon_r^{nx_r}) = n^r .$$

Der Quotient ergibt also $\frac{n}{\Pi e(\mathfrak{p}_\infty^{(i)})}$. —
Gleichzeitig sende ich Ihnen auch die längst versprochene Lösung der Aufgabe[4)] aus dem Jahresbericht, die sich ganz zwangsläufig ergab, aber wahrscheinlich nicht die eleganteste ist. – Wollen Sie mir es, bitte, einmal mitteilen, wenn die Berechnung des Indexquotienten noch einfacher möglich ist.

Ich bin mit nochmals bestem Dank und ergebenen Empfehlungen

Ihre

Olga Taussky.[1]

$$\prod_i H_i^{x_i} = \prod_i H_i^{(1-\sigma) g_i(\sigma)}$$

$$\sigma = 1 \qquad x_i \equiv (1-\sigma) g_i(\sigma) \mod. (1 + \sigma + \cdots + \sigma^{x_i - 1})$$

$$x_i \equiv 0 \mod n_i$$

$$n_i \equiv 1 + \sigma + \cdots + \sigma^{n_i - 1} \mod. 1 - \sigma$$

$$H_i^{n_i} \equiv 1 \mod. H_i^{1-\sigma}$$

[1] Die folgenden Zeilen wurden offenbar von Hasse eingefügt.

Anlage zum Brief vom 17. 5. 1932

Die Gleichung $(x+1)^{28}+x^{28}+1=0$ ist auflösbar.

Beweis. Die Gleichung hat die dritte Einheitswurzel ζ_3 als Wurzel. (Es ist bemerkenswert, dass die Gleichung $x^4+y^4+z^4=0$, die bekanntlich im Körper der vierten Einheitswurzeln nicht lösbar ist, im Körper der dritten Einheitswurzeln durch $x=1,\ y=\zeta_3,\ z=\zeta_3^2$ erfüllt wird.) Durch Differentiation erkennt man, dass die Gleichung ζ_3 genau als Doppelwurzel besitzt, also durch $(x^2+x+1)^2$ genau teilbar ist. Um die Auflösbarkeit der Gleichung nachzuweisen, genügt es daher die Gleichung $\frac{(x+1)^{28}+x^{28}+1}{(x^2+x+1)^2}=0$ zu betrachten, die sich durch Wegkürzen des Faktors $1/2$ in die Form

$$\frac{(x+1)^{28}+x^{28}+1}{(x+1)^4+x^4+1}=0$$

bringen lässt. Diese Gleichung gestattet die Substitutionen

$$S=x\longrightarrow 1/x \qquad \text{und} \qquad T=x\longrightarrow \frac{-1-x}{x}.$$

Es ist $S^2=T^3=E$.
Der Ausdruck

$$y=\left[(x+1/x)+\zeta_3\left(\frac{-1-x}{x}+\frac{-1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)+\zeta_3^2\left(\frac{-1}{1+x}+\frac{-1}{1+\frac{1}{x}}\right)\right]^3$$

ist daher höchstens vierwertig, d. h. er genügt einer Gleichung vierten Grades, lässt sich also durch Wurzelzeichen auflösen. Die vier Wurzeln dieser Gleichung seien y_1, y_2, y_3, y_4. Durch Auflösung einer reinen Gleichung dritten Grades gelangen wir dann zu den Gleichungen dritten Grades

$$\sqrt[3]{y_i}=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\zeta_3\left(\frac{-1-x}{x}+\frac{-1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)+\zeta_3^2\left(\frac{-1}{1+x}+\frac{-1}{1+\frac{1}{x}}\right),$$
$$(i=1,2,3,4)$$

die natürlich wieder auflösbar sind und die sämtlichen übrigen Wurzeln der Gleichung enthalten. –

Zur wirklichen Berechnung der Wurzeln wäre es vielleicht geeigneter, auf die Gleichung neunten Grades

$$y=\left(x+\zeta_3\frac{-1-x}{x}+\zeta_3^2\frac{-1}{1+x}\right)^3+\left(\frac{1}{x}+\zeta^3\frac{-1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\zeta_3^2\frac{-1}{1+\frac{1}{x}}\right)^3$$

zu reduzieren. Doch kann man bei dieser Gleichung nicht so auf den ersten Blick erkennen, dass sie auflösbar ist.

Anmerkungen zum Brief vom 17.05.1932

[1]Hasses „Amerikanische Arbeit“ [120] zielte darauf ab, den in den USA in der Theorie der Algebren arbeitenden Mathematikern die jüngsten in Deutschland gemachten Fortschritte näherzubringen, insbesondere das Konzept der Brauergruppe und des Lokal-Global-Prinzips.

[2]Die Hilbertschen Werke wurden unter Mitarbeit von Olga Taussky, Wilhelm Magnus und Helmut Ulm herausgegeben und sollten zu Hilberts 70. Geburtstag überreicht werden. Als die geplante Herausgabe des Zahlberichts publik wurde, erhielt Taussky viele Briefe von Vertretern des „abstrakten Standpunkts“ mit der Aufforderung, diesen „umzuschreiben“. Emmy Noether war nicht unter ihnen, allerdings hat sie später gern Artin zitiert, der gesagt haben soll, der Zahlbericht habe den Fortschritt der algebraischen Zahlentheorie um Jahrzehnte verzögert.

[3]Die Artinschen Vorträge zur Klassenkörpertheorie wurden letztendlich erst (in englischer Übersetzung durch R. Friedman, einem Studenten Tates) als Anhang des Buchs [57] von H. Cohn der breiten Öffentlichkeit zugänglich gemacht; in den 30er Jahren machten sie hektographiert die Runde.

[4]Aufgabe 117 von L. Tschakaloff. Im Jahresbericht 1931 wurden ab S. *78* Lösungen von J.E. Hofmann, H. Kneser (der eine Lösung in nur einem Dutzend Zeilen fand) und B. Petkantschin abgedruckt; später folgte noch eine Lösung von P. Scherk.

6.5 22.05.1932, Hasse an Taussky

Mathematisches Seminar
der Universitaet

z.Zt. Bad Sooden Allendorf 22.5. 1932.

Liebe Fräulein Taussky!

Ihre Skizze des Einheitenbeweises ist durchaus in Ordnung und trifft genau das, was Artin und Herbrand getan haben. Ich möchte nur zwei Bemerkungen machen:

1.) Die Relation $H_i^{S^{n_i}} = H_i$ ist eine Folge der Normrelation

$$H_i^{1+S+\ldots+S^{n_i-1}} = 1.$$

(Sie hatten beide koordiniert aufgeführt, wohl nur versehentlich.)

2.) Die Berechnung des Zählerindex

$$\left(H_1^{x_1} H_2^{x_2} \cdots H_r^{x_r+1} \overline{H}^{1-S} : \overline{H}^{1-S}\right)$$

bedarf noch ein paar erläuternder Bemerkungen, die Sie wohl in dem Brief an mich nur der Kürze halber nicht geschrieben haben.

Eine grundsätzliche Vereinfachung der ganzen Berechnung des Index der zugeordneten Klassengruppe, die mir inzwischen gelungen ist, lege ich aus technischen Gründen in Handschrift bei. Sie kommt wohl für Ihre Ausarbeitung nicht in Frage, da Sie eine von Anfang an andere Anlage der ganzen Rechnung erfordert und damit über den tatsächlichen Verlauf der Artinvorträge hinausgeht. Immerhin glaube ich, dass die weitere Verfolgung dieser Linie für die Gestaltung der Klassenkörpertheorie segensreich sein wird.

Ich begrüsse es, dass nun die Vollendung der Artin-Ausarbeitung in nicht zu ferner Zeit zu erwarten ist. Ich bin schon verschiedentlich danach gefragt worden; selbst hatte ich ja kein Exemplar bestellt, da ich mir eine eigene Ausarbeitung während der Vorträge angefertigt hatte. Sehr gerne will ich Ihnen übrigens bei der Fertigstellung behilflich sein, etwa durch eine letzte Durchsicht des Konzepts, wenn Ihnen daran gelegen sein sollte.

Vielen Dank auch für die Lösung der Aufgabe aus dem Jahresbericht, die ich sehr schön finde. Auf ganz ähnliche Art, wenn auch nicht so ins einzelne durchgeführt, hat übrigens auch Herr Mordell bei seinem Marburger Besuch die Lösung auf Anhieb gefunden. Doch will er sie nicht einsenden.

Mit herzlichen Grüßen
stets Ihr
H. Hasse

6.6 August 1932, Hasse an Taussky

Mathematisches Seminar der Universitaet — Marburg-Lahn August 1932.

Liebe Fräulein Taussky!

Beiliegend sende ich Ihnen der Einfachkeit halber gleich das ganze Ms. meiner Sommervorlesung, in der ich bis zum Beweis des Umkehrsatzes gediehen bin (Fortsetzung folgt im Winter). Auch lege ich meine Aufzeichnungen aus den Artinvorträgen bei, aus denen Sie den Beweis des Existenzsatzes ziemlich ausführlich entnehmen können.

In der Vorlesung ist § 15 (Berechnung des Einheitenindexquotienten) noch nicht ganz glatt, es fehlt vor allem der zuvor zu erbringende Nachweis, daß die modifizierten Einheiten eine endliche Basis haben. Auch ist die Bezeichnung noch nicht schön. Besser gibt man auch den auf die unendlichen Primstellen bezüglichen H_i statt des Index i von vornherein den Index p. Der Schluß auf Seite 104 unten ist zu umständlich, es genügt der Hinweis auf die bei der Konstruktion erzielte Unabhängigkeit der H_p in bezug auf die Einheiten aus dem Grundkörper.

Auch sonst ist manches in der Vorlesung noch etwas roh und würde erst durch Ausnutzung der bei der Vorlesung gesammelten Erfahrungen glatt werden. Siehe zum Teil die Randbemerkungen.

Ich hätte die Blätter gern etwa im Oktober zurück, wo ich an die weitere Ausarbeitung für die Wintervorlesung gehen will. Bis dahin werden Sie ja wohl mit allem fertig sein.

Mit den besten Wünschen für die Ferien
stets Ihr
H. Hasse

Skizze des Beweises des Umkehrsatzes

K/k zyklisch vom Grad n, S erzeugender Automorphismus

$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}$-Führer von K/k, d.h. früheste $\mathfrak{p}$-Potenz, für die aus $\alpha \equiv N(A)$ mod $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ mit A aus K folgt $\alpha = N(A_\mathfrak{p})$ mit $A_\mathfrak{p}$ aus $K_\mathfrak{p}$.

$\mathfrak{f} = \prod_\mathfrak{p} \mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ Führer von K/k (definitorisch).

$\mathfrak{m}$ beliebiges Multiplum von $\mathfrak{f}$.

Zu berechnen ist der Index $h = [\mathcal{A}_\mathfrak{m} : \mathcal{H}_\mathfrak{m}]$ der K/k zugeordneten Idealgruppe $\mathcal{H}_\mathfrak{m}$ in der Gruppe $\mathcal{A}_\mathfrak{m}$ aller zu $\mathfrak{m}$ primen Ideale aus k.

Ich lasse nun zunächst eine durchgängige Modifikation des Idealbegriffs eintreten, die kurz gesagt dahin geht, daß Primteiler von $\mathfrak{m}$ als 1 gerechnet werden (also einfach eine Faktorgruppenbildung!). Während also die gewöhnlichen Ideale in der Vorgabe eines Systems von Ordnungszahlen für alle endlichen Primstellen bestehen (nur endlich viele Ordnungszahlen $\neq 0$), sollen jetzt die Ideale in der Vorgabe eines Systems von Ordnungszahlen (nur endlich viele $\neq 0$) für alle nicht in $\mathfrak{m}$ vorkommenden endlichen Primstellen bestehen, während für die Primteiler von $\mathfrak{m}$ (und natürlich die unendlichen Primstellen) keinerlei Vorschrift gemacht wird. Entsprechend wird der Begriff der Einheit modifiziert: eine Einheit ist jetzt eine Zahl, die höchstens Primteiler von $\mathfrak{m}$ enthält. Im folgenden sind durchgehend diese modifizierten Begriffe gemeint.

Man sieht sofort, dass der obige Index h dann auch erklärbar ist als der Index der K/k zugeordneten Idealgruppe $\mathcal{H}$ in der Gruppe $\mathcal{A}$ aller Ideale aus k. (Man beachte, daß „Idealgruppe“ jetzt eine modifizierte Bedeutung hat!)

In Gruppenstenographie:

$$h = [\mathfrak{a} : \mathfrak{A}^N(\nu)], \quad \begin{cases} \mathfrak{a} \text{ beliebiges Ideal aus } k, \\ \mathfrak{A} \text{ beliebiges Ideal aus } K, \\ N = 1 + S + \ldots + S^{n-1}, \\ \nu \text{ Normenrest (nicht nur zu } \mathfrak{m} \text{ prim!) von } K \text{ mod } \mathfrak{m} \end{cases}$$

Gerade diese Befreiung der Grundbegriffe der Klassenkörpertheorie von der lästigen Voraussetzung „prim zu $\mathfrak{m}$“ scheint mir methodisch richtig und vorteilhaft zu sein. Das ganze bewegt sich in einem Ideenkreis, der vom Riemann-Rochschen Satz her geläufig ist, und in der Tat ist ja die zu machende Berechnung als Analogon des Riemann-Rochschen Satzes anzusehen.

Neben dem Index h führe ich von vornherein den Index

$$a = [\nu \cap \mathfrak{A}^N : A^N] \quad \begin{cases} \cap & \text{Zeichen für Durchschnitt,} \\ A & \text{beliebige Zahlen aus } K \end{cases}$$

ein, der ersichtlich die Abweichung von der Gültigkeit des Normensatzes mißt ($a = 1$ bedeutet, daß jeder Normenrest $\nu \bmod \mathfrak{m}$, der Idealnorm ist, auch Zahlnorm ist, da $\mathfrak{m}$ Multiplum von $\mathfrak{f}$ ist, ist für die nicht in $\mathfrak{m}$ aufgehenden $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{f}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^0$, also die in „Idealnorm" geforderte Ordnungszahlbedingung schon hinreichend für „$\mathfrak{p}$-adische Zahlnorm". Daher sagt $a = 1$ in der Tat: Wenn ν für jedes $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}$-adische Norm ist, ist ν Zahlnorm; und umgekehrt hat dieser Normensatz ersichtlich $a = 1$ zur Folge.)

Ich gehe nun von vornherein auf die Berechnung des Indexquotienten

$$q = \frac{h}{a} = \frac{[\mathfrak{a} : \mathfrak{A}^N(\nu)]}{[\nu \cap \mathfrak{A}^N : A^N]}$$

aus, und habe $q = n$ zu beweisen.

Erste Umformungsserie (Abspaltung der Klassenkörpertheorie im Kleinen).

$$\begin{aligned}
q &= \frac{[\mathfrak{a} : \mathfrak{A}^N(\nu)]}{[\nu \cap \mathfrak{A}^N : A^N]} = \frac{[\mathfrak{a} : \mathfrak{A}^N(\nu)][\mathfrak{A}^N(\nu) : (\nu)]}{[\nu \cap \mathfrak{A}^N : A^N][\mathfrak{A}^N(\nu) : (\nu)]} \\
&= \frac{[\mathfrak{a} : (\nu)]}{[(\nu) \cap \mathfrak{A}^N][\varepsilon \cap \nu : \eta][\mathfrak{A}^N : (\nu) \cap \mathfrak{A}^N]} \\
&= \frac{[\mathfrak{a} : (\nu)]}{[\mathfrak{A}^N : (A)^N][\varepsilon \cap \nu : \eta]}, \quad \begin{cases} \varepsilon & \text{beliebige Einheit aus } k, \\ \eta & \text{Einheiten aus } k, \text{ die} \\ & \text{Zahlnormen aus } K \text{ sind.} \end{cases} \\
&= \frac{[\mathfrak{a} : (\alpha)][(\alpha) : (\nu)]}{[\mathfrak{A}^N : (A)^N][\varepsilon \cap \nu : \eta]} \\
&= \frac{[\mathfrak{a} : (\alpha)][\alpha : \nu]}{[\mathfrak{A}^N : (A)^N][\varepsilon \cap \nu : \eta][\varepsilon : \varepsilon \cap \nu]}, \quad \alpha \text{ beliebige Zahlen aus } k, \\
&= \frac{[\mathfrak{a} : (\alpha)]}{[\mathfrak{A}^N : (A)^N][\varepsilon : \eta]} \cdot [\alpha : \nu] = q_0 \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}} n_\mathfrak{p},
\end{aligned}$$

$n_\mathfrak{p}$ Grad von $K_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}$ (Hauptergebnis der Klassenkörpertheorie im Kleinen).

Es bleibt zu berechnen der Indexquotient

$$q_0 = \frac{[\mathfrak{a} : (\alpha)]}{[\mathfrak{A}^N : (A)^N][\varepsilon : \eta]}.$$

Zweite Umformungsserie (Theorie des Hauptgeschlechts und der ambigen Klassen).

$$[\mathfrak{A}^N : (A)^N] = \frac{[\mathfrak{A} : (A)]}{[\mathfrak{A}^{1-S} : (\vartheta)]},$$

ϑ Zahlen aus K mit $(\vartheta)^N = 1$, für die also $\vartheta^N = \eta$ Einheit ist; das sind dann gerade die obigen η. – Es wurde ferner angewandt, daß Ideale mit Norm 1 stets $1 - S$-te Idealpotenzen sind; und umgekehrt.

$$= \frac{[\mathfrak{A} : (A)]}{[\mathfrak{A} : \mathfrak{B}]}$$

$\mathfrak{B}$ Ideale aus K, für die $\mathfrak{B}^{1-S} = (\vartheta)$ Hauptideal ist; das sind dann (wieder nach dem oben genannten Normensatz gerade die obigen (ϑ)

$$= [\mathfrak{B} : (A)].$$

<u>Dritte Umformungsserie (Reduktion auf Einheitenhauptgeschlecht)</u>

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{[\mathfrak{a} : (\alpha)]}{[\mathfrak{A}^N : (A)^N][\varepsilon : \eta]} = \frac{[\mathfrak{a} : (\alpha)]}{[\mathfrak{B} : (A)][\varepsilon : \eta]} \\ &= \frac{[\mathfrak{a} : (\alpha)]}{[(\vartheta) : (A)^{1-S}][\mathfrak{a} : (B)][\varepsilon : \eta]} \end{aligned}$$

B Zahlen aus K, für die $(B)^{1-S} = 1$, d.h. B^{1-S} Einheit ist. Man beachte, daß wegen des modifizierten Idealbegriffs die Ideale aus k die <u>einzigen</u> ambigen (bei $1 - S$ invarianten) Ideale sind; gerade in diesem Punkt besteht die <u>sachliche</u> Kürzung bei dieser neuen Methode.

$$\begin{aligned} &= \frac{[(B) : (\alpha)]}{[(\vartheta) : (A)^{1-S}][\varepsilon : \eta]} \\ &= \frac{[B : \alpha E]}{[\vartheta : A^{1-S} E][\varepsilon : \eta]}, \quad E \text{ beliebige Einheiten aus } K, \\ &= \frac{[H : E^{1-S}]}{[\vartheta : A^{1-S} E][\varepsilon : \eta]}, \quad H \text{ Einheiten aus } K \text{ mit } H^N = 1, \text{ für die also} \\ &\qquad\qquad H = B^{1-S}; \text{das sind dann gerade die obigen } B. \\ &= \frac{[H : E^{1-S}]}{[\eta : E^N][\varepsilon : \eta]} = \frac{[H : E^{1-S}]}{[\varepsilon : E^N]}. \end{aligned}$$

<u>Ergebnis:</u>

$$\frac{h}{a} = q = q_0 \cdot \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{m}} n_{\mathfrak{p}} = \frac{[H : E^{1-S}]}{[\varepsilon : E^N]} \cdot \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{m}} n_{\mathfrak{p}}.$$

Nun hat man durch leichte Modifikation der Herbrandschen Methode (Einbeziehung der unendlichen $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}$), also durch Konstruktion eines Systems unabhängiger modifizierter Einheiten, nur den Indexquotienten

$$\frac{[H : E^{1-S}]}{[\varepsilon : E^N]} = \frac{n}{\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}} n_{\mathfrak{p}}}$$

nachzurechnen. Das geht, wie Artin mir schrieb, ganz ebenso einfach, wie bisher. Drum kommt:

$$q = n, \quad \text{also} \quad h = a \cdot n.$$

6.7 6.10.1932, Hasse an Taussky

Manchester, 6.10.32

Liebe Fräulein Taussky!

Von unserer kurzentschlossen unternommenen Englandreise im Auto unseres Freundes Davenport gedenke ich Ihrer aufs Herzlichste. Wir haben schon unendlich viel Schönes und Interessantes gesehen, zuerst Cambridge, wo die Colleges mit ihrer innerlich u. äußerlich so völlig von deutschen Universitäten verschiedenen Struktur ganz besonders eindrucksvoll erschienen, und jetzt den sehr stark industriellen Nordwesten, von wo aus wir herrliche Ausflüge in die reizvollere weitere Umgebung unternehmen, z.B. nach der umstehenden wundervoll gelegenen Abtei; die Klassenkörpertheorie bleibt natürlich derweil ziemlich im Unterbewußtsein. Hoffentlich hatten Sie auch nach dem anregenden Kongreß noch schöne Ferientage. Mit besten Grüßen,

Ihr H. Hasse

6.8 29.10.1932, Taussky an Hasse

Wien, den 29. 10. 32.

Sehr verehrter Herr Professor,

Entschuldigen Sie, bitte, dass ich Ihre Vorlesungsausarbeitung[1)] erst zu dem spätesten Termin, den Sie mir gestatteten, zurücksandte. Die Lektüre war für mich sehr wertvoll. Ihre Schüler sind wirklich beneidenswert, dass Sie in Form einer Vorlesung mit dem neuesten Stand einer Theorie vertraut gemacht werden. Der umfangreiche analytische Teil hat mir grossen Eindruck gemacht. Was die Berechnung des Einheitenindexquotienten (§ 15) anlangt, möchte ich folgende Bemerkung machen: Dass die modifizierten Einheiten eine endliche Basis besitzen, schliesst man wohl am einfachsten daraus, dass sie eine unendliche abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden bilden. D. h. es gibt ein System von endlich vielen modifizierten Einheiten, durch deren Potenzprodukte sich alle darstellen lassen. Daraus folgt ja bereits, dass die Gruppe direktes Produkt von endlich vielen zyklischen Gruppen ist.

Ein solches System von endlich vielen Erzeugenden erhalten wir z. B. in der folgenden Weise: Wir bezeichnen mit $\mathfrak{p}_i$ die Primteiler des Moduls $\mathfrak{m}$ und bilden alle Zahlen α_i , für welche die Hauptideale $(\alpha_i) = \prod \mathfrak{p}_i^{e_i}$ Exponenten e_i haben, die kleiner sind als die gewöhnliche Klassenzahl des Körpers.

Ich werde jetzt den Anhang zur Artinausarbeitung bald fertigstellen, obwohl ich nicht gleich zu Semesterbeginn nach Göttingen komme. Prof. Courant hat mir vorläufig aus Ersparungsgründen mitgeteilt, dass ich nur für mehrere Wochen nach Göttingen eingeladen werde, was mir natürlich sehr leid ist. Die Vervielfältigung wird hoffentlich jemand in Göttingen übernehmen können. Ich werde demnächst Frl. Noether über die Sache schreiben.

Ihre Englandreise hat mich ausserordentlich interessiert. Es war so freundlich von Ihnen, mir die schönen Karten zu schicken. Ich danke Ihnen viele Male. Sie hatten nun Gelegenheit, Ihre grossen Kenntnisse der englischen Sprache zu verwerten. Ich hoffe, dass Ihnen und Ihrer Frau Gemahlin die Englandreise in guter Erinnerung bleiben wird.

Ist es sehr schlimm, dass ich die Korrekturen meiner Arbeit[2)] aus dem Crelleschen Journal noch zwei Tage zurückbehalte?

Ich bin Ihre ganz ergebene

Olga Taussky.

Anmerkungen zum Brief vom 29.10.1932

[1]Hier geht es um die berühmten „Marburger Vorlesungen“ von Hasse, in denen dieser im Sommersemester 1932 die Klassenkörpertheorie nach Takagi mit den zu diesem Zeitpunkt bekannten Vereinfachungen vortrug. Die Vorlesung wurde im Wintersemester fortgesetzt.

[2]Gemeint ist die Arbeit [Ta32a] zur Verschärfung des Hauptidealsatzes.

6.9 10.12.1932, Hasse an Taussky

Liebe Fräulein Taussky!

ich wurde gefragt, ob es sein kann, daß ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus k in einem Oberkörper K gleichzeitig voll zerfällt und hauptidealisiert wird, während es in k nicht Hauptideal ist. Können Sie wohl dafür ein Beispiel konstruieren, oder wenigstens gruppentheoretisch die Möglichkeit dartun. Das letztere würde ich wohl auch noch zustande bringen, obwohl es Ihnen sicherlich viel weniger Mühe macht wie mir, aber schöner wäre schon das erstere.

Mit freundlichem Gruß

Ihr H. Hasse

6.10 17.12.1932, Taussky an Hasse

Wien, den 17. 12. 32.

Sehr geehrter Herr Professor,

Besten Dank für Ihre Karte, die ich soeben aus Göttingen nachgeschickt erhalte. Ich glaube, die Frage, ob ein Primideal $\mathfrak{p} \not\sim 1$ aus k in einem Oberkörper K gleichzeitig voll zerfallen und hauptidealisiert werden kann, ist bejahend zu beantworten. (Sie meinen doch Hauptideal in bezug auf die absolute Klassenteilung ?) Dieser Fall *kann* eintreten, wenn K ein *echter* Unterkörper des absoluten Klassenkörpers von k ist. Es sei z. B. die absolute Klassengruppe von k zyklisch und von der Ordnung ℓ^2, ℓ Primzahl. Der Unterkörper des Klassenkörpers vom Relativgrad ℓ hat dann die verlangte Eigenschaft für alle Primideale $\mathfrak{p}$, welche der ℓ–ten Potenz der erzeugenden Klasse angehören[1)].

Im nicht–zyklischen Fall (ℓ, ℓ) braucht ein bestimmter Unterkörper des Klassenkörpers vom Relativgrad ℓ diese Eigenschaft natürlich nicht zu haben. Man weiß dann zwar, daß eine Klasse in diesem Körper hauptidealisiert wird, doch muß sie ja nicht der Idealgruppe angehören[2)]

Bei dieser Gelegenheit möchte ich Ihnen auch erzählen, daß mir unlängst ein anderer Beweis für den einfachen Hilfssatz einfiel, daß ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus k, das in den Oberkörpern K_1 und K_2 voll zerfällt, auch in K_1K_2 voll zerfällt. Ich benütze zum Beweis den Satz 3 von Ö. Ore, Math. Ann. 97, S. 592. Die erzeugende Zahl von K_2/k genüge der irreduz. Gleichung $F(x) = 0$. Da $\mathfrak{p}$ in K_2 voll zerfällt, muß nach Ore $F(x)$ einem Produkt von Linearfaktoren mod. $\mathfrak{p}^\alpha$ kongruent sein. Adjungieren wir nun K_2 zu K_1 statt zu k, so wird die erzeugende Zahl von K_1K_2/K_1 einem in K_1 irreduziblen Faktor $\Phi(x)$ von $F(x)$ genügen. Ist $\mathfrak{P}$ ein Primfaktor von $\mathfrak{p}$ in K_1, so wird daher umsomehr $\Phi(x)$ mod. einer geeigneten Potenz von $\mathfrak{P}$ in Linearfaktoren zerfallen, d. h. aber $\mathfrak{P}$ zerfällt in K_1K_2 vollständig. Da $\mathfrak{p}$ nach Voraussetzung auch in K_1 voll zerfallen ist, zerfällt es also umsomehr in K_1K_2 voll. —

Wie Sie sehen, bin ich noch in Wien, weil Prof. Courant jetzt beschlossen hat, daß ich die Fahnen des 2. Bandes der Hilbertschen Abhandlungen in Wien lesen solle. So werde ich vielleicht erst im Frühling nach Göttingen zurückkommen.

Ich bin mit den besten Festtagsgrüßen und herzlichen Wünschen

Ihre
Olga Taussky.

Anmerkungen zum Brief vom 17.12.1932

[1]Ist $\mathrm{Cl}(k) = \langle c \rangle$ und $\mathfrak{p}$ ein Primideal, dessen Klasse in c^ℓ liegt, so wird $\mathfrak{p}$ im Zwischenkörper F von K/k voll zerlegt, und die Primteiler von $\mathfrak{p}$ bleiben dann in K/F träge. Weiter müssen alle Idealklassen der Ordnung ℓ in F kapitulieren; insbesondere wird $\mathfrak{p}$ Hauptideal.

Hasses Frage geht auf Grün zurück, der dieses Problem in einem Brief an Hasse vom 6.12.1932 aufgeworfen hatte. Zwei Wochen später hatte Grün das gleiche Beispiel wie Taussky gefunden.

[2]Hier gibt es Beispiele von Primidealen, die einerseits zerfallen, andererseits hauptidealisiert werden. Ist z.B. $\mathrm{Cl}(k)$ vom Typ $(2, 2)$ und hat der Hilbertklassenkörper ungerade Klassenzahl, so zerfällt ein Primideal $\mathfrak{p}$ in irgendeiner der nichttrivialen Klassen in genau einem der drei quadratischen Zwischenkörper $\mathfrak{p}\mathcal{O}_1 = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ und muss dort auch Hauptideal werden (die Idealfaktoren $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ werden natürlich keine Hauptideale sein, nur deren Produkt $\mathfrak{p}$).

6.11 29.07.1933, Taussky an Hasse

Wien, den 29. 7. 33.
Eckpergasse 39

Sehr verehrter Herr Professor,

Herr Scholz hat Ihnen bereits die Abhandlung[1)], die ich mir gleichzeitig an Sie zu schicken erlaube, angekündigt. Überschrift und Einleitung muß noch Herr Scholz schicken.

Ich glaube, daß die Ergebnisse von Kapitel 3 dieser Arbeit Anlaß geben, das Klassenkörperturmproblem von einer neuen Seite her anzugreifen. Damit es unendliche Klassenkörpertürme gibt, müßte es nämlich zuerst unendliche Gruppentürme geben. Ich meine damit folgende Frage: Gibt es eine abelsche Gruppe, welche Faktorgruppe nach der Kommutatorgruppe einer Gruppe von beliebig hoher Stufigkeit[2)] sein kann? Ich glaube nicht, daß man bis jetzt solche Gruppen kennt. – Wenn man nur ℓ–Klassenkörpertürme betrachtet, so gilt, daß die Relativgruppe des n–ten Klassenkörpers sich erzeugen läßt aus den Klassen des Grundkörpers. (Für $n = 2$ ist dies von Furtwängler in seinem Beweis des Hauptidealsatzes gezeigt). Daher steht das Gruppenturmproblem bei ℓ–Gruppen in Zusammenhang mit der bekannten Frage, ob eine Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden, in der für jedes Element s die Beziehung $s^m = 1$ gilt, endliche Ordnung hat. Wenn dies tatsächlich stimmt, könnten die maximalen Ordnungen der Elemente der ℓ–Gruppentürme jedenfalls nicht beschränkt sein.

Im Laufe des heurigen Sommersemesters bin ich in Ihrem Auftrag von einem Herrn Grün aus Berlin gefragt worden, ob der folgende Satz bekannt sei: Ist die absolute Idealklassengruppe des absolut Galoisschen Körpers k zyklisch, so enthält die Klassenzahl von k außer der Klassenzahl des größten abelschen Teilkörpers k_0 nur noch solche Primteiler, die in dem Relativgrad k/k_0 aufgehen. Meines Wissens nach ist dieser Satz noch nicht allgemein bewiesen[3)].

Ich wünsche Ihnen und Ihrer verehrten Frau Gemahlin recht schöne Ferien.

Ihre
ergebene
Olga Taussky.

Anmerkungen zum Brief vom 29.07.1933

[1]Die gemeinsame Arbeit [Ta34c] von Scholz und Taussky, in der diese die Kapitulation von Idealklassen in kubischen unverzweigten Erweiterungen imaginärquadratischer Zahlkörper studierten, und durch gruppentheoretische Untersuchungen zeigen konnten, dass die 3-Klassenkörper in ihren Beispielen immer nach dem zweiten Schritt abbrechen.

[2]Die Frage, ob es zu jeder abelschen Gruppe einen „Gruppenturm" von Gruppen gibt, die als Galoisgruppen der Körper im Hilbert-Klassenkörperturm in Frage kommen, wurde schon von Magnus [180] aufgegriffen. Er konnte zeigen, dass es Gruppentürme von beliebiger endlicher Länge gibt. Die ersten Beispiele unendlicher Gruppentürme von 2-Gruppen gehen auf die Doktorarbeit von Charles Hobby [138], einem Studenten Tausskys, zurück, der dazu eine Konstruktion von Zassenhaus benutzte; die Lösung des Problems für beliebige p-Gruppen stammt von Serre [293]. In jüngster Zeit gelang N. Boston die explizite Konstruktion von 2-Gruppen, von denen vermutet wird, dass sie die Galoisgruppen gewisser unendlicher 2-Klassenkörpertürme sind.

[3]Für die mathematischen Leistungen von Otto Grün sh. [271] und [169]. Die Idee, Klassengruppen als Galoismoduln aufzufassen und daraus Ausagen über deren Struktur abzuleiten, hatten damals auch Tschebotareff und Scholz; für die Geschichte solcher und ähnlicher Resultate sh. [200].

6.12 03.01.1934, Hasse an Taussky

Liebe Frl. Taussky!

Es ist wirklich rührend, wie Sie jedes Jahr zu Neujahr an mich denken! Auch Juttalein hat sich über den niedlichen Kartengruß sehr gefreut. Es freut mich, daß Sie Interesse an den Rédei-Reichardtschen Arbeiten und an meiner [xxx] gefunden haben. Meine Klassenkörperfrage ging genauer dahin, die durch spezielle Hauptidealisierungstypen charakterisierten Teilkörper der absoluten Klassenkörper auch anders – ohne Basisbenutzung – zu charakterisieren.

Herzliche Grüße,

Ihr H. Hasse

6.13 27.10.1936, Taussky an Hasse

27. Okt. 36.

Girton College
Cambridge

Sehr geehrter Herr Professor,

Vor einiger Zeit übergab mir Herr Davenport Ihren neuen Vorschlag für die Tafeln. Ich freue mich sehr, dass doch Klassenzahlen berechnet werden sollen und finde Ihren Vorschlag für sehr schön. Ich möchte nur folgende Bemerkungen machen.

1. Gibt es bestimmt noch keine Tabellen dieser Art ?

2. Ich fürchte, dass ein mathematisch ungeschulter Rechner überhaupt nicht viel dabei helfen kann. Höchstens für den folgenden Zweck: um die Klassenzahl zu finden, empfiehlt es sich möglichst viele Normen zu berechnen. Wenn die erzeugende Zahl Θ der Gleichung $x^3+ax^2+bx+c = 0$ genügt, so ist $n(x+y\Theta) = x^3-ax^2y+bxy^2-cy^3$. Für allgemeinere Ausdrücke $x+y\Theta+z\Theta^2$ ist der Ausdruck entsprechend komplizierter, doch kommt man oft schon mit den Zahlen $x+y\Theta$ aus. Die Berechnung vieler Normen wäre vielleicht eine ideale Aufgabe für den Rechner.

3. Man sollte wohl zur Berechnung der Klassenzahl auch gewisse allgemeine Sätze heranziehen, durch die eine grosse Reihe von Fällen von vornherein ausscheidet. Z. B. wenn $f = p$, so ist die Klassenzahl nicht durch 3 teilbar; wenn $f = p_1p_2$, so ist die Klassenzahl immer durch 3 teilbar; wenn aber nicht gleichzeitig p_1 kubischer Rest von p_2 und p_2 kubischer Rest von p_1 ist, so ist die Klassenzahl nicht durch 9 teilbar (das ist ein Satz von A. Scholz, zwei Bemerk. zum Klassenkörperturm, Crelle 161, 205). Z. B. lässt sich der Fall $f = 7.13$ in der folgenden Weise erledigen. $M = 20$[1)]. Nach dem obigen Satz ist die Klassenzahl durch 3, aber nicht durch 9 teilbar. Da die 2– und 5–Klassengruppe nicht zyklisch sein kann[2)], kommt also nur Klassenzahl 3 oder 12 in Betracht. In dem einen der Körper mit $f = 7.13$ sind die Primzahlen $(< M)$ 3, 11, 19 voll zerlegt. Nun ist aber $n(1+\Theta) = -3.11^2$, $n(2-\Theta) = 3^2.11$, $n(3-\Theta) = 27$, $n(5-\Theta) = -57$. Daher sind 3, 11, 19 entweder Zahlnormen oder Normen von Idealen der Ordnung 3. – In dem 2. Körper sind 2, 17 voll zerlegt. Hier ist aber $n(1+\Theta) = -16.17$, $n(2-\Theta) = 8$. – Also kommt nur Klassenzahl 3 in Betracht.

Ich erinnere mich, dass Scholz mir seinerzeit schrieb, er halte es für wünschenswert, dass man bei den Körpern mit $f = p_1 p_2$ stets $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_3$ u. $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_3$ angebe. Vielleicht sollte man überhaupt mehr Körper mit zusammengesetztem Führer berechnen. Aber das ist wohl eine Frage, die erst nach Beginn der Arbeit entschieden werden kann. Ausserdem, falls Zeit übrig bleibt, wäre natürlich die Untersuchung von (absolut normalen) relativ kubischen Erweiterungen quadratischer Körper sehr wünschenswert.

4. Ist das skizzierte Verfahren zur Berechnung der Klassenzahl schon praktisch ausprobiert worden ? –

Ich würde mich sehr freuen, wenn Sie wieder einmal nach Cambridge kämen.

Mit besten Grüssen

Ihre

Olga Taussky

Anmerkungen zum Brief vom 27.10.1936

[1]Dies ist die Minkowski-Schranke für den kubischen Körper mit Diskriminante $7^2 13^2$.

[2]Das folgt z.B. aus einem Satz von Grün, den dieser als Aufgabe im Jahresbericht der DMV gestellt hatte; vgl. [271, 169, 200].

6.14 03.05.1937, Taussky an Hasse

3. 5. 37

Sehr geehrter Herr Professor,

Vielen Dank für das Crelleheft u. Ihre Arbeit, die ich mir sehr gewünscht hatte. Hatte ich Ihnen schon für die Fotographie gedankt? Ich hatte mich riesig darüber gefreut.

In diesem Term lese ich über algebraische Zahlen; ich werde auch nächstes Jahr in Cambridge sein.

Mit besten Grüßen

Ihre
Olga Taussky

6.15 06.10.1937, Taussky an Hasse

WESTFIELD COLLEGE,
(UNIVERSITY OF LONDON)
HAMPSTEAD,N. W. 3.
TELEPHONE 0734 HAMPSTEAD.

6. Okt. 37

Lieber Herr Professor,

Vor allem wollte ich Ihnen meine neue Adresse mitteilen. Ich bin hier lecturer und zwar lese ich über geometry u. differential equations. Meine Cambridger Fellowship darf ich dem Titel nach behalten.

Prof. Hardy erzählte mir, daß er Ihnen meinen Plan für ein Buch über algebraische Zahlen zusenden ließ. Hoffentlich finden sie ihn nicht ganz dumm. Ein Mitglied der Oxford University Press, den ich vorigen Sommer bei einem Meeting kennen lernte, schlug mir vor ein Buch zu schreiben. Da dachte ich, daß es doch eigentlich kein englisches Buch über algebraische Zahlen gäbe u. daß dies eine ganz nette Idee sein könnte.

Viele schöne Grüße
Ihre
O. Taussky

6.16 11.10.1937, Hasse an Taussky

11. 10. 37

Prof. Dr. H. Hasse

Frl. Dr. O. Taussky

Westfield College
University of London

Hampstead N. W. 3.
L o n d o n

Liebe Fräulein Taussky,

es freut mich sehr zu hören, daß Sie eine Anstellung in London gefunden haben. Hardy hatte mir schon davon geschrieben. Ich finde das Buch, das Sie vorhaben, sehr gut und habe Hardy geantwortet, daß ich an der ganzen Anlage auch nicht das Geringste auszusetzen hätte und daß ich es schön fände, wenn ein solches Buch in englischer Sprache erscheinen würde. Ich selbst bin sehr fleißig an meinem eigenen Buch über Zahlentheorie, das allerdings auf ganz anderer Grundlage steht und viel umfangreicher sein wird.

Mit herzlichen Grüßen
stets Ihr
H. Hasse

6.17 Sept. 1938, Taussky an Hasse

WESTFIELD COLLEGE,
(UNIVERSITY OF LONDON)
HAMPSTEAD, N. W. 3.
TELEPHONE 0734 HAMPSTEAD.

Sept. 38

Lieber Herr Professor.

Vielen herzlichen Dank für die Separata.

Ich hoffe, in diesem Jahr mehr Zeit für mein Zahlentheoriebuch[1)] zu haben als im vergangenen. Dafür habe ich ein paar algebraische Resultate über Laplace Differentialgleichungen erzielt. Ich hoffe Ihnen bald ein kleines Separat[2)] darüber zu senden.

Ich beabsichtige noch vor Beginn des Semesters einen Mathematiker vom King's College in London zu heiraten. Ich hoffe, Sie kommen bald nach England um ihn kennen zu lernen.

Mit besten Grüßen

Ihre

Olga Taussky.

(Diesen Namen behalte ich für Mathematiker bei)

Anmerkungen zum Brief vom 03.05.1937

[1]Taussky hatte geplant, ein englischsprachiges Lehrbuch über algebraische Zahlentheorie zu schreiben. Dazu ist sie aber nie gekommen.

[2]Vermutlich ist hier Tausskys Arbeit [Ta39] gemeint.

6.18 29.09.1938, Hasse an Taussky

29. 9. 38

Liebe Frl. Taussky,

Vielen Dank für Ihre freundlichen Zeilen. Zu Ihrer bevorstehenden Hochzeit wünsche ich Ihnen alles Gute. Ich habe mich sehr gefreut, dies von Ihnen zu hören. Mein Buch ist im Ms. fertig (Band I), und ich hoffe, es kann bald erscheinen.

Herzliche Grüsse Ihr
H. Hasse

Teil V

Weiteres Material zu Arnold Scholz

7. Spezielle Zahlkörper

In den letzten Jahren seines Lebens sollte Scholz für die Neuauflage der mathematischen Enzyklopädie einen Artikel über *Spezielle Zahlkörper* schreiben; Verzögerungen und sein unerwarteter Tod führten dazu, dass das Manuskript unvollendet blieb. Taussky fragte bei ihrer Arbeit am Nachruf für Scholz bei Hasse nach, was aus dem Manuskript geworden ist, und Hasse antwortete am 29.10.1949:

> *Die Aufzeichnungen zu dem Enzykl. Art. über Spezielle Zahlkörper müssen sich bei dem verloren gegangenen Nachlass befunden haben. Wie weit das Ms. fertiggestellt war, entzieht sich meiner Kenntnis. Jedenfalls ist der Verlust dieses Materials ein ganz empfindlicher Verlust. Wir haben bisher niemanden finden können, der geeignet wäre, diesen Artikel für die Neuauflage von Band 1 (Algebra u. Zahlentheorie) der Enzyklopädie zu übernehmen.*

Am 15.02.1950 spricht er seinen Wunsch aus, Taussky möge den Entwurf vollenden:

> *Auch eine andere erfreuliche Mitteilung kann ich Ihnen machen. Unter alten Papieren, die während des Krieges von mir ausgelagert worden waren, hat sich kürzlich ein ziemlich vollständiger Entwurf zu dem geplanten Enzyklopädieartikel „Spezielle Zahlkörper“ von Arnold Scholz angefunden. Da habe ich natürlich sofort daran gedacht, ob Sie etwa Lust und Zeit hätten, nach den Aufzeichnungen von A. Scholz die endgültige Ausarbeitung des Textes zu übernehmen. Darf ich Ihnen gegebenenfalls das aus etwa 30 Blättern bestehende Material einmal zusenden, damit Sie sich ein Bild machen können? Es enthält erstens eine ziemlich genaue Disposition des ganzen und zeitens die stichwortartige und partienweise auch bereits voll ausgearbeitete Fassung des Textes. Sie würden mir als Herausgeber (zusammen mit Sperner und Deuring), und vor allem der ganzen zahlentheoretischen Welt, mit der Übernahme dieser Aufgabe einen grossen Dienst erweisen. Ich wüsste niemand der dazu mehr prädestiniert wäre , wo Sie doch selbst über solche Fragen (etwa die Hauptidealisierung) gearbeitet und vor allem Arnold Scholz so gut gekannt haben.*

Taussky hat sich letztendlich aber nicht dazu durchringen können, den Artikel zu vollenden.

Im folgenden gebe ich zuerst den Entwurf des Artikels wieder, danach den Artikel selbst, soweit er erhalten (und leserlich) ist. Dabei habe ich die Abkürzungen (Scholz hat den Artikel in recht stenographischer Form verfasst) ausgeschrieben, etwaige fehlende Verweise ergänzt, und unleserliche Bruchstücke weggelassen. Scholz hat wie Hasse die Bezeichnung P (großes griechisches ρ) für den rationalen Zahlkörper benutzt, was ich um der besseren Lesbarkeit willen durch $\mathbb{Q}$ ersetzt habe.

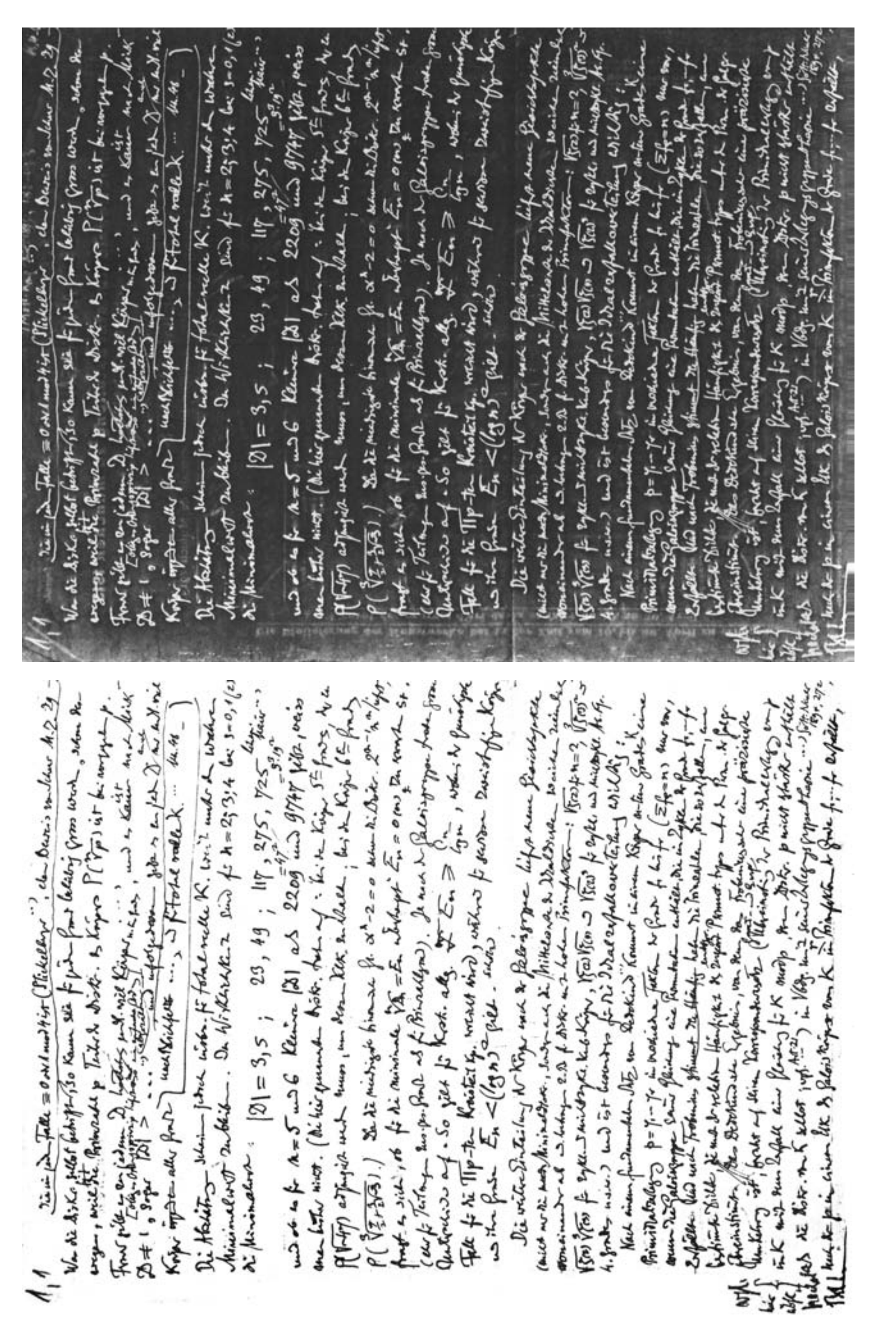


Abb. 7.1. Originalkopie einer Seite des Scholzschen Manuskripts (oben) und dessen bearbeitetes Negativ

Entwurf des Artikels

1. Einiges über Diskriminanten, Einheiten und Idealklassen

Niedrige Diskriminanten bei Körpern bis zum Grade 6, niedrigste bis Grad 4. Verteilung auf Realität der Wurzeln und den Affekt. Vermutung über die niedrigste Diskriminante D_n n-ten Grades: $\sqrt[n]{D_n} \sim n$. (Bei Minkowski und Blichfeldt [30] nur $\gtrsim e^2$, $\gtrsim e\pi$.) Aus Vermutung folgt Fermat-Satz (Zassenhaus[1)]). Klassenzahlvergleich bei steigendem Grad. Regulatorenabschätzung (Remak [265, 266]).

Absolut zyklische Körper: Zerlegungsgesetz und Hilbertsche Kreiskörpertheorie, soweit das alte Kapitel C4b nicht in anderen Artikeln aufgegangen ist. Einschränkungen für Klassengruppe, bedingt durch Galoisgruppe der Körper, noch nicht vorhanden bei quadratischen Zahlkörpern. Seltenheit absoluter[2)] zyklischer Klassenkörper bei höheren Grundkörpern.

2. Quadratische Zahlkörper

Anzahl der Geschlechter, Basisklassen von Zweierpotenzordnung (Gauß). Basisklassen durch 4 und 8 teilbarer Ordnung (Rédei-Reichardt [258]). Vorzeichen der Grundeinheit im reellen Fall (Gauß, Dirichlet, Rédei-Scholz [S15]). Irreguläre Diskriminanten. Tafeln. Hinweise auf systematische Arbeiten von Deuring, Hecke, Heilbronn, Landau, ... in anderen Artikeln.

Klassenzahlbeziehungen (Scholz).

3. Kubische Zahlkörper

Zerlegungsgesetz (Dedekind, Takagi, Hasse)[3)].

Einheiten und Idealklassengruppe (Scholz [S11], Reichardt [259])

Tafeln (Reid [264] u.a.). Rechnerische Möglichkeiten (Scholz-Taussky [S17]).

4. Abelsche Zahlkörper von Primzahlpotenzgrad

Zurückführung der Bestandteile der Dedekindschen Klassenzahlformel auf die der zyklischen Unterkörper (Herglotz [131], Pollaczek [250], Scholz, Värmon [323], Carlitz);[4)] Hinweise auf allg. Fall (Artin). Idealklassen- und Einheitengruppen in Kreiskörpern vom Grad ℓ^2 und relativ-Abelschen Körpern vom Grad ℓ^2 über imaginär-quadratischen Körpern. Einheitengruppen in den häufigsten Idealklassenfällen (Scholz). Kriterium dafür, daß eine dem Hauptgeschlecht angehörige Klasse existiert, die nicht durch $(S-1)$-te Potenzen von Idealklassen darstellbar ist. Ungültigkeit des Hasseschen Normenrestsatzes in diesem Fall.

5. Klassifizierung der Klassenkörper nach Tschebotarjov

Literatur: Zur Gruppentheorie des Klassenkörpers (Tschebotarjov). Eigentliche, uneigentliche, zentrale und Geschlechterklassenkörper, definiert durch Beschaffenheit der Trägheitsgruppen. (Hinweis auf Tschebotarjovs zahlentheoretischen Monodromiesatz, der in „Allgemeine Theorie der algebraischen Zahlen“ gehört). Gruppentheoretische Aufspaltung von Tschebotarjov, zu der eine Kette zentraler Klassenkörper gehört. Zusammenhang mit Scholzscher Zweigliederung der zweistufigen Gruppen (s.a. [S7] und eventuell gruppentheoretischer Artikel). Hinweis auf Einbettungsproblem (s. [S8]).

6. Körper mit vorgegebener Galoisgruppe, insbesondere symmetrischer und alternierender Gruppe
(Abel, Hilbert, Noether, Wiman ...) Verschiedene Literatur, noch aufzustellen. Auch DMV-Aufgabe über reine Normalgleichungen (Aufg. 171). Möglichst vollständige Literatur

7. Körper mit auflösbarer, insbesondere zweistufiger Gruppe
Aufgrund der Zweigliederung der zweistufigen Gruppe (s. [S5]): Konstruktion von Dispositionskörpern, insbesondere solcher mit Gruppen quadratfreier Ordnung, und zweistufiger Körper von Primpotenzgrad. Verallgemeinerte Dispositionskörper über beliebigem Galoiskörper. Verallgemeinerung des Konstruktionsverfahrens für Körper von Primpotenzgrad mit Tschebotarjovscher Kette (s. [S5]). Bedingungen führen auf Einbettungsfrage (s. [S8]).

8. Einbettung gegebener Galoiskörper in Körper mit vorgegebener Aufspaltungsgruppe
Zyklische Einbettbarkeit (Hilbert, van der Waerden – Hasse). Existenzbedingung für zentrale Klassenkörper (s. [S5]), sowohl absoluter als mit Führer. Wann ist Fortsetzung überhaupt beschränkt, in welchen Gruppenfällen immer? Zusammenhang der Frage mit Notwendigkeit neuer Erzeugenden einer Gruppe bei Aufspaltung.

9. Klassenkörpertürme
Von Hilbert[5)] aufgeworfene Frage der Existenz unendlicher Klassenkörpertürme; Existenz unwahrscheinlich nach 7.1. Existenz beliebig hoher Klassenkörpertürme bei genügend hoher Zahl von Verzweigten im Grundkörper (Scholz [S5]). Bei beschränkter Erzeugendenzahl hängt Existenz von Fortsetzbarkeitsfragen aus [S8] ab. Ausscheidung aus rein gruppentheoretischen Gründen nur vereinzelt; Schranken auch durch Grad des Grundkörpers.

Mehrstufigkeit der Türme bei niedrigem Körpergrad und breiter Klassengruppe. Spezialfälle genau zweistufiger Türme imaginär-quadratischer Zahlkörper (Scholz-Taussky [S17]).

gez. Dr. A. Scholz – Kiel

Nachtrag: Lagrangesche Wurzelzahlen, Gaußsche Summen, Kreiseinheiten

Scholz' Entwurf von „Spezielle Zahlkörper“

7.1 Einiges über Diskriminanten, Einheiten und Idealklassen

Die allgemeinen Eigenschaften der Zahlkörper, die durch die Galoistheorie und insbesondere die algebraische Zahlentheorie umrissen sind, lassen für die Stücke des einzelnen Zahlkörpers noch sehr viel Strukturmöglichkeiten zu. Unter den Stücken eines Körpers wollen wir dabei die Körperbegriffe verstehen, deren Maßzahlen in die Dedekindsche Klassenzahlformel[6)] eingehen:

$$\lim_{s\to 1}\frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)} = \frac{2^t\pi^s hR}{v\sqrt{|D|}} = \prod_p \frac{\phi(p^n)}{\phi_n(p)}. \tag{1}$$

Dies sind: der Grad n von K und die Zahl s der Imaginärpaare zu K konjugierter Körper ($n = r + 2s$), [der Einheitenrang $t = r + s - 1$,] als Maße für Idealklassen- und Einheitengruppe die Klassenzahl h, der Regulator R, die halbe Anzahl v der Einheitswurzeln in K (sinngemäß ist $\frac{R}{v}$ der Relativregulator über dem rationalen Zahlkörper; man mißt aber den Regulator nur nach den Fundamentaleinheiten; so hat man die Zahl $w = 2v$ der Einheitswurzeln gesondert zu berücksichtigen), ferner die Diskriminante D als Maß für die Körperbasis (= Quadratinhalt des Fundamentalgitters in der geometrischen Darstellung von K) und zugleich als Anzeiger der in K verzweigten Primzahlen und der Verzweigungsstärke; rechts dann als Anzeiger des allgemeinen Idealzerfalls die Idealdichte, ausdrückbar als Produkt Eulerscher Funktionen ϕ in $\mathbb{Q}$ und ϕ_n in K (Quotient $=, >, < 1$ bei Potenzzerfall, Vollzerfall, Nichtzerfall von p) oder als Quotient der Dedekindschen ζ-Funktion durch die Riemannsche, aus deren $\prod_p$-Darstellung obiges Produkt durch faktorenweise Division hervorgeht.

Über die Verteilung der Werte in (1) gilt folgendes: ordnet man nach der Signatur (n, s) und die Körper fester Signatur nach aufsteigender Diskriminante, so kommt nach bisheriger Erfahrung der Wertzuwachs von D im wesentlichen h und R zu; nämlich die Größenordnung der Idealdichte schwankt[7)] größenordnungsmäßig bei $n = 2$ nur zwischen $(c \log |D|)^{\pm 1}$, was man auch für $n > 2$ erwartet (und sicher für Kreiskörper stimmt?). (nach ... und Siegel [297] näheres sh. 7.2). Dabei kann die Verteilung von „im wesentlichen $\sqrt{|D|}$“ auf h und R sehr willkürlich sein, wie schon $n = 2$, $s = 0$ (reellquadratische Körper, sh. 7.2) zeigt, wo $\sqrt{|D|}$ jedoch vorwiegend auf R entfällt und nur in besonderen Fällen fast ganz h zukommt. Bei höherem Grad darf man wohl am häufigsten $\log h : \log R \sim s : t$ erwarten, wo $t = r + s - 1$ die Anzahl der Fundamentaleinheiten (der Grad von R) ist; dabei sind Beschränkungen für den Regulator einzeln durch R. Remak bekannt: nach oben durch $\sqrt{|D|}^{\,n^2-1}$ (für $s > 0$ etwas günstiger) und nach unten durch $\frac{1}{1000}$.

Sh. ??, Artin [5], Schaffstein.

Was die Diskriminante selbst betrifft, die in jedem Fall $\equiv 0$ oder 1 mod 4 ist (Stickelberger [309]; elementarer Beweis von Schur [288]), so kann sie

für jeden Grad beliebig groß werden, schon deswegen, weil die Primzahl p Teiler der Diskriminante des Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p})$ ist. Ferner gibt es zu jedem D nur endlich viele Körper n-ten Grades, und es ist nach Minkowski $D \neq 1$, sogar $|D| > \ldots$ nach Blichfeldt [30], und für total reelle Körper ... (obiges Ordnungsprinzip liefert also eine Abzählung, und infolgedessen gibt es zu jedem D auch nur endlich viele Körper aller Grade).

Die Abschätzungen scheinen jedoch insbesondere für total reelle K weit unter dem wahren Minimalwert zu bleiben. In Wirklichkeit sind für $n = 2; 3; 4$ bei $s = 0, 1, (2)$ die Minimaldiskriminanten $|D| = 3, 5; 23, 49; 117, 275, 725$ (Furtwängler [82], Mayer [192]), und ob es für $n = 5$ und $n = 6$ kleinere $|D|$ als $2209 = 47^2$ und $9747 = 3^3 \cdot 19^2$ gibt, weiß man bisher nicht. (Die hier genannten Diskriminanten treten auf: bei dem Körper fünften Grades, der zu $\mathbb{Q}(\sqrt{-47})$ adjungiert werden muß, um dessen Klassenkörper zu erhalten; bei dem Körper sechsten Grades $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{-3}}\ \right)$.)

Da die niedrigste binomische Gleichung $x^n - 2 = 0$ schon die Diskriminante $2^{n-1}n^n$ liefert, fragt es sich, ob für die minimale $\sqrt[n]{D_n} = E_n$ überhaupt $E_n = o(n)$ zu erwarten ist (eher für Teilmengen zusammengesetzten Grades als für Primzahlgrad). Je nach der Galoisgruppe treten große Unterschiede auf. So gilt für Kreiskörper allgemein $E_n \geq \frac{Cn}{\log n}$, wobei der günstigste Fall für die $\prod_p$-ten Kreisteilungskörper erreicht wird, während für gewisse zweistufige Körper und ihre Grade $E_n < (\log n)^2$ gilt (Scholz [S21]).

Die weitere Einteilung der Körper nach der Galoisgruppe liefert neue Gesichtspunkte (nicht nur die Minimaldiskriminante, sondern auch die Mittelwerte der Idealdichten weichen ziemlich voneinander ab und betragen z.B. für Diskriminanten mit hohen Primfaktoren: $\sqrt{\zeta(2)}$ für $n = 2$, $\sqrt[3]{\zeta(3)^2}$ bzw. $\sqrt{\zeta(2)}\sqrt[3]{\zeta(3)}$ für zyklische bzw. nichtzyklische kubische Körper, $\sqrt{\zeta(2)}\sqrt{\zeta(4)}$ bzw. $\sqrt{\zeta(2)}^3$ für zyklische bzw. nichtzyklische abelsche Körper vierten Grades usw.)[8)] und ist besonders für die Idealzerfallsverteilung wichtig: nach einem fundamentalen Satz von Dedekind ... kommt in einem Körper n-ten Grades eine Primidealzerlegung $p = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$ in verschiedene Faktoren der Grade f_1 bis f_r $(\sum f_\rho = n)$ nur vor, wenn die Galoisgruppe seiner Gleichung eine Permutation enthält, die in Zyklen der Grade $f_1, \ldots, f_r$ zerfällt, und nach Frobenius haben die Primzahlen, die so zerfallen, eine bestimmte Dichte, die mit der relativen Häufigkeit des entsprechenden zugeordneten Permutationstyps unter den Permutationen der Galoisgruppe übereinstimmt. Das Dedekindsche Ergebnis, von dem das Frobeniussche eine präzisierte Umkehrung ist, beruht auf seinem Korrespondenzsatz (Übereinstimmung von Grad und Exponent der Primidealzerlegung von p in K mit dem Zerfall einer Gleichung für K mod p, deren Diskriminante p nicht stärker enthält als die Diskriminante von K selbst; vgl. Artikel 21) in Verbindung mit seiner Zerlegungsgruppentheorie [62], nach der p in einem Unterkörper des Galoiskörpers von K in r Primfaktoren der Grade $f_1, \ldots, f_r$ zerfällt,

Die hier anknüpfende Frage, ob jede Klasse konjugierter Körper bereits durch den Primidealzerfall der unverzweigten Primzahlen bestimmt sei, ist zu verneinen. Es müssen allerdings zwei Körper gleichen Zerfalls denselben Galoiskörper haben (Bauer ...). Doch zeigte F. Gaßmann [94], daß z.B. bei Körpern mit der S_6 die Galoisresolvente N vom Grade 720 nicht konjugierte Unterkörper vom Grad 180, zu den Untergruppen $1 + (12)(34) + (12)(56) + (34)(56)$ bzw. $1 + (12)(34) + (13)(24) + \dots$ gehörig, besitzt, in denen die Diskriminantenfremden Primzahlen gleich zerfallen, weil die Untergruppen auf gleiche Art in Klassen zerfallen: ihre als Zerlegungsgruppe in Betracht kommenden zyklischen Untergruppen tatsächlich konjugiert sind.

Für die in der Diskriminante aufgehenden Primzahlen gilt dasselbe, falls die Unterkörper sechsten Grades mit dem Normalkörper N_6 selbst quadratfreie Diskriminante haben, z.B. $x^6 - x - 1 = 0$ mit der Diskriminante $49781 = 67 \cdot 743$. Dann ist nämlich (s. o.) $N_6/\mathbb{Q}(\sqrt{D}\,)$ unverzweigt, und dieser Relativkörper ist jetzt für den Zerfall der Diskriminantenteiler zu betrachten.

Denn ist g die Untergruppe von K in seinem Normalkörper NK und Z die Zerlegungsgruppe eines Primteilers von p (etwa $\mathfrak{p}_1$) in NK, so verteilt sich nach Dedekind [62] Z mod g auf f_1 rechtsseitige Nebenklassen (entsprechend für Konjugierte von Z auf $f_2, \dots, f_r$ Rechtsnebenklassen), die die Übergänge zu konjugierten Resten mod $\mathfrak{p}_1$ darstellen; unter diesen führt der Übergang zur p-ten Potenz zu einer gewünschten Permutation der Restklassen nach g.

Die Umkehrung gilt nach Frobenius [77], und zwar haben die $p = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$ zerfallenden Primzahlen eine bestimmte, der Häufigkeit ihres Permutationstyps entsprechende Dichte, gemessen durch $\lim_{s\to 1} \frac{\sum p^s}{\log \frac{1}{s-1}}$ oder auch $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi_0(n)}{\pi(n)}$, wo $\pi_0(n)$ die Anzahl der so zerfallenden Primzahlen bis n (bezeichnet). Für die voll zerlegten Primzahlen $p = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$ ist also $\frac{1}{n}$ die Dichte. Proportionale Dichte erhält Frobenius ebenfalls bei der Einteilung der $\mathfrak{p}$ nach den Abteilungen der zugehörigen Zerlegungssubstitution. Seine Vermutung, daß dies auch für die Einteilung der p nach Substitutionsklassen gilt, wenn man einen Primidealteiler $\mathfrak{p}$ von p in K, für den allgemein $\alpha^p \equiv \alpha^S$ gilt, als zur Substitution S gehörig zählt, wurde erst durch Tschebotarjov [316] mittels Durchkreuzung (sh. 7.8) mit geeigneten Kreiskörpern bewiesen; vgl. auch die Beweise von O. Schreier [284], A. Scholz [S10].

Teile dieses den Satz über die arithmetische Progression (sh. ...) einschließenden Ergebnisses wurden auf rein arithmetischem Wege bewiesen; so von Dedekind (...) die Existenz unendlich vieler Primideale ersten Grades in jedem Körper, insbesondere damit die Existenz unendlich vieler Primzahlen $\equiv 1 \bmod m$ (Fall des Körpers der m-ten Einheitswurzeln, sh. u.). Umgekehrt müssen die Primzahlen enthaltenden Restklassen die ganze Restklassengruppe erzeugen, zusammen also sowohl innerhalb als außerhalb jeder echten Untergruppe Primzahlen [liegen], entsprechend Primideale in und außerhalb jeder Kongruenzklassengruppe, weil zu dieser ein Klassenkörper (sh. die Beweisrationalisierung in Art. ...) gehört. Eine arithmetische Kombination lieferte Deuring [71]. Folgende Kombination beider Richtungen läßt sich

noch arithmetisch erfassen: Man darf eine Untergruppe A vorgeben, in der das Primideal liegen soll, und von dieser eine Untergruppe B von Primzahlindex in A, in der es nicht mehr liegen soll.

[Deuring, Schur [287], Hasse - van der Waerden, Eisenstein. Welche arithmetisch?]

Körpertheoretische Fassung.

Insbesondere existieren also Primideale mit vorgegebener Zerlegungsgruppe von Primzahlpotenzordnung.

Die Kombination ist nämlich ein Spezialfall des von Deuring [71] arithmetisch bewiesenen M. Bauerschen Satzes: Zerfallen fast alle Grundkörperprimideale, die in einem Ω Primfaktoren ersten Grades haben, in einem Normalkörper K voll, so gilt $K \subseteq \Omega$. Für $K \not\subset \Omega$, insbesondere $K \supsetneq \Omega$, gibt es also in K nicht voll zerfallende Primideale mit erstgradigem Teiler in Ω.

Der Deuringsche Beweis verwendet den Hasse-Artinschen arithmetischen Teil der Klassenkörpertheorie (vgl. [Chev.]) [?] bei zyklischem K/k vom Grade n die aus den Relatividealnormen erzeugte Gruppe H nach geeigneten [??] Modul $\mathfrak{m}$ einen durch n teilbaren Index hat; [???] einer Verallgemeinerung des von Hilbert (Zahlbericht Satz 89) für absolute Idealklassen ausgesprochenen Satzes: In jeder Idealklasse nach einer Idealgruppe H in einem Zahlkörper K gibt es Ideale deren Primfaktoren alle den Absolutgrad 1 haben.

Zur Körperbasis ist noch zu bemerken, daß sie nur in günstigen Fällen aus den Potenzen einer Körperzahl gebildet werden kann. Es gibt sogar für jedes $p < n$ (doch nur solche p) Körper n-ten Grades, in denen jeder Ring $[1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}]$ einen durch p teilbaren Index im Maximalring hat und infolgedessen $\Delta(\alpha) = Da^2$ das p als außerwesentlichen Diskriminantenteiler, d.h. $p \mid a$. Zum Beispiel gilt das, wenn $p < n$ voll zerfällt; denn es kann dann für p der Diskriminantensatz nicht gelten, weil ein Polynom n-ten Grades mod p nicht in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfallen kann.

Kreiskörper Zerfällungsgesetz (sh. Furtwängler und ??) p zerfällt in eine Potenz in jedem p^h-ten Kreisteilungskörper; in Ideale f-ten Grades im ℓ^h-ten Kreisteilungskörper $Z = K(\zeta)$, falls p zum Exponenten f gehört, und zwar zerfällt p voll noch gerade im Unterkörper von Z, der zur Kreisteilungsperiode $(\zeta, \zeta^p, \zeta^{p^2}, \ldots)$ gehört. Hieraus nach Kombination der Zerfall in jedem Kreiskörper.

Eine Basis für den Körper K_m der m-ten Einheitswurzeln ist $\{1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{\phi(m)-1}\}$, wie aus dem Fall $m \neq \ell^h$ nach Hilberts Zahlbericht, Satz 88, folgt und für $m = \ell^h$ daraus, daß $D(\zeta)$ eine ℓ-Potenz und $\sum_{\lambda=0}^{\phi(m)-1} a_\lambda \zeta^\lambda \equiv 0 \bmod \ell$ nur für $a_\lambda \equiv 0 \bmod \ell$. [??]

Eine Normalbasis, d.h. aus lauter konjugierten Zahlen, existiert noch für quadratfreies m, nämlich $[\zeta, \zeta^a, \zeta^{a'}, \ldots]$ mit $(a, m) = (a', m) = \ldots = 1$ und dann auch für alle deren Unterkörper (Hilbert, Satz 132).

Die zur Normalbasis ν^{S^a} (S^a in G) gehörige Wurzelzahl $\sum_{a=0}^{\ell-1} \zeta^a \nu^{S^a} = \omega$ des Körpers $K(\zeta) = \mathbb{Q}(\zeta, \nu)$ (ζ eine ℓ-te Einheitswurzel, $\mathbb{Q}(\nu) = K_p^\ell$ Un-

terkörper ℓ-ten Grades der p-ten Einheitswurzeln, wo ℓ und p Primzahlen, $p \equiv 1 \bmod \ell$) hat folgende kennzeichnende Eigenschaften:

1. ω^ℓ und ω^{S-r} liegen in K_ℓ, nicht aber ω selbst;
2. $\omega \equiv 1 \bmod (1-\zeta)\ell^{1/(\ell-1)}$;
3. $N\omega = p^{\binom{\ell}{2}}$.

(Hilbert, 133/34).

Es zerfällt (Hilbert Satz 135)

$$\omega^\ell = \mathfrak{p}^{r_0+r_1S+r_2S^2+\ldots+r_{\ell-2}S^{\ell-2}}$$

in K_ℓ, wo r_i der kleinste positive Rest von $r^{-i} \bmod p$. Dabei folgt $r_i : r_{i+1} \equiv r \bmod p$ aus $\omega^{\ell(S-r)} = \alpha^\ell$ (7.2. oben) und „kleinster positive Rest“ aus $N\omega = p^{\binom{\ell}{2}}$ (3.). Hierbei wird $\alpha = \mathfrak{p}^{q_0+q_1S+\ldots+q_{\ell-2}S^{\ell-2}}$, wo $\ell q_i = rr_i - r_{i-1}$ (Satz 136), was insbesondere $C^? = 1$ für jede Idealklasse aus K_ℓ (neben $C^{1+S+\ldots+S^{\ell-2}} = 1$) liefert.

Die verschiedenen Wurzelzahlen von K_p^ℓ unterscheiden sich also nur um Einheiten, und zwar bei fester Zuordnung $T \longmapsto \zeta$ (Satz 137) nur um ein $\varepsilon \equiv \pm 1 \bmod \zeta - 1$ aus K_ℓ. Jedes $\varepsilon\omega$ ist zugleich Wurzelzahl (Satz 137).

Eine spezielle Klasse bilden die Lagrangeschen Wurzelzahlen oder verallgemeinerte Gaußsche Summen; [allgemein $p-1 = ef$] $\sum_{a=0}^{p-2} \zeta^a \rho^{v^a} = \sum_{i=0} \zeta^i \sum_{j=0}^{f-1} \rho^{v^{\ell j}+i}$, ρ p-te Einheitswurzel, v Primitivwurzel modulo p. (Vgl. Stickelberger, Crelle 31 ... Verallgemeinerung bei Hasse und Davenport [61]. Verallgemeinerung der gewöhnlichen Gaußschen Summen (sh. 2); kubischer Fall sh. 7.3; die für $e = \ell$ aus den Kreisteilungsperioden.

Sie gehört zu der aus den Kreisteilungsperioden hervorgehenden Normalbasis $\sum_{v=0}^{f-1} \rho^{v^{\ell j}+i}$, $(i = 0, \ldots, \ell - 1)$ und ist für $e = \ell$ zusammen mit allen $\zeta^j\lambda$ unter den Wurzelzahlen dadurch ausgezeichnet, daß sie $\equiv -1 \bmod \lambda$ und $\sqrt{p}$ ihr Absolutbetrag ist. Die Auszeichnung von λ unter den $\zeta^j\lambda$ entspricht der Bestimmung des Vorzeichens der Gaußschen Summen (vgl. 2 [Es drückt sich aus $\mathfrak{p} = (p, \zeta - v^{-e})$] und beachte die Bezugnahme im Falle $e > 2$ auf Auswahl der Primitivwurzel v wie in 3!)

Weitere Literatur siehe Hilbert, S. 227, Ges. Werke).

Eine Übersicht über die sämtlichen Einheiten von $K_m = \mathbb{Q}(\zeta)$ erhält man durch die „Kreiseinheiten“

$$\eta_a = \sqrt{(1-\zeta^a)(1-\zeta)(1-\zeta^{-1})^{-1}(1-\zeta^{-a})^{-1}} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{(1-\zeta^a)(1-\zeta^{-a})},$$

$a > 1$ und $(a, m) = 1$, je nachdem m Primpotenz oder nicht. Die Einheiten $\varepsilon_a = \frac{1-\zeta^a}{1-\zeta}$ (oder $1-\zeta^a$) bilden nämlich ein vollständiges System unabhängiger Einheiten und da andererseits ein Einheitenfundamentalsystem des reellen Teilkörpers Λ_m zugleich ein Fundamentalsystem von K_m ist – weil gleiche

Anzahl und die Möglichkeit $K_m = \Lambda_m(\sqrt{\varepsilon})$ für $m \neq 2^e$ wegen $D(K_m/\Lambda_m) \nmid 4$ ausscheidet, während $K_m = \Lambda_m(\sqrt{-1})$ für $m = 2^e$ ist –

Die Einheitengruppe $E(K_m)$ wird aus der des reellen Unterkörpers Λ_m und ζ erzeugt, d.h. ein Fundamentalsystem von $E(\Lambda_m)$ ist zugleich ein solches für K_m. Es besteht nämlich [...] aus $\frac{1}{2}\phi(m) - 1$ Einheiten, und es kann nicht $K_m = \Lambda_m(\sqrt{\varepsilon})$ sein, ohne daß $\varepsilon = -1$ (Fall zu $m = 2^e$), weil[1] $D(K_m/\Lambda_m) \nmid 4$ für $m \neq 2^e$. Als Einheiten sind leicht zu gewinnen $\varepsilon_a = (1-\zeta^a)(1-\zeta)^{-1,0}$ ($a > 1$ und $(a,m) = 1$), je nachdem m Primpotenz oder nicht[9)]. Hieraus als reelle Einheit die Kreiseinheiten $\eta_a = \sqrt{\varepsilon_a \overline{\varepsilon_a}}$.

7.2 Quadratische Zahlkörper

Basis: $[1, \frac{1}{2}(b+\sqrt{D})]$, $b \equiv D \bmod 2$, wo D alle Werte $4n+0, 1 \neq q^2$ annehmen darf bei $D \neq \partial q^2$ mit $\partial \equiv 0, 1 \bmod 4$ und $q > 1$. Das Zerlegungsgesetz eines quadratischen Körpers ist ablesbar aus seiner Eigenschaft als Kreiskörper, als quadratischer Unterkörper der $|D|$-ten Einheitswurzeln: $p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, p unzerlegt oder $\mathfrak{p}^2$, je nachdem $(p/|D|) = 1, -1, 0$. Aber auch aus seiner Eigenschaft als reiner Körper in Verbindung mit dem Dedekindschen Korrespondenzsatz: $p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{p}^2$, je nachdem $(D/p) = 1, -1$ oder 0. Beide Aussagen stehen durch das quadratische Reziprozitätsgesetz miteinander in Verbindung.

Schließlich erhält man Aussagen über alle Stücke des quadratischen Körpers auf sehr eingängige Weise durch Vergleich mit der Theorie der quadratischen Formen (Art. 27): [sogar auch für quadratische Ordnungen mit Diskriminante Df^2] Man ordnet einem Ideal $\mathfrak{j} = [a, \frac{1}{2}(b+\sqrt{D})]$ ohne rationalen Faktor die primitive quadratische Formenschar $(a, b+2at, c_t)$ mit $(b+2at)^2 - 4ac_t = D$ zu, $t = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$. Diese bestimmt umgekehrt das Ideal $\mathfrak{a}$ mit der Norm a, für das $\sqrt{D} \equiv -b \bmod \mathfrak{a}$ ist. Der durch Komposition (Art. 27) der Formen (a,b,c) und (k,l,m) hervorgehenden Formenschar ist das Ideal $\mathfrak{a}\mathfrak{k} : r$ zugeordnet, wo r der größte rationale Faktor von $\mathfrak{a}\mathfrak{k}$ (ist), der $= 1$ bei „Einhelligkeit“ der Formen. Die in der Formenkomposition inbegriffene Komposition der Klassen entsprechen der Idealklassenkomposition. Der Formenklasse entsprechen dabei „Idealklassen im engeren Sinne“ mit dem Äquivalenzprinzip $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{j}$ für $\mathfrak{a}\mathfrak{j}^{-1} = (\gamma)$ mit $N\gamma > 0$. Danach besteht eine gewöhnliche Idealklasse aus zwei engeren Idealklassen, wenn $D > 0$ und die der kleinsten Lösung der Pellschen Gleichung $t^2 - Du^2 = \pm 4$ entsprechende Fundamentaleinheit $\varepsilon = \frac{1}{2}(t + u\sqrt{D})$ positive Norm hat (die Pellsche Gleichung mit -4 unlösbar ist). Weitgehende Beantwortung dieser Frage s.u.

Klassenzahlvergleiche zwischen der Hauptordnung der Diskriminante D und der Ordnung der Diskriminante Df^2 mit dem Führer f: darstellbar sind durch die Formen von D und die von Df^2 dieselben zu f primen Zahlen, nämlich alle $\prod p^a \prod q^b$ mit $(D/p) = +1$, $q \mid D$, und $p, q \nmid f$ (für die $p, q \mid f$ ergeben sich die Unterschiede ... sind, wenn genau $p^i, q^j \mid f$ gilt, darstellbar

[1] Offenbar nimmt Scholz hier an, daß m eine Primzahlpotenz ist.

$p^2,\ p^4,\ \ldots,\ p^{2i},\ p^{2i+a}$ $(a > 0)$ und $q^2,\ q^4,\ \ldots,\ q^{2j},\ p^{2j+1}$. Die zugehörigen Ringideale haben hier im allgemeinen keine eindeutige Primzerlegung).

Für $D < 0$ (imaginärquadratischer Körper) gibt das

$$h(Df^2) = \prod_{p|f} p^{e-1}\Big(p - \Big(\frac{D}{p}\Big)\Big)h(D).$$

Nämlich aus einer reduzierten Form der Diskriminante D gehen durch Substitution mit der Determinante p genau $p+1$ imaginäre reduzierte Formen hervor, und zwar aus der Hauptform $(1, b, c)$ die Hauptform $(1, pb, b^2c)$, sowie die Formen $(p^2, p(b \pm 2pt), c_t)$ mit $-p/2 \le t < p/2$. Von diesen sind alle primitiv bis auf die $1 + (\frac{D}{p})$ Formen mit $4c_t = (b+2t)^2 - D \equiv 0 \bmod (4p)$. Von den die Hauptform in die Seitenformen überführenden gebrochenen Substitutionen $\left(\begin{smallmatrix} p & t \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\right)$ sind $r-1$ in der Form A^a $(a = 1, 2, \ldots, r-1)$ darstellbar, wo S ganz ist und A die gebrochene automorphe Substitution von $(1, pb, p^2c)$ (ist), die zur Fundamentallösung von $t^2 - Du^2 = 4$ gehört, wenn dabei A^r ganz, indem die r-te Lösung von $t^2 - Du^2 = 4$ die kleinste mit $p \mid u$ ist.

Über die Gestalt der [Ideal-] Klassengruppe quadratischer (Formen) Zahlkörper besitzt man folgende (Daten) [unleserlich]: Die Zahl e_2 der Basisklassen von Zweierpotenzordnung[2] ist e_2 für ein $D = q_0 q_1 \cdots q_{e_2}$ mit $q_0 = -4, \pm 8$ oder q, wo $q = 4n + 1 \gtrless 0$ Primzahl wie jedes q_i $(i > 0)$.

Einfachste Feststellung durch Abzählung der zweiseitigen Ideale (Formen) und Klassen. Dies sind genau $e_2 + 1$ unabhängige, also 2^{e_2+1} Teiler von $\sqrt{D}$ (Formen für $D > 0$ doppelt so viel). Dabei gehört zur Hauptklasse das Paar $1, \sqrt{D}$ für $DN(\varepsilon) < 0$, für > 0 aber $1, \delta$ mit $\delta^{S-1} = \varepsilon$, $N(\delta) = \partial$ zweiseitige Zahlideale also hier $1,\ \delta,\ \delta^{-1}\sqrt{D},\ \sqrt{D}$ (Durchschnittshauptform von D sicher darstellbar $1, -D$ für $D < 0$, $\pm 1, \pm D$ oder $1,\ -\partial',\ -D = -\partial\partial'$ für $D > 0$). Also Verteilung auf 2^e Klassen.

Da leicht zu zeigen, daß jede Klasse der Ordnung 2 ein zweiseitiges Ideal (Form) enthält, gibt es also 2^{e_2} Klassen der Ordnung 2 und somit e_2 Basisklassen von Zweierpotenzordnung.

Einen anderen, schwierigeren Beweis liefert die Gaußsche Geschlechtertheorie: die schärfstmögliche Einteilung der (Formen-) Idealklassen nach Restklassen der (darstellbaren Zahlen) Idealnormen a ist die nach den quadratischen Restcharakteren mod $D = q_0 \cdots q_{e_2}$, wobei nur die mit $(D/a) = 1$ überhaupt auftreten. Daß alle diese 2^{e_2} Restcharaktere bei der Idealnorm auftreten, liegt tiefer. Ferner gehört jede Quadratklasse zum Hauptgeschlecht $[(a/q_0) = (a/q_1) = \ldots = (a/q_{e_2}) = 1]$, während die Umkehrung, daß jede Klasse des Hauptgeschlechts ein Quadrat ist (Gauß), wieder tiefer liegt. (Den Zusammenhang mit der obigen Abzählung 2^e liefert am einfachsten wieder die Abzählung der zweiseitigen Ideale). Aus all dem folgt die Behauptung.

Die Zahl e_4 der Basisklassen einer durch 4 teilbaren Ordnung ist nach dem Vorigen die Zahl der im Hauptgeschlecht liegenden zweiseitigen Klassen. D.h. insbesondere im Fall $D = q_0 q_1$ zyklischer Klassengruppe, daß die

[2] hier durchgestrichen: liefert die Gaußsche Geschlechtertheorie

Klassenzahl genau dann durch 4 teilbar, wenn $(q_1/q_0) = 1$. Vergleiche hier Rédei-Reichardt.[3]

Allgemein ist die Anzahl der unabhängigen und vierteiligen Invarianten gleich der Anzahl der unabhängigen D-Zerfällungen $D = PQ$ „zweiter Art", die so beschaffen sind, daß P quadratischer Rest für (alle Teiler von) Q und Q für P [und sind mit Vorzeichen so vorzunehmen, daß P, Q nicht ??] (Die Zerfällungen bilden eine Gruppe vom Exponenten 2). Dieser Satz ist von Rédei-Reichardt klassenkörpertheoretisch [258] und von Rédei arithmetisch [253] bewiesen. Alle geraden Invarianten können nur dann durch 4 teilbar sein, wenn D höchstens ein negatives $P = p$ enthält; für k Paare negativer Faktoren sind mindestens k Invarianten $= 2$ (Rédei [253]).

7.3 Kubische Zahlkörper

Klassenzahl kubischer Nichtnormalkörper $S^3 = T^2 = E$, $ST = TS^2$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D}\,)$, $KK' = \overline{K}$.[4]

$p > 3$ gehe in der Klassenzahl (K') auf. p-Gruppe im Normalkörper $\overline{K}$

$$\{T_0, T_1, \ldots, T_k\},\ T_0^T = T_0, T_1^T = T_1^{-1}, T_2^T = T_2^{-1}, \ldots, T_k^T = T_k^{-1}.$$

(Erzeugt T_0 symbolisch eine zweistufige Gruppe ($T_0^{1+T} \neq 1$), so kann man aufspalten in T_0 und T_1. Obige Form für zyklische Klassengruppen in K'. Sonst entsprechend zusammensetzbar aus T_1', …, T_i', T, …, T_k).

Es ist stets $T_K^S = T_K$.

Bei passender Anordnung der $T_1, \ldots, T_k$ wäre $T_0^S = T_0^{a_0} T_1^{a_1}$ darstellbar und dann $T_0^{a_0} T_1^{-a_1} = T_0^{S^2} = (T_0^{a_0} T_1^{a_1})^S = T_0^{a_0^2} T_1^{a_0 a_1} T_1^{a_1 S}$. Also für $a_1 \not\equiv 0 \bmod p$:

$$\begin{aligned} T_1^S &= T_0^{-a_0^2/a_1} T_1^{-1-a_0} \quad \text{und} \\ T_0^{S^3} &= T_0^{a_0^2} T_1^{a_0 a_1} T_1^{a_1 + 2a_0 a_1}. \end{aligned}$$

Also $a_1 + 2a_0 a_1 = 0$, $a_0 = -\frac{1}{2}$, $2a_0^2 - a_0 = 1$. Ebenso

Beispiel: $T_0^s = T_0^{-1/2} T_1$;

$$\begin{aligned} T_0^{-1/2} T_1^{-1} &= T_0^{S^2} = T_0^{1/4} T_1^{-1/2} T_0^{-3/4} T_1^{-1/2} \\ T_0^{S^3} &= T_0^{1/4} T_1^{-1/2} T_0^{3/4} T_1^{1/2} = T_0 \\ T_0^{1+S+S^2} &= 1 \\ T_1^{1+S+S^2} &= T_1 T_0^{-3/4} T_1^{-1/2} T_0^{3/8} T_1^{-3/4} T_0^{3/8} T_1^{1/4} = 1 \end{aligned}$$

[3] hier durchgestrichen: wo der allgemeine Fall auch mitbehandelt ist. Schließlich ist nach Rédei … $e_8 > 0$, wenn $D = \partial\partial'$ so zerlegbar ist, daß

[4] Hier bezeichnet K einen kubischen Zahlkörper mit Diskriminante D und normalem Abschluß $KK' = \overline{K} = K(\sqrt{D}\,)$. Es ist $\mathrm{Gal}(\overline{K}/\mathbb{Q}) = \langle S, T : S^3 = T^2 = 1, [S,T] = S^{-1}\rangle \simeq S_3$.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix},\ S^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 3/4 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$ST = TS^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -3/4 & 1/2 \end{pmatrix},\ S^2T = TS = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$p = 3$: außerdem $T_0^S = T_0$; $T_1^S = T_1$; $T_0^T = T_0$; $T_1^T = T_1^{-1}$ möglich, ohne daß diese Klassen schon aus dem quadratischen Körper stammen. Gibt Neuheiten des K_3 und K_6.

Irreduzible Darstellungen und Klassenzahlformel: Galoisgruppe G
Irreduzible Darstellungen $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_k$;
Reguläre Darstellung $\mathcal{R} = \prod \mathcal{R}_k^{h_k}$, wenn h_k Grad$(\mathcal{R}_k)$, $\sum h_k^2 = n$.
Reduzierte Darstellung $\mathcal{R}' = \prod_{k>1} \mathcal{R}_k^{h_k}$.

$$\prod \frac{\phi(p^n)}{\phi_n(p)} \ = \ \frac{2^{n-s}\pi^s hR}{w\sqrt{|D|}}.$$

1) Es ist $\frac{\phi(p^n)}{\phi_n(p)} = \frac{p^{n-1}}{\psi_s(p)}$, wo $\psi_s(x)$ die charakteristische Funktion der reduzierten Darstellung

$$= \frac{\prod p^{h_k}}{\prod \psi(\quad_k, s, p)}.$$

7.4 Abelsche Körper von Primzahlpotenzgrad ℓ^n

Will man die Zerlegung der Primideale eines gegebenen Körpers K_0 in einem über K_0 relativ Abelschen Körper K wissen, so braucht man sie nur für eine Basis zyklischer Körper für K zu kennen, soweit es sich nur um die in K unverzweigten Primideale handelt. Bei anderen Stücken des Körpers hingegen wie Klassenzahl und Einheitengruppe ist die Kenntnis der Stücke in sämtlichen zyklischen Unterkörpern notwendig. Am besten wird dies am Beispiel des Abelschen Körpers vom Typus (ℓ, ℓ) beleuchtet; Ergänzungen für Typen $(\ell, \ldots, \ell)$; (ℓ^2, ℓ), ...lassen sich dann leicht anbringen. Diese Reduktionsmöglichkeit beruht hier auf der Tatsache, daß sich die Dedekindsche Klassenzahlformel[10)]

$$\lim_{s\to 1} \frac{\zeta_K(s)}{\zeta_{K_0}(s)} = \frac{2^{r+s-1}\pi^s hR}{w\sqrt{|D|}} = \prod_p \frac{\phi(p^n)}{\phi_n(p)}, \tag{2}$$

in der $\zeta_K(s)$ die Dedekindsche ζ-Funktion des Klassenkörpers, n der Grad von K, s die Anzahl der Paare der imaginär konjugierten Körper zu K, h seine Klassenzahl, R sein Regulator, w die Anzahl der Einheitswurzeln in K und D seine Diskriminante ist, ϕ die Eulersche Funktion im rationalen Zahlkörper, ϕ_n die in K, und p alle Primzahlen durchläuft – sich im Falle eines Körpers K vom Typus $(\ell, \ldots, \ell)$ in die betreffenden Stücke sämtlicher

$\frac{\ell^n-1}{\ell-1}$ zyklischen Unterkörper zerlegen läßt; nur bei h und R können Verschiebungen um Faktoren ℓ auftreten. Für diese beiden Stücke kann der Sachverhalt gruppentheoretisch erschlossen werden: die Idealklassen- und Einheitenbasen der zyklischen Unterkörper erzeugen zusammen eine Idealklassen- bzw. Einheiten-Untergruppe im Produktkörper, der jede ℓ^{n-1}-te Ideal- bzw. Einheitenpotenz angehört. Ebenso bilden, wenn man ein Repräsentantensystem von Idealen für die einzelnen Idealklassenbasen gewählt hat und die aus diesen Idealen im Produktkörper erzeugte Idealklassengruppe betrachtet, die Hauptideale eine Untergruppe von einem Exponenten, der ℓ^{n-1} teilt.

Der Fall $\ell = 2$ wurde von Herglotz [131] behandelt, der Fall $\ell > 2$, $n = 2$ teils von Pollaczek [250], teils von Scholz .... In der letztgenannten Abhandlung wird zur Eingliederung des gruppentheoretischen Sachverhalts in den durch die Klassenzahlformel gegebenen numerischen Sachverhalt gezeigt, daß die aus den Einheitenbasen der zyklischen Unterkörper zusammengesetzten Einheitengruppe einen Regulator besitzt, der das Produkt der zyklischen Unterkörperregulatoren multipliziert mit einer nur von der Galoisgruppe, Typ (ℓ, ℓ), abhängigen Potenz von ℓ. (Für jeden Typ $(\ell^{h_1}, \dots, \ell^{h_k})$ läßt sich auf ähnliche Weise die zugehörige Potenz von ℓ bestimmen).

Einheitengruppe a) bei Idealklassengruppe 1
b) maximaler Idealklassengruppe
c) Fall aus I.

Um ein Bild über die Mannigfaltigkeit der Relativstrukturen der Idealklassen- und Einheitengruppen in Abelschen Körpern vom Typ (ℓ, ℓ) bei ungeradem ℓ zu geben, wählen wir $K = K_1K_2$ als Produkt der Unterkörper ℓ-ten Grades der q_1-ten und q_2-ten Einheitswurzeln, $q_1, q_2 \equiv 1 \bmod \ell$ Primzahlen. Sind q_1 und q_2 nicht gegenseitig ℓ-te Potenzreste, so schließt man leicht (vgl. 7.8), daß K eine zu ℓ fremde Klassenzahl hat, die $\ell - 1$ Unterkörper K' außer K_1 und K_2 eine genau durch ℓ teilbare Klassenzahl. Da sich bei $p \neq \ell$ die p-Untergruppen der Idealklassengruppe von K_1, K_2 und den K' direkt multiplizieren, ist die Struktur der Idealklassengruppe von K mit denen der zyklischen Unterkörper bekannt. Die Einheitengruppe von K hat hier, wenn q_1 und q_2 gegenseitige ℓ-te Nichtreste sind, die besondere, i.a. nur für zyklische Körper gültige Eigenschaft, daß es eine Grundeinheit gibt, aus der sich alle Einheiten als symbolische Potenzen mit ℓ-ganzen Exponenten darstellen. Und zwar ist ihre Relativnorm in jedem zyklischen Unterkörper dort Grundeinheit, wie man zuerst schließt, und ihre ℓ-te Potenz das Produkt der zyklischen Grundeinheiten, (bei $q_2 \equiv a^\ell \bmod q_1$ nur das Produkt der Grundeinheiten aus K_2 und den K', zur symbolischen Erzeugung der ganzen Gruppe muß hier die Einheit ε_1 aus K_1 hinzugenommen werden).

Im gegenteiligen Falle, daß q_1 und q_2 zueinander ℓ-te Potenzreste sind und infolgedessen K eine durch ℓ teilbare Klassenzahl hat, kann es in seltenen Fällen auch eine Grundeinheit der obigen Gestalt geben. Wie weit verzweigt hier die Möglichkeiten sind, ersieht man schon an dem kombinierten Fall $\varepsilon_1 \not\equiv \beta^{(S-1)^2}\gamma^\ell \bmod q_2$ in K_1, wo die Idealklassen von K gegenüber der K_2 in Ruhe

lassenden Substitution S invariant bleiben; vgl. die ausführliche Bestimmung der Einheitengruppe auf S. 186 der Abhandlung [S14], deren 3. Kapitel die weiteren Einzelheiten über die Gestalt der Einheitengruppe im allgemeinen enthält.

Für $\ell = 2$ ergeben die entsprechenden einfacheren Betrachtungen wichtige Anhaltspunkte über die Invarianten der Klassengruppe eines Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$; $D = q_1 q_2 \cdots q_r$, und die Lösbarkeit der Nicht-Pellschen Gleichung.

Einheiten in relativ-Abelschen Zahlkörpern Gruppen

$$\{S_1, S_2, \dots, S_n\}, \quad \operatorname{ord}(S_\nu) = \ell^{h_\nu}, \quad \sum h_\nu = k.$$

Fundamentaleinheiten im zyklischen Körper

$$\{\rho^{\ell^h}, \rho_2, \dots, \rho_n\}, \quad (h \le h_1) \quad K_1^{\ell^h}$$

$$\underbrace{\eta_1^{(1)}, \dots, \eta_{\ell^{h-1}}^{(1)},}_{\text{Einheiten aus den Unterkörpern}} \qquad \underbrace{\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_2^{(1)}, \dots, \varepsilon_{\ell^h - \ell^{h-1}}^{(1)}}_{\text{neue Einheiten}}$$

(entsprechend bei allen zyklischen Körpern).

Anzahl gültig für Kreiskörper. Ergibt zusammen ein System von $r = \prod_\nu \ell^{h_\nu} - 1$ Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$.

Unabhängigkeit der Einheiten: (Für Kreiskörper; entsprechend für relativ-Abelsche: nur 1 durch Einheiten des Grundkörpers zu ersetzen). Sei $\eta = \prod \varepsilon_\rho^{a_\rho} = 1$, so bilde man die

$$N_{K_1}^K(\eta) = \left(\prod_{\lambda=1}^{\ell^h - 1} \varepsilon_\lambda^{(1)\, a_\lambda} \right)^{\ell^{\sum_{\nu \ge 2} h_\nu}} = 1,$$

nur möglich für $a_\lambda = 0$. Denn jedes übrige ε_ρ fällt schon durch Potenzieren mit irgendeinem

$$\sum_{\alpha_\nu = 1}^{\ell^{h_\mu}} \rho_\mu^{\alpha_\mu} \quad (\mu \ge 2)$$

fort.

Es ist $\varepsilon^{\ell^{k-1}}$ eine Zykluseinheit: man betrachte K als Oberkörper vom Typ (ℓ, ℓ) über einem passenden seiner Unterkörper und findet, daß sich $\varepsilon^\ell = \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{\ell+1}$ als Produkt von Einheiten der $(\ell + 1)$ Zwischenkörper darstellt. Von diesen $(\ell + 1)$ Körpern setze man das Verfahren mit ε^ℓ fort, solange bis man allerseits auf Einheiten der zyklischen Unterkörper stößt. Da sich jedesmal der Grad der Körper, in denen die Potenz der Einheit dargestellt wird, durch ℓ dividiert, ist man nach ℓ^{k-1} Schritten sicher fertig. Also $\varepsilon^{\ell^{k-1}}$ eine Zykluseinheit. In der Produktdarstellung treten sogar die Einheiten, die erst einem zyklischen Körper K ℓ^h-ten Grades (noch nicht ℓ^{h-1}-ten Grades) angehören, mit dem Exponenten ℓ^{h-1} auf.

Idealklassen. Zusammenstellung der Klassengruppe aus den zyklischen Körpern: $(C_1, C_2, \ldots, C_s)$. Wegen $NC = 1$ gilt hier entsprechend

$$N^K_{K_1}(C) < C_1^{\ell^{\sum_{\nu \geq 2} h_\nu}} .$$

7.5 Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe

Die Existenz von Gleichungen jeden Grades n mit Koeffizienten aus einem vorgelegten Zahlkörper, deren Galoisgruppe die symmetrische oder alternierende ist, wurde 1892 zuerst von Hilbert durch seinen Irreduzibilitätssatz (1) bewiesen, der im wesentlichen aussagt, daß sich in einer Gleichung, deren Koeffizienten von Parametern rational abhängen, die Parameter so durch rationale Zahlen ersetzen lassen, daß sich die Galoisgruppe nicht ändert [132]. Zur Herstellung von Gleichungen mit symmetrischer Gruppe (Gleichungen „ohne Affekt“, die Bezeichnungsweise von Kronecker) braucht also für jeden Koeffizienten nur je ein unabhängiger Parameter eingesetzt zu werden, während für den alternierenden Fall eine Parametergleichung von Hurwitz (Göttinger Nachrichten 1887, S. 103) zur Verfügung steht. Später (1916) zeigte in dieser („rationalen“) Richtung Emmy Noether [227]: besitzen die gegenüber einer bestimmten Gruppe invarianten rationalen Funktionen von n Variablen eine Minimalbasis (von n Funktionen), so gibt es eine Parameterfunktion mit dieser Gruppe, also Zahlgleichungen derselben Gruppe. Dies trifft insbesondere für alle Gruppen dritten und vierten Grades zu (andere Einzelbeispiele in dieser Richtung: Mertens [196], Wiman, Bucht [46]).

Eine wirkliche Herstellung von Gleichungen mit symmetrischer Gruppe lieferte für beliebigen Primzahlgrad zuerst Weber in seiner Algebra, Bd. I (1895), §178. Eine irreduzible Gleichung von Primzahlgrad hat gewiß die symmetrische Gruppe, wenn ihre Gruppe eine Transposition besitzt; nimmt man eine dem Eisensteinschen Irreduzibilitätskriterium genügende Gleichung mit genau zwei konjugiert imaginären Wurzeln (erreichbar durch Lückensatz), so sind die Bedingungen erfüllt. Eine entsprechende Lösung für beliebigen Grad fanden I. Schur [289] und Furtwängler [87] unter Anwendung des Weberschen Satzes (§153, 9), daß eine transitive Gruppe, die eine Transposition enthält, die symmetrische ist. Furtwängler wählt dabei, um Primitivität zu erzeugen, Gleichungen vom Eisensteinschen Irreduzibilitätstypus, bei denen jedoch der letzte Koeffizient durch p^2 teilbar ist, der vorletzte Koeffizient dafür aber nur durch p; ein Fall, in dem die Irreduzibilität für $n > 2$ noch leicht folgt.

Die Erweiterungsmöglichkeit des Eisensteinschen Irreduzibilitätskriteriums betrachtete bereits M. Bauer, der 1907 [18, 19] die ersten Beispiele affektfreier Gleichungen für beliebigen Grad n lieferte, allerdings unter Heranziehung der Idealtheorie (Dedekindscher Korrespondenzsatz ...)

Saunders MacLane [179]; Tschebotarjov, spezielle Konstruktion, für alle Grade gültig, elementarer Beweis.

Eine sehr elementare Konstruktion von affektfreien Gleichungen n-ten Grades lieferte Perron [246] ohne jede Heranziehung der Gruppentheorie; ei-

ne Gleichung n-ten Grades ist ohne Affekt, wenn der aus allen Wurzeln der Gleichung erzeugte Normalkörper den vollen Grad $n!$ hat, wenn also nach jedesmaliger Adjunktion einer Gleichungswurzel (und) Abspaltung eines Linearfaktors der Restfaktor in der neuen Körpererweiterung noch irreduzibel ist. Diese Möglichkeit wird mit Hilfe von $n-1$ Primzahlen $p_\lambda > \lambda$ konstruiert; die Gleichung $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ (vgl. die Perronsche Abhandlung [246, § 4–5]) ist ohne Affekt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) p_λ geht in allen und nur den a_μ mit $\mu \geq \lambda$ auf, und zwar nur in der 1. Potenz;

b) Es soll $x^\lambda + a_1 x^{\lambda-1} + \ldots + a_\lambda \bmod p_{\lambda+1}$ in ein Produkt von λ inkongruenten Linearfaktoren zerfallen.

$x(x + p_1 k_1)(x + p_1 p_2 k_2) \cdots (x + p_1 p_2 \cdots p_{n-1} k_{n-1}) + p_1 p_2 \cdots p_n k_n = 0$ mit $k_\lambda \equiv \lambda p_1 \cdots p_\lambda)^{-1} \bmod p_{\lambda+1} \cdots p_{n-1}$; k_{n-1}, k_n beliebig, liefert Scharen von affektfreien Gleichungen, die a) und b) erfüllen.

Eine weitere Klasse von irreduziblen Funktionen mit symmetrischer Gruppe und lauter reellen Wurzeln entdeckte I. Schur [289] in den Laguerreschen Polynomen $L_n = \sum \binom{n}{\nu} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} x^\nu$. Ebenso haben die Polynome $E_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!}$ symmetrische Gruppe für $n \not\equiv 0 \bmod 4$, dagegen alternierende Gruppe für $n \equiv 0 \bmod 4$. Ferner liefert für ungerades n das Polynom $S_n = \sum \binom{n}{\nu} \frac{(-1)^\nu}{(\nu+1)!} x^\nu$ $(x S_n = L_n)$ alternierende Gruppe. Hiermit hat man für $n \neq 2m+2$ die ersten konkreten Scharen von Gleichungen mit alternierender Gruppe (Crelle ...).

Daß die affektfreien Gleichungen die Regel bilden, ist in verschiedener Weise zum Ausdruck gekommen: Furtwängler [89] zeigte 1929, daß im Koeffizientenraum n-ter Dimension der Gleichungen n-ten Grades mit Koeffizienten aus einem reellen Zahlkörper die affektfreien Gleichungen überall dicht liegen. Van der Waerden [326] zeigte 1934, daß unter den nach dem absoluten Maximum der Koeffizienten geordneten ganzzahligen Gleichungen n-ten Grades die affektfreien die Dichte 1 haben.

Für die Gradzahlen $n > 7$ beruht bei L_n und E_n das Ergebnis auf folgenden zwei (für L_n und E_n zutreffenden) Diskriminantenkriterien:

I. Ist K Körper n-ten Grades mit der Diskriminante D und $p^n \mid D$, so ist p Ordnungsteiler der Galoisgruppe G von K.

II. Für $\frac{n}{2} < p < n-2$ kommt hierbei nur die alternierende Gruppe n-ten Grades in Betracht, weil bei $p > \frac{n}{2}$ in G ein Zyklus der Ordnung p vorkommt, G also primitiv ist und nach Jordan, Traité d'Analyse, Note C, Bull. Soc. Math. d. France Bd. 1 (1872), Théorème I, dann bei $p < n-2$ nur die alternierende und symmetrische Gruppe in Betracht kommt, je nachdem D Quadrat ist oder nicht. Für $n \leq 7$ ist mangels p der Eigenschaft II Sonderbetrachtung nötig.

Umgekehrt wurde das Auftreten eines Diskriminantenteilers p in erster Potenz als Kriterium für Affektlosigkeit zuerst von van der Waerden angeschnitten am Beispiel $n = 5$ (vgl. DMV Aufg. 171). Nach der Lösung von Scholz liefert Primzahl n immer symmetrische Gruppe, wenn ein p nur in erster Potenz in der Körper- (Gleichungs-) Diskriminante aufgeht, nach van der Waerden [327] im Primitivitätsfalle dann auch für beliebiges n. Primitivität liegt bestimmt dann vor, wenn die Diskriminante überhaupt quadratfrei ist; denn sie wäre wenigstens durch das Quadrat der Diskriminante $\neq 1$ eines echten Teilkörpers teilbar. In diesem Falle hat man sogar die von Artin zuerst für $n = 5$ entdeckte Erscheinung, daß der Normalkörper des Grades $n!$ einfacher unauflösbarer unverzweigter Körper über $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ist, daß also die Unverzweigtheit kein Reservat der auflösbaren Körper (7.6) ... der Klassenkörpertürme (7.9) ist.

Literatur Gleichungen mit symmetrischer und alternierender Gruppe Irreduzibilitätssätze für Parameterdarstellung:
Hilbert [132], E. Noether, [228], [227] (Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe)

Gleichungen mit symmetrischer Gruppe
– M. Bauer [18] (Idealtheorie)
– Crelle 127, 33–35; M. Z. 16, 318–319 (ohne Idealtheorie)
– Furtwängler [87]
– Perron [246] (ohne weitere Gruppentheorie)
– Schur [289]; Beispiele für Gleichungen ohne Affekt

Häufigkeit:
– Furtwängler [89], (überall dichte Mannigfaltigkeiten)
– van der Waerden [326] (100 %), [327] (quadratfreier Diskriminantenteiler).

Alternierende Gruppe: Schur, Laguerresche Polynome.

7.6 Körper mit auflösbarer Gruppe

Die Bildung von Gleichungen mit auflösbarer Gruppe führt man am besten auf die Bildung der zugehörigen Galois-Resolventen, auf die Bildung einer Erzeugenden des zugehörigen Normalkörpers zurück. Den einfachsten Typus der auflösbaren Körper bilden die Abelschen Körper, die sich nach dem Basissatz der Abelschen Gruppen (...) oder auch durch elementare körpertheoretische Betrachtungen (...) aus ihren zyklischen Teilkörpern zusammensetzen lassen. Explizite Bildungen zyklischer Körper liefern die Lagrangeschen Resolventen (...). Eine Parameterdarstellung für die zyklischen Erweiterungen von Primzahlpotenzgrad findet sich bei Neiß .... Außerdem weiß man nach dem Kronecker-Weberschen Satz (...), daß die absolut Abelschen Körper durch die Kreisteilungskörper erschöpft werden, während die Gesamtheit der relativ Abelschen Körper nach dem Schlußresultat von Takagi mit den Klassenkörpern (s. d. Th. ??) des Grundkörpers zusammenfallen.

– Explizite Lösung: Hasse

Körper mit bestimmten Zerfallsbedingungen: Bauer, Schreier, Tschebotarjov, Gaßmann, Hasse, van der Waerden (Schur, Frobenius, Deuring).

– evtl. nach 1.

Körper mit zweistufiger Gruppe: Einzelkonstruktionen bei Wiman, Bucht [46], Mertens [196], Furtwängler.

Der allgemeine Fall wurde von A. Scholz [S2] in Angriff genommen. Durch die Darstellung der allgemeinen zweistufigen Gruppen als relatives Produkt (sh. 7.7) von Gruppen von Primzahlpotenzordnung und Faktorgruppen von Dispositionsgruppen [S3] konnte die Konstruktion von zugehörigen Körpern auf die Konstruktion dieser beiden Typen von Galoisgruppen zurückgeführt werden und in ... für die Dispositionsgruppen gelöst werden. Die Dispositionsgruppen sind dabei so definiert: $\varGamma = G/A$ sei Abelsche Faktorgruppe der Ordnung m mit Abelscher Untergruppe A, und diese sei das direkte Produkt von m in $\varGamma$ konjugierten Untergruppen (die also durch die Transformation mit $\varGamma$ auseinander hervorgehen). Die Definition läßt sich auf beliebige $\varGamma$ und A erweitern; für beliebiges $\varGamma$ zur Konstruktion von Klassenkörpern durch Tschebotarjov [318] verwendet worden; vgl. dort.

Die zweistufigen Gruppen von Primzahlpotenzordnung lassen sich auch noch als Faktorgruppen gewisser maximaler unter ihnen, den „Zweiggruppen" darstellen (Def.?). Für den Fall zweier Erzeugender finden sich zugehörige Konstruktionen bei A.S., Kreisklassenkörper I, II mit genauen Angaben in II über die notwendigen Konstruktionsbedingungen im allgemeinen.

Durchkreuzungsverfahren (in I und II aufgrund der Hauptirrealität).

7.7 Einbettung von Galoiskörpern

Das allgemeine Einbettungsproblem ist folgendes: Gegeben über einem festen Grundkörper K_0 ein Normalkörper mit der Galoisgruppe G.
Entweder: Gegeben ferner eine Aufspaltung $\varGamma$ von G. Es soll dann K in einen Normalkörper $\overline{K}$ eingebettet werden, dessen Galoisgruppe vom Typus $\varGamma$ ist. Dabei stellen zwei Lösungserweiterungen $\overline{K}_1$ und $\overline{K}_2$ von K denselben Erweiterungstypus und ihre Gruppen denselben Aufspaltungstypus dar, wenn $\varGamma_1$ und $\varGamma_2$ isomorph einander so zuordenbar sind, daß G dabei in Ruhe (elementweise ungeändert) bleibt.[11)]
Oder: Dieser Körper soll in einen weiteren Normalkörper $\overline{K}$ eigebettet (werden), dessen Galoisgruppe $\varGamma$ eine Aufspaltung von G von vorgeschriebenem Typus ist. Dabei heißen zwei Gruppen $\varGamma_1$ und $\varGamma_2$ ....

Schreibweise: $G \prec \varGamma$, $\varGamma \succ G$. $\varGamma = G \smile A$, A Multiplikator.

(Übertragung auf nichtnormale Erweiterungen $\overline{K}$ ohne Besonderheit möglich.)

Folgende besondere Gruppenaufspaltungen und Körpereinbettungen entsprechen einander:

Einfache Aufspaltungen	Einfache Körpererweiterungen
keine Zwischenfaktorgruppe	keine Normalkörper zwischen K und $\varLambda$

Direkte Aufspaltung:	Adjunktion eines zu K fremden Körpers A:
$\Gamma = \widetilde{G} \times A$, $\widetilde{G} \simeq G$, $G \prec \Gamma$	$K \subset KA$, $[K, A] = K^0$
Weiterungen $G/\widetilde{G} \simeq \widetilde{A}$	A

Definition: G absolutes Produkt $= G \circ A$

Relatives Produkt[12)]	Adjunktion eines beliebigen Körpers A
$\Gamma = G \circ A \succ G, A$	$\Lambda = KA$ mit $[K, A] = \Delta$
kleinste gemeinsame Aufspaltung von G und A	
Bildungsgestz vgl. 3. von Gruppengeschlecht	

Aufspaltungstyp von Γ als Aufspaltung von $G \frown A$ durch den von G und Γ bzw. $G \circ A$ bestimmt (abstrakt nicht durch abstrakte Struktur von $G \frown A$, G, A bestimmt!).

Zentrale Aufspaltung	Zentrale Körpererweiterung
$\Gamma = G \smile \widetilde{A}$ mit $\widetilde{A} \subset Z(G)$; insbesondere ist A abelsche Gruppe.	Klassenkörpererweiterung, d.h. N/k Klassenkörper. Zugehörige Idealklasseneinteilung invariant gegen Substitution von K/K_0. Folge: Durch ihre Idealnorm charakterisierbar (vgl. [S25]).
Abelsche Aufspaltung $\Gamma = G \circ A$ mit abelschem A	Adjunktion Abelscher Erweiterungen ($\simeq$ Kreiskörperadjunktion für $K_0 = \mathbb{Q}$)
Folge: $\Gamma = G \smile \widetilde{A}$ mit $\underbrace{[\widetilde{A}, G'] = 1, \text{ aber } \widetilde{A} \subset Z(G)}_{\text{kennzeichnend}}$	Zugehörige Idealklasseneinteilung durch Idealklasseneinteilung in K_0 gekennzeichnet. (Besonderer Fall: Geschlechterklassenkörper).
Kommutatoraufspaltung $\Gamma = G \smile L$ mit $L \subset \Gamma'$ konträrer Fall zur Abelschen Aufspaltung (maximale abelsche Faktorgruppe unverändert).	Rein nichtabelsche Körpererweiterung (Wechselkörper ...)
Zentrale Kommutatoraufspaltung = Ergänzung (Schur)	Klassenkörper Λ/K
$G = G \smile H$ mit $H \subset G' \cap Z(G)$ Schursche Darstellungsgruppen	Kennzeichnung durch Ideale, nicht Idealklassen in K_0, sh. unten.

Nach I. Schur [285] gibt es (im allgemeinen mehrere) endliche maximale Ergänzungen, die alle anderen als Faktorgruppen enthalten; abgeschlossene Gruppen.

Gruppengeschlecht $G \sim \Gamma$ Verwandtschaft; existiert abelsches A, daß $G \circ A = \Gamma \circ A$.

$K \sim \Lambda$, wenn ein abelscher Körper A existiert mit $KA = \Lambda A$.

Gruppen desselben Geschlechts sind zentrale Aufspaltungen ihrer gemeinsamen Faktorgruppe (G, Satz 1). Falls es außerdem Kommutatoraufspaltungen sind, gehen sie durch Abelsche Durchkreuzung auseinander hervor.

$G \longrightarrow \Gamma$ mit $G \circ A = \Gamma \circ A$ bei $G \cap A = \Gamma \cap A$;

Zusatz $[K, A] = [\Lambda, A]$

Kreiskörperdurchkreuzung[13)] zuerst bei Tschebotarjov; dann Artin Reziprozitätsgesetz, später Körperkonstruktion, sh. 7.6.

Direkte abelsche Durchkreuzung A wählbar, daß $G \cap A = \Gamma \cap A = 1$; selber Aufspaltungstyp

$[K, A] = [\Lambda, A] = K_0$ Fall §

Hier $G \sim \Gamma$ von $G \sim H$ und umgekehrt: ist Γ eine (Durch)kreuzung von G und $G \sim \Gamma$, so ist die Durchkreuzung direkt (G, Satz ??). Dabei kann trotzdem Γ zu G abstrakt isomorph sein). Die Ergänzungen einer Gruppe G vereinigen sich so zu Geschlechtern.

Die Darstellungsgruppen D einer Gruppe G bilden ein bestimmtes Geschlecht von Gruppenaufspaltungen, das durch folgende zwei Eigenschaften gekennzeichnet ist:

1. Jede Ergänzung von G ist mit einer Faktorgruppe von D verwandt;
2. Verwandte Faktorgruppen von D sind identisch.

Jede Ergänzung ist also in der Darstellungsgruppe genau einmal als Faktorgruppe vertreten, entweder direkt oder durch eine Kreuzung (G Satz 3, ...)

Allgemeine Durchkreuzung

$G \# \Gamma$ bei X, daß $G \circ X = \Gamma \circ X$, $G \cap X = \Gamma \cap X$.

$K\Xi = \Lambda\Xi$
$[K, \Xi] = [\Lambda, \Xi]$

Bedingung der Durchkreuzbarkeit von G mit X:

Wenn $G \cap X = G/g = X/Y$ und $G \circ X = G \smile L$, so Y operatorisomorph zu L, $L \subset Z(g)$; operatorisomorph in bezug auf G/g; insbesondere L und Y abelsch.

$\Xi/K \frown \Xi \approx K/K \frown \Lambda$ Klassengruppe mit gleicher Transf. Durchkreuzung aus $K \frown \Xi$.

Bedingung ausgedrückt für $G \# \Gamma$:

Für Ξ, daß $K/K \frown \Lambda \approx \Xi/K \frown \Xi$ (und $K \frown \Xi \subset K \frown \Lambda$.

Vergleiche ferner Schreier [282, 283].

Zyklische Einbettungen finden sich zuerst bei Hilbert, Zahlbericht .... Weiter für den Fall quadratische in biquadratisch zyklische Aufgabe 156

D.M.V. (van der Waerden), allgemein für zyklische von Primzahlgrad in solche von Primzahlpotenzgrad Aufgabe 169 (Hasse), die allgemeine abelsche Einbettung bei Richter ....

Nichtabelsche Einbettung tritt zuerst für die nichtabelsche Gruppe der Ordnung $(\ell, \ell; \ell)$, ℓ ungerade, alle Elemente der Ordnung ℓ, bei Scholz (sh. 7.4) auf, für $\ell = 2$ Rédei, sh. 7.4.

Dann R. Brauer: Einbettung von Schiefkörpern, auf die sich Nichtabelsches Einbettungsproblem von Richter (...) stützt. Für allgemeine ℓ-Gruppen ($\ell > 2$) ist die Einbettungsfrage erledigt durch Scholz und Reichardt (...). Hier lautet die notwendige und hinreichende Einbettungsbedingung

(#)

Für $\ell = 2$ ist diese Bedingung nur als notwendig erwiesen. Teilweise ist gezeigt, daß sie nicht ausreicht (Kreisklassenkörper II ..., Rédei ...). Nur für die einfacheren Fälle sind hinreichende Bedingungen bekannt (Rédei ...). Für beliebige zweistufige Gruppen reduzieren sich nach 7.6. die Einbettungsaufgaben auf die von Primzahlpotenzgrad.

Die Fortsetzung der Konstruktion wird dann jedesmal mit passender Durchkreuzung des zuletzt aufgesetzten Stücks erreicht. Die Durchkreuzung ist für $\ell = 2$ immer so möglich, daß die genannten hinreichenden Einbettungsbedingungen wieder erfüllt sind.

Einen besonderen Hinweis verdienen noch die Tschebotarjovschen Darstellungsgruppen und zugehörige Einbettungen (Gruppentheorie des Klassenkörpers [317]). Diese sind eindeutige endliche zentrale Aufspaltungen der vorgegebenen Basis einer Gruppe (Erzeugendensystem ... §2). Sie unterscheiden sich von der Schurschen Darstellungsgruppe dadurch, daß sie keine Kommutatoraufspaltung zu sein brauchen; dafür aber sollen die Basiselemente mit Konjugierten in der Darstellungsgruppe entsprechende konjugierte Vertreter besitzen, die wieder die ganze Gruppe erzeugen und dabei dieselbe Ordnung wie die Ausgangserzeugenden haben.
Abstrakt: Weiteste Darstellungsgruppe: man wähle aus jeder Abteilung ein Element in der Basis.
Konkret: K/K_0 sei rein und einfach verzweigt. Die erzeugenden Trägheitssubstitutionen bilden ein Erzeugendensystem für die Gruppe (Tschebotarjovscher Monodromiesatz). Man zähle hier jede Abteilung so oft, als sie als Trägheitssubstitution vorkommt (in der Tschebotarjovschen Darstellungsgruppe werden dann diese alle auseinanderfallen). Soweit hier eine zugehörige Körpereinbettung möglich (sh. unten), wird die Körperkonstruktion für erreichbare Faktorgruppen der Tschebotarjovschen Darstellungsgruppe die Galoisgruppe des maximal unverzweigten Geschlechterkörpers und darauf errichteten zentralen (einer „Ergänzung“ entsprechenden) Klassenkörpers.

Die Tschebotarjovsche Einteilung der „Elementaren Teilklassenkörper“ ist anders definiert und weicht ab: ...

Die oben erwähnte Einbettungsmöglichkeit hängt wieder von Vollzerfallsbedingungen ab. Sie sind auch durch die Faktorgruppe der totalen Normenreste nach den Normen (vgl. 7.4) charakterisierbar. Weitere Ausführungen [S25].

Unendliche Entwicklung der p-Gruppe (Reidemeister, Magnus, Hall), Dimensionsuntergruppen. Übereinstimmung mit absteigenden Zentralreihen: für zweistufige Gruppen Scholz (...), allgemein Magnus, Witt. Darin enthaltene Frage, die den Klassenkörperturm betreffen, siehe dort: ...

7.8 Klassifizierung der Klassenkörper nach Tschebotarjov

[nicht vorhanden]

7.9 Klassenkörpertürme

[nicht vorhanden]

Anmerkungen zum Manuskript „Spezielle Zahlkörper".

[1]Dies geht auf eine mündliche Mitteilung von Morishima zurück. Morishima hatte bewiesen, dass die Fermatsche Vermutung für den Exponenten p richtig ist, wenn die p-Klassengruppe von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ nicht zu großen Rang hat, und Zassenhaus hatte daraufhin anscheinend behauptet, dass man mit Diskriminantenabschätzungen nach unten zu einem Beweis der Fermatschen Vermutung kommen könne. Vgl. den Brief von Scholz an Hasse vom 22.08.1936.

[2]Absolut bezieht sich hier auf Klassenkörper: unter absolutem Klassenkörper versteht Scholz das, was wir heute als Hilbertklassenkörper bezeichnen. Das Ergebnis, das Scholz hier meint, ist wohl dasjenige von Grün; vgl. die Briefe von Scholz an Hasse vom 20.06.1934, 18.10.1934 und 29.10.34.

[3]Hier wollte Scholz wohl auf die Arbeiten [66], [312] und [117] eingehen.

[4]Vermutlich bezieht sich Scholz hier auf die Arbeit [50], in welcher Carlitz die Diskriminanten von Teilkörpern von Galoiserweiterungen mit elementaren Mitteln bestimmt. Diese Arbeit von Carlitz ist meines Wissens nicht aufgegriffen worden (Hauptgrund dafür dürfte die Tatsache sein, dass Carlitz die Kroneckersche Sprache der Formen anstatt Dedekinds Idealtheorie benutzte), hätte aber die Aufmerksamkeit der Zahlentheoretiker verdient.

[5]Hier scheint es sich um ein Versehen zu handeln. Hilbert war noch der Meinung, der Klassenkörper von Zahlkörpern mit der Klassenzahl p^m hätte eine triviale p-Klassengruppe. In der Regel (das macht auch Scholz in [S5]) wird die Frage nach unendlichen Klassenkörpertürmen Furtwängler zugeschrieben, der sie aber (vgl. den Briefwechsel Hasse-Artin [75, 76]) auf eine Unterhaltung mit Schreier zurückführt.

[6]In der üblichen Formulierung der Dedekindschen Klassenzahlformel steht der Ausdruck $\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s)$; wegen $\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = 1$ ist dies aber gleich $\lim_{s\to 1} \frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)}$. Scholz interpretiert deshalb auch die rechte Seite als „relativen" Ausdruck, und insbesondere $\frac{R}{v}$ als den „Relativregulator".

Fasst man im Eulerprodukt $\prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-N\mathfrak{p}^{-1}}$ der Dedekindschen Zetafunktion von K die Eulerfaktoren aller Primideale über einer Primzahl p zusammen, so ist wegen $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{p}_g^{e_g}$ mit $e_1f_1 + \ldots + e_gf_g = n = (K:\mathbb{Q})$ und $\Phi(\mathfrak{p}_j) = p^{f_j} - 1$ das Produkt dieser Eulerfaktoren an der Stelle $s = 1$ gleich

$$\frac{1}{1-N\mathfrak{p}_1^{-1}}\cdots\frac{1}{1-N\mathfrak{p}_g^{-g}} = \frac{1}{1-p^{-f_1}}\cdots\frac{1}{1-p^{-f_g}},$$

das Produkt der Eulerfaktoren des Quotienten $\zeta_K(s)/\zeta(s)$ also gleich

$$E_p = \frac{1-\frac{1}{p}}{(1-p^{-f_1})\cdots(1-p^{-f_g})},$$

sodass wegen

$$\begin{aligned}\Phi_K(p) = \Phi_K(\mathfrak{p}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{p}_g^{e_g}) &= p^{f_1(e_1-1)}\big(p^{f_1}-1\big)\cdots p^{f_g(e_g-1)}\big(p^{f_g}-1\big)\\ &= p^{n-f_1-\cdots-f_g}\big(p^{f_1}-1\big)\cdots\big(p^{f_g}-1\big)\big) = p^n\Big(1-\frac{1}{p^{f_1}}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{p^{f_g}}\Big)\end{aligned}$$

und

$$\phi(p^n) = p^{n-1}(p-1) = p^n\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)$$

die Formel (1) folgt.

Wie üblich kommt man in der algebraischen Zahlentheorie mit dem Grenzwert für $s \to 1$ aus; interpretiert man auch die rechte Seite von (1) als solchen Grenzwert, muss man sich um die nichttriviale Konvergenz des Eulerprodukts in $s = 1$ keine Sorgen machen.

[7]Am Rand schreibt Scholz: „fraglich!“

[8]Bei den folgenden heuristischen Überlegungen schreiben wir wieder die Eulerfaktoren an der Stelle $s = 1$ auf anstatt überall den Grenzwert $\lim_{s\to 1}$ zu betrachten.

Die Idealdichte eines Zahlkörpers ist bei Scholz der Ausdruck (1). Im Falle eines quadratischen Zahlkörpers K ist

$$\varPhi_K(p) = \begin{cases} (p-1)^2 & \text{falls } p \text{ zerfällt,} \\ p(p-1) & \text{falls } p \text{ verzweigt,} \\ p^2 - 1 & \text{falls } p \text{ träge ist} \end{cases}$$

und damit das Produkt der Eulerfaktoren

$$E_p = \frac{\phi(p^2)}{\varPhi_K(p)} = \begin{cases} \frac{p}{p-1} > 1 & \text{falls } p \text{ zerfällt,} \\ 1 & \text{falls } p \text{ verzweigt,} \\ \frac{p}{p+1} < 1 & \text{falls } p \text{ träge ist.} \end{cases}$$

Damit folgt dann

$$\lim_{s\to 1} \frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)} = \prod_p \frac{p}{p-1} \prod_q \frac{q}{q+1},$$

wobei p die zerfallenden und q die trägen Primzahlen durchläuft.

Sei nun eine Familie $\mathcal{F} = \{K_1, K_2, K_3, \ldots\}$ von Zahlkörpern gegeben (z.B. solche vom Grad n), die nach wachsendem Absolutbetrag der Diskriminante geordnet sind. Wenn der Grenzwert

$$\mathrm{MID}(\mathcal{F}) = \lim_{n\to\infty} \Big(\lim_{s\to 1} \frac{\zeta_{K_1}(s)}{\zeta(s)} \cdots \lim_{s\to 1} \frac{\zeta_{K_n}(s)}{\zeta(s)} \Big)^{\frac{1}{n}}$$

des geometrischen Mittels der Idealdichten dieser Körper existiert, dann nennen wir ihn mit Scholz die mittlere Idealdichte der Zahlkörper in $\mathcal{F}$. Um diese zu berechnen, brauchen wir einerseits das Zerlegungsgesetz in diesen Zahlkörpern und andererseits den Frobeniusschen Dichtigkeitssatz.

Wenn wir die endlich vielen verzweigten Primzahlen vorläufig einmal außer acht lassen, haben wir nur Zerlegungen $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_g$ mit Trägheitsgraden $f_1, \ldots, f_g$ und $f_1 + \ldots + f_g = n$ zu betrachten. In diesem Fall ist

$$E_p = \frac{\phi(p^n)}{\varPhi_K(p)} = \frac{1 - \frac{1}{p}}{(1-p^{-f_1})\cdots(1-p^{-f_g})}.$$

Ist beispielsweise $\mathcal{F}_2$ die Menge der quadratischen Zahlkörper, so finden wir

$$\mathrm{MID}(\mathcal{F}_2) = \lim_{n\to\infty} \Big(\prod_{p_1} \frac{p_1}{p_1 - 1} \prod_{q_1} \frac{q_1}{q_1+1} \cdots \prod_{p_n} \frac{p_n}{p_n - 1} \prod_{q_n} \frac{q_n}{q_n+1} \Big)^{\frac{1}{n}},$$

wobei p_j durch die in K_j voll zerfallenden Primzahlen und q_j durch die in K_j trägen Primzahlen läuft. Da im Mittel (also für $n \to \infty$) eine Primzahl p in der Hälfte aller Körper (vgl. aber die Korrektur am Ende dieser Anmerkung) K_j zerfällt und in der anderen Hälfte träge ist, ist das Produkt $\prod_{j=1}^n \prod_{p_1} \frac{p_1}{p_1-1}$ im Mittel gleich $\big(\prod_p \frac{p}{p-1}\big)^{n/2}$, sodass wir bei großzügigem Vertauschen von Grenzwerten

$$\lim_{s\to 1}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\zeta_1(s)}{\zeta(s)}\cdots\frac{\zeta_n(s)}{\zeta(s)}} = \Big(\prod_p \frac{p}{p-1}\prod_q \frac{q}{q+1}\Big)^{\frac12}$$

erhalten, wobei die Produkte jetzt über *alle* Primzahlen p und q gehen. Nun ist aber

$$\Big(\prod_p \frac{p}{p-1}\prod_p \frac{p}{p+1}\Big)^{\frac12} = \Big(\prod_p \frac{p^2}{p^2-1}\Big)^{\frac12} = \Big(\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}\Big)^{\frac12} = \sqrt{\zeta(2)},$$

und diese Zahl ist nach Scholz die mittlere Idealdichte quadratischer Zahlkörper.

Wir wollen uns noch den Fall der Familie $\mathcal{F}_\ell^{\mathrm{cyc}}$ aller zyklischen Erweiterungen von Primzahlgrad ℓ anschauen. Dort gibt es für unverzweigte Primzahlen nur die beiden folgenden Möglichkeiten:

1. p ist voll zerlegt und damit $E_p = \frac{p^{\ell-1}(p-1)}{(p-1)^\ell} = \big(\frac{1}{1-\frac1p}\big)^{\ell-1}$.
2. p ist träge, also $E_p = \frac{p^{\ell-1}(p-1)}{p^\ell-1} = \frac{1-\frac1p}{1-\frac{1}{p^\ell}}$.

Weiter sind $\frac1\ell$ aller Primzahlen voll zerlegt, der Rest ist träge. Also wird, wenn wir wie oben die Grenzübergänge bedenkenlos vertauschen,

$$\mathrm{MID}(\mathcal{F}_\ell^{\mathrm{cyc}}) = \prod_p \Big(\frac{1}{1-\frac1p}\Big)^{1-\frac1\ell} \prod_q \Big(\frac{1-\frac1q}{1-\frac{1}{q^\ell}}\Big)^{1-\frac1\ell} = \prod_q \Big(\frac{1}{1-\frac{1}{q^\ell}}\Big)^{1-\frac1\ell} = \zeta(\ell)^{\frac{\ell-1}{\ell}},$$

was für $\ell = 3$ auf das Scholzsche Ergebnis $\mathrm{MID}(\mathcal{F}_3^{\mathrm{cyc}}) = \sqrt[3]{\zeta(3)}$ führt.

Dass sich die Faktoren, die auf $\zeta(1) = \infty$ führen würden, herauskürzen, liegt hier an der Beziehung

$$\frac{D_1}{\ell-1} = D_\ell,$$

wo D_1 und D_ℓ die Dichten der Primzahlen bezeichnen, die in Primideale vom Grad 1 bzw. ℓ zerfallen. Nach Kronecker und Frobenius gilt $D_1 = \frac1\ell$, was wegen $D_1 + D_\ell = 1$ sofort $D_\ell = \frac{\ell-1}{\ell}$ nach sich zieht.

Für die Familie $\mathcal{F}_{\ell^2}^{\mathrm{cyc}}$ aller zyklischen Erweiterungen vom Grad ℓ^2 gibt es drei mögliche Zerlegungen:

- p ist voll zerlegt, also
$$E_p = \Big(\frac{1}{1-\frac1p}\Big)^{\ell^2-1},$$
was mit der Häufigkeit $\frac{1}{\ell^2}$ vorkommt;
- $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_\ell$ ist „halb“ zerlegt, also Produkt von ℓ Primidealen mit Trägheitsgrad ℓ; dann ist
$$E_p = \frac{1-\frac1p}{\big(1-\frac{1}{p^\ell}\big)^\ell},$$
und dies passiert mit der Häufigkeit $\frac{\ell-1}{\ell^2}$;

- p ist träge, also
$$E_p = \frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p^{\ell^2}}}$$
mit der Häufigkeit $\frac{\ell^2-\ell}{\ell^2}$.

Damit erhalten wir

$$\mathrm{MID}(\mathcal{F}_{\ell^2}^{\mathrm{cyc}}) = \prod_p \Big(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\Big)^{\frac{\ell^2-1}{\ell^2}} \Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\frac{\ell-1}{\ell^2}} \Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\frac{\ell-1}{\ell}} \cdot$$
$$\cdot \prod_p \Big(\frac{1}{1-\frac{1}{p^\ell}}\Big)^{\frac{\ell-1}{\ell}} \Big(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{\ell^2}}}\Big)^{\frac{\ell-1}{\ell}}$$

Daher ist
$$\mathrm{MID}(\mathcal{F}_{\ell^2}^{\mathrm{cyc}}) = (\zeta(\ell)\zeta(\ell^2))^{\frac{\ell-1}{\ell}},$$
was für $\ell = 2$ mit dem Scholzschen Ergebnis $\mathrm{MID}(\mathcal{F}_4^{\mathrm{cyc}}) = \sqrt{\zeta(2)}\sqrt{\zeta(4)}$ für zyklische Zahlkörper 4. Grades übereinstimmt.

Um endlich auch das entsprechende Resultat für die Familie $\mathcal{F}_{\ell,\ell}$ der bizyklischen Zahlkörper herzuleiten, betrachten wir einen Zahlkörper, dessen Galoisgruppe biyklisch vom Typ (ℓ, ℓ) ist. Hier gibt es, abgesehen von den endlich vielen verzweigten Primzahlen, nur zwei Möglichkeiten des Zerfalls:

1. p ist voll zerlegt und
$$E_p = \Big(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\Big)^{\ell^2-1},$$
was mit der Häufigkeit $\frac{1}{\ell^2}$ eintritt;
2. p ist „halb zerlegt“, also
$$E_p = \frac{1-\frac{1}{p}}{\big(1-\frac{1}{p^\ell}\big)^\ell},$$
was mit der Häufigkeit $\frac{\ell^2-1}{\ell^2}$ eintritt.

Dies liefert
$$\mathrm{MID}(\mathcal{F}_{\ell,\ell}) = \prod_p \Big(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\Big)^{\frac{\ell^2-1}{\ell^2}} \frac{\big(1-\frac{1}{p}\big)^{\frac{\ell^2-1}{\ell^2}}}{\big(1-\frac{1}{p^\ell}\big)^{\frac{\ell^2-1}{\ell}}} = \zeta(\ell)^{\frac{\ell^2-1}{\ell}}.$$

Insbesondere ist $\mathrm{MID}(\mathcal{F}_{2,2}) = \sqrt{\zeta(2)}^3$ wie von Scholz behauptet.

Die Rechnungen in den andern Fällen verlaufen ähnlich. Im nichtzyklischen kubischen Fall muss man dabei beachten, dass nach den Sätzen von Kronecker und Frobenius das Verhältnis der Zerlegungen $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$, $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ bzw. $p\mathcal{O}_K = (p)$ gleich $1 : 3 : 2$ ist.

Vergleicht man die hier hergeleiteten Formeln mit den Ergebnissen numerischer Experimente, so stellt man fest, dass die Übereinstimmung schlecht ist. Schuld daran ist aber nicht etwa die Vertauschung der Grenzwerte, sondern das Vernachlässigen der verzweigten Primzahlen. In der Tat stellt man fest, dass unter den Diskriminanten quadratischer Zahlkörper unterhalb einer Schranke X etwa $\frac{X}{p+1}$ Diskriminanten durch die Primzahl p teilbar sind und sich die restlichen etwa gleich auf die beiden Fälle $(D/p) = +1$ und $(D/p) = -1$ verteilen.

Im Falle von $p = 2$ sind also $\frac{1}{3}$ aller Diskriminanten gerade, die andern zwei Drittel verteilen sich in etwa gleich auf die Fälle $D \equiv 1 \bmod 8$ und $D \equiv 5 \bmod 8$. Bei Vernachlässigung der Verzweigung hatten wir die Faktoren

$$\Big(\prod_{D\equiv 1 \bmod 8} \frac{2}{2-1}\Big)^{\frac{1}{n}} \Big(\prod_{D\equiv 5 \bmod 8} \frac{2}{2+1}\Big)^{\frac{1}{n}} = \Big(\Big(\frac{2}{2-1}\Big)^{\frac{n}{2}}\Big)^{\frac{1}{n}} \Big(\Big(\frac{2}{2+1}\Big)^{\frac{n}{2}}\Big)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{2^2}{2^2-1}}$$

erhalten, was der Quadratwurzel des Eulerfaktors für $p = 2$ in $\zeta(s)$ an der Stelle $s = 2$ entspricht. Berücksichtigt man dagegen die Verzweigung, so ergibt sich

$$\Big(\prod_{D\equiv 1 \bmod 8} \frac{2}{2-1}\Big)^{\frac{1}{n}} \Big(\prod_{D\equiv 5 \bmod 8} \frac{2}{2+1}\Big)^{\frac{1}{n}} = \Big(\Big(\frac{2}{2-1}\Big)^{\frac{n}{3}}\Big)^{\frac{1}{n}} \Big(\Big(\frac{2}{2+1}\Big)^{\frac{n}{3}}\Big)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[3]{\frac{2^2}{2^2-1}},$$

d.h. man muss den Eulerfaktor für $p = 2$, den wir oben erhalten hatten, durch den Korrekturfaktor $\sqrt[6]{\frac{4}{3}}$ teilen.

Auf dieselbe Art findet man, dass $\frac{1}{p+1}$ aller Diskriminanten durch p teilbar sind, die restlichen $\frac{p}{p+1}$ sich auf die $p - 1$ primen Restklassen gleich verteilen, also ein Anteil von je $\frac{p}{2(p+1)}$ den Faktor $\frac{p}{p-1}$ bzw. $\frac{p}{p+1}$ besitzt. Daher muss man bei der mittleren Idealdichte auch für die ungerade Primzahl p einen Korrekturfaktor $\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right)^{1/2(p+1)}$ anbringen, sodass also $\mathrm{MID}(\mathcal{F}_2)$ nicht wie von Scholz behauptet gleich $\sqrt{\zeta(2)}$ ist, sondern gleich

$$\mathrm{MID}(\mathcal{F}_2) = \frac{\sqrt{\zeta(2)}}{\sqrt[6]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[8]{\frac{9}{8}} \cdot \sqrt[12]{\frac{25}{24}} \cdots} \approx \frac{\sqrt{\zeta(2)}}{1.070587\ldots} \approx 1.197987\ldots.$$

Dieser Wert stimmt mit den numerischen Experimenten sehr gut überein.

Ähnliche Abänderungen sind natürlich für die andern Klassen von Zahlkörpern vorzunehmen.

[9]Gemeint ist hier $\varepsilon_a = (1-\zeta^a)(1-\zeta)^{-1}$, falls m Primzahlpotenz, und $\varepsilon_a = 1-\zeta^a$ falls nicht.

[10]Das s auf der rechten Seite der folgenden Formel bezeichnet die Anzahl der Paare komplexer Einbettungen, nicht die Variable s wie auf der linken Seite. Im Originalmanuskript steht im Zähler 2^n, im Nenner $\frac{w}{2}$.

[11]Benutzt man exakte Sequenzen, so definiert Scholz also zwei exakte Sequenzen

$$1 \longrightarrow A_j \longrightarrow \varGamma_j \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

als isomorph, wenn es einen Isomorphismus $\sigma : \varGamma_1 \longrightarrow \varGamma_2$ gibt, der auf G die Identität induziert:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & \varGamma_1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \sigma & & \downarrow \mathrm{id} & & \\ 1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & \varGamma_2 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

[12]Die Galoisgruppe des Kompositums zweier Galoiserweiterungen mit Gruppen G_1 und G_2, deren Durchschnitt Galoisgruppe G besitzt, nennt man heute das Faserprodukt (oder auch pull back) $G_1 \times_G G_2$.

[13]Die Technik der abelschen Durchkreuzung, die Hilbert bei seinem Beweis des Satzes von Kronecker-Weber, Tschebotareff zum Beweis seines Dichtigkeitssatzes und endlich Artin beim Beweis seines Reziprozitätsgesetzes verwendet hat, ist eine Technik, die weiter verbreitet ist als angenommen. So fallen beispielsweise auch die quadratischen Twists elliptischer Kurven unter dieses Stichwort, ist doch der quadratische Twist $my^2 = f_3(x)$ der elliptischen Kurve $y^2 = f_3(x)$, betrachtet als quadratische Erweiterung $K(\sqrt{f_3(x)/m})$ von $K = \mathbb{Q}(x)$, nichts anderes als die abelsche Durchkreuzung von $K(\sqrt{f_3(x)})$ mit $K(\sqrt{m})$. In vielen Konstruktionen von Erweiterungen werden abelsche Durchkreuzungen verwendet, so etwa in Serre [294, Prop. 2.1.7], wo sie Serre zum Beweis des Satzes von Scholz-Reichardt verwendet, allerdings in einer etwas abstrakteren Form.

8. Gutachten und andere Dokumente

8.1 28.04.1934, Doetsch über Scholz

Gustav Doetsch
Freiburg i. B.
Riedbergstr. 8

Freiburg, 28. 4. 34.

Universität Freiburg i. B.
Eing. 30 APR. 1934

Zu der dortigen № 2788.

An das Rektorat der Universität.

Wegen des Herrn Dr. Scholz erging schon vor einiger Zeit eine Anfrage der Notgemeinschaft. Es handelte sich damals darum, ob Sch. in einem Jahr an unserer Universität einen Lehrauftrag zu erwarten hätte. Ich habe damals ausführlich begründet, daß Sch. irgendwelcher Zuwendungen sich bis jetzt als durchaus unwürdig erwiesen hat und daß die Verleihung eines Lehrauftrags an ihn ein schwerer Fehler wäre. Ich verweise dazu wegen der Einzelheiten auf meinen damaligen Brief vom 18. 2. 34.

Was die Verleihung eines Forschungsstipendiums angeht, so habe ich schon damals erklärt und wiederhole es heute: Billigen kann ich diese Verleihung nur von dem Gesichtspunkt aus, daß Sch. dadurch zum letzten Mal Gelegenheit gegeben wird, sich zu bessern und zu zeigen, daß er sich ändern will.

Heil Hitler!

G. Doetsch

8.2 08.05.1934, Heffter über Scholz

Prof. Dr. Heffter
Freiburg i. B. – Jacobistr. 19
Tel.: 2295

Freiburg i. B. 8. V. 1934.

Sr. Spektabilität
dem Dekan der nat.–math. Fakultät
Herrn Professor Dr. S o e r g e l . Hier.

Universität Freiburg i. B.
Eing. 9 MAI 1934

Ich kenne Herrn Dr. A. Scholz seit seiner Anstellung als Assistent am mathematischen Institut und seit seiner Habilitation. Ich schätze ihn als sympathische Persönlichkeit von ernstem wissenschaftlichen Streben und vielseitigen allgemeinen Interessen.

Die Arbeiten von Dr. Scholz gehören grösstenteils dem hochwichtigen, weite Teile der Mathematik beherrschenden Gebiet der Gruppentheorie und ihrer Anwendungen an. Sie haben in den Mathematischen Annalen, in der Mathematischen Zeitschrift und in den Sitzungsberichten der Heidelberger Akademie, also in ausgezeichneten und kritisch geleiteten Organen, Aufnahme gefunden. Die Arbeiten zeichnen sich durch Scharfsinn und klare Darstellung aus und berechtigen zu der Hoffnung, dass der Verfasser auch weiterhin die Wissenschaft durch wertvolle Untersuchungen bereichern wird, wenn ihm die nötige Sorgenfreiheit für die Arbeit gewährt wird.

Ich möchte deshalb die Verleihung eines Forschungsstipendiums durch die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft an Herrn Dr. Scholz warm befürworten.

Heffter.

Aus Universitätsarchiv *B 24/3408* Freiburg

8.3 o.Datum, Merkblatt von Doetsch

Um den Studierenden ein geordnetes Studium und eine Planung auf lange Sicht zu ermöglichen, wird im Folgenden eine Liste derjenigen Vorlesungen veröffentlicht, die jeder, der das Staatsexamen im Hauptfach Mathematik ablegen will, gehört haben soll. Der Plan zeigt zugleich, in welchem Semester die betr. Vorlesung zweckmässigerweise gehört wird. — Es wird in Zukunft dafür Sorge getragen werden, dass diese Vorlesungen im regelmässigen Turnus wiederkehren. Natürlich werden wie bisher noch weitere höhere Vorlesungen gehalten werden, die aber wahlfrei sind.

1.) Alle Vorlesungen incl. eventuellen Uebungen sind höchstens 4–stündig und laufen von Mo bis Do, sodass der Freitag für Exkursionen frei bleibt.

2.) Die Anfängervorlesung über Differential– und Integralrechnung beginnt mit Rücksicht auf den im Sommer abzuleistenden Arbeitsdienst der Abiturienten von jetzt an im Wintersemester. Sie erstreckt sich über 3 Semester.

3.) Während früher für das 1. Semester Analytische Geometrie der Ebene, für das 2. Semester Analytische Geometrie des Raumes gelesen wurde, wird die Analytische Geometrie jetzt folgendermassen aufgeteilt:
Elementare analytische Geometrie der Ebene *und* des Raumes für das *1.* Semester, Projektive Geometrie für das *4.* Semester.

gez. D o e t s c h .

8.4 15.02.1935, Hasse über Scholz und Kapferer

Prof. Dr. H. Hasse   Göttingen, den 15. Februar 1935
Bunsenstr. 3–5

Herrn
Prof. Dr. Radon,
Breslau 16
Technische Hochschule
Uferzeile

Sehr geehrter Herr Kollege,

erst heute nach Ueberwindung der letzten stürmischen Semesterwoche, komme ich nun zur Beantwortung Ihres Briefes vom 8. Februar. Ich freue mich ausserordentlich, dass Sie daran denken, einen Zahlentheoretiker nach dort zu sichern. Herr A. Scholz ist sicherlich ein Zahlentheoretiker von ausserordentlichen Fähigkeiten. Er hat sehr schöne Arbeiten über Zahlentheorie im engsten Sinne des Wortes geschrieben. Seine Stärke liegt nämlich darin, dass er ein bis zum Instinkt ausgebildetes Gefühl für Zahlen selber als Objekt der wissenschaftlichen Forschung hat, dass er also überall den tiefliegenden Eigenschaften der ganzen Zahlen nachgeht, teilweise bis ins Numerische hinein, so z.B. in seinen letzten wertvollen Untersuchungen zur Theorie der Klassengruppen quadratischer Zahlkörper. Auf der andern Seite ist dieser stark ausgeprägte Sinn für Zahlen auch eine gewisse Schwäche, denn er hindert ihn oft, die inzwischen ausgebildeten mehr formalen Schlussweisen der modernen Algebra, die doch in den letzten Jahren die Zahlentheorie so entscheidend beeinflusst haben, voll einzusetzen. So sind seine Arbeiten für den nicht ganz in der Sache Stehenden recht mühsam zu lesen, besonders wo er auch kein starkes Gefühl für eine straffe Gliederung seiner Darstellung hat und seine oft recht speziellen Ergebnisse gern in langatmiger Erzählung vorbringt. Dies gilt entsprechend auch für seinen Vortrag: Für Leute, die ganz in der Sache drinstehen, spricht er sehr anziehend und interessant, für einen, den er erst heranführen will, wirkt er leicht verwirrend. So sehr ich ihm ein Fortkommen gönnen würde, kann ich mir doch denken, dass Sie nach einiger Zeit dort auch von sich aus diese Mängel empfinden würden und so die von Ihnen beabsichtigte Wirkung, nämlich die Förderung des Interesses für Zahlentheorie in Ihren dortigen Kreisen, nicht in dem Masse eintreten würde, wie Sie sich erhoffen. Zudem hat ja Sch. jetzt gerade eine Existenz in Kiel gefunden, die, wie er mir schreibt, ihn sehr glücklich mach[t] und zufrieden stellt.

Vielleicht würde Herr Kapferer, der unter den heutigen Umständen wohl auch in kurzer Zeit dem in Freiburg angewandten Druck gegen die Algebra und Zahlentheorie weichen muss, Ihnen mehr das geben, was Sie dort wünschen. Kapferer ist zwar in der Hauptsache Algebraiker und nicht Zahlentheoretiker, aber diese beiden Gebilde sind ja heute so zusammengewachsen, dass oft eine scharfe Trennung nicht mehr möglich ist. Kapferer hat wissenschaftlich nicht ganz den Glanz von A. Scholz, aber seine Arbeiten sind doch gründliche gute Beiträge zur modernen Algebra und Zahlentheorie und vor allem sauber geschrieben und mit Liebe und Geschick dargestellt. Sein Vortrag ist, wie ich mich oft überzeugt habe, klar und lebendig, wenn auch nicht immer mitreissend. Im Vergleich mit Scholz würde er sicherlich den grösseren Lehrerfolg haben und wenn ihm als eigentliche Aufgabe gestellt würde, ein Lehrzentrum für die Zahlentheorie zu gründen und auszubauen, so würde er sich sicherlich mit der ihm eigenen Zähigkeit und Liebe zur Sache schnell in diese Arbeit hineinfinden und sich auch die ihm hier und da noch fehlenden Kenntnisse gerade in zahlentheoretischer Hinsicht leicht erwerben können. Ich würde mich freuen, wenn sich für ihn, der augenblicklich in Freiburg in Not zu geraten droht – er ist verheiratet und hat zwei kleine Kinder, Scholz ist Junggeselle – eine neue und fruchtbare Wirkungsmöglichkeit in Breslau schaffen liesse.

Für den Fall, dass Sie auch jüngere Mathematiker, die noch nicht habilitiert sind mit dem ev. Ziel der Habilitation in Frage ziehen, möchte ich Ihnen noch meine Schüler Dr. Reichardt und Dr. Schilling nennen. Ich bin gern bereit, Ihnen auch über diese Näheres zu schreiben, wenn Sie es wünschen sollten.

Mit deutschem Gruss bin ich

Ihr sehr ergebener

8.5 27.03.1936, Hasse über Scholz

Gutachten über die wissenschaftliche Tätigkeit von
A. Scholz

A. Scholz hat sich in einer großen Reihe von tiefen und wertvollen Arbeiten auf dem Gebiet der höheren Zahlentheorie hervorgetan. Man verdankt ihm insbesondere die geistreiche Lösung des schwierigen Problems der Konstruktion algebraischer Zahlkörper mit vorgegebener zweistufig metabelscher Gruppe. Er ist ein Mathematiker von ungewöhnlich reicher Phantasie und hat einen besonders stark ausgeprägten Sinn für das numerisch Beispielmäßige in der höheren Zahlentheorie. Aehnlich wie Gauß versteht er es, tiefliegende zahlentheoretische Wahrheiten durch Induktion aus dem für ihn mit besonderem Leben durchsetzten Zahlenmaterial zu erschauen. Er vereinigt diesen Sinn für das Lebendige in den Zahlen in glücklicher Weise mit der Kraft, die meist sehr tief liegenden Beweise für diese Wahrheiten zu finden, kurz, er ist das Muster eines echten Zahlentheoretikers. Sein Können, sein Wissen und seine mathematische Persönlichkeit lassen es mir über jeden Zweifel erhaben erscheinen, daß er die für ihn ins Auge gefaßte Anerkennung voll verdient.

8.6 22.10.1938, Hasse über Scholz

Herrn

Prof. Dr. Hammerstein
Kiel

Mathematisches Seminar der Universität

Lieber Herr Hammerstein,

Ich halte Arnold Scholz für einen hoch, wenn auch etwas einseitig, begabten Mathematiker. Seine Arbeiten [betreffen] ausschliesslich die Theorie der algebraischen Zahlen, und hier hauptsächlich Fragestellungen, die mit der Struktur der Idealklassengruppe eines algebraischen Zahlkörpers und mit seinen relativ-abelschen Erweiterungen zu tun habe. Seine bedeutendste und meistbekannte Leistung ist wohl seine Lösung des Konstruktionsproblems von metabelschen Zahlkörpern vorgegebener Gruppe. Seine Arbeiten sind voll von originellen Einfällen und Ideen, die allerdings nicht immer von überwältigendem Interesse sind. Die Darstellung lässt nach meinem Geschmack sehr viel zu wünschen übrig. Wie auch im mündlichen Vortrag, so besitzt Scholz in seinen geschriebenen Darstellungen nicht die Gabe, das was er zu sagen hat klar zu disponieren und einigermassen verständlich auszudrücken. Er ist der reinen Leistung nach als ein Meister der Kleinkunst in der Zahlentheorie zu bezeichnen. Man muss ihm aber den Vorwurf machen, dass er für die parallel laufende moderne Entwicklung der Algebra und Zahlentheorie nicht immer das nötige Interesse gezeigt hat. So kommt es, dass seine Arbeiten wenig Anklang gefunden haben, und nur wenigen Fachkennern wirklich bekannt sind. Denn er spricht durchweg seine eigene Sprache und stellt sich damit oft ausserhalb des von seinen Zeitgenossen erreichten Gesamtfortschritts. Ich halte es für durchaus berechtigt, seine im Ganzen gesehen tiefen und beachtlichen wissenschaftlichen Leistungen durch seine Ernennung zum n.b.a.o. Prof. anzuerkennen, wenngleich ich der Ansicht bin, dass Scholz, so wie er ist, noch wesentliche Mängel für die Übertragung eines ordentlichen Lehrstuhls besitzt.

Mit freundlichen Grüßen und Heil Hitler,

Ihr sehr ergebener

8.7 o.Datum, Manuskript von Scholz, Fragment

... Restcharakter χ_1 mod $\mathfrak{f}$ durch $\chi_1(\gamma) = 1$ für $(\gamma) < H$. Die Basisrepräsentanten $\mathfrak{j}_1, \dots, \mathfrak{j}_e$ für die *absolute* Idealklassengruppe lassen sich hier im Gegensatz zu I. als Ideale aus H wählen durch Multiplikation mit einem passenden Rest mod $\mathfrak{f}$. Bei der Aufspaltung der Klasseneinteilung zu einer zyklischen der Ordnung ℓ^n bleibt nun ein Zahlideal (α_1) mit $\chi_1(\alpha_1) = \zeta_1$ (primitive ℓ–te Ew.) in der erzeugenden Idealklasse. Es muss also einen ℓ^n–ten Potenzrestcharakter χ_n geben, dessen ℓ^{n-1}–te Potenz χ_1 ist.

Wir beweisen nun:

1) Wenn es einen χ_n gibt, so auch einen χ_n mod $\mathfrak{f}'$, wo $\mathfrak{f}'$ dieselben Primteiler wie $\mathfrak{f}$ enthält, nur die ℓ–Teiler in höherer Potenz. Es muss dann

$$N(\varphi) \equiv 1 \ (\ell^n) \quad \text{sein für} \quad \varphi | \mathfrak{f} \quad \text{und} \quad (\varphi, \ell) = 1 \, .$$

2) Es gibt dann auch eine zugehörige Idealklasseneinteilung mod $\mathfrak{f}'\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}$ passendes Primideal.

Zu 1. Ist φ_1 ein nicht in ℓ aufgehender Primteiler von $\mathfrak{f}$, der also $\mathfrak{f}$ nur in erster Potenz teilt, so gilt z. B. $\chi_1(\alpha_1) = \zeta_1$ für einen Primitivrest α_1 mod φ_1, der etwa $\equiv 1$ mod $\mathfrak{P}$, wo $\mathfrak{P}\varphi_1 = \mathfrak{fm}$ und $\mathfrak{m}$ beliebig prim zu φ_1 ist. Soll nun χ_n mit $\chi_n(\alpha_1) = \zeta$ (primitive ℓ^n–te Ew.) ein Charakter mod $\mathfrak{fm}$ werden, so muss α_1 eine durch ℓ^n teilbare Ordnung mod $\mathfrak{fm}$ haben, also $N(\varphi_1) \equiv 1 \ (\ell^n)$ sein. – Die Ordnung wenigstens eines Basiselementes mod ℓ^x kann dagegen mit x beliebig hoch geschraubt werden. Unter den angegebenen Bedingungen für $\mathfrak{f}$ existiert daher auch ein Charakter χ_n mod $\mathfrak{f}'$, dessen ℓ^{n-1}–te Potenz χ_1 ist.

Zu 2. Dieser Charakter χ_n braucht noch keine Idealklasseneinteilung der Ordnung ℓ^n zu liefern; denn es braucht hier für $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell$; $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ (Bezeichnung wie oben) nur $\chi_1 = 1$, nicht $\chi_n = 1$ zu gelten, damit $\mathfrak{j}_1, \dots, \mathfrak{j}_\ell < H$; $(\alpha) < H$ nur für $\chi_1(\alpha) = 1$. Bestimmt man jetzt aber ein Primideal $\mathfrak{q}$ mit einem ℓ^{n-1}–ten Potenzrestcharakter χ so, dass

$$\chi(\gamma_i) = \chi_n(\gamma_i) \ ; \ \chi(\varepsilon_\varrho = \chi_n(\varepsilon_\varrho),$$

so definiert der Quotientencharakter eine zyklische Klassen–ℓ^n–Teilung mod $\mathfrak{f}'\mathfrak{q}$, deren Hauptklasse in H liegt.

Arnold Scholz.

8.8 o.Datum, Studienplan

S t u d i e n p l a n.

Semester			
	a.)	Differential– und Integralrechnung I.	
1.		(Grundlegung: Zahl, Funktion, Grenzwert)	
(Winter)	b.)	Analytische Geometrie und Anfangsgründe	
		der darstellenden Geometrie.	
	a.)	Differential– und Integralrechnung II.	
2.		(Funktionen von einer Variablen)	
(Sommer)	b.)	Elementare Zahlentheorie.	
	a.)	Differential– und Integralrechnung III.	
3.		(Funktionen von mehreren Variablen und	
(Winter)		Grundbegriffe	
		der Differentialgleichungen)	
	b.)	Elementare Algebra.	
	c.)	Praktikum in angewandter Mathematik.	
	a.)	Funktionentheorie.	
4.	b.)	Projektive Geometrie und lineare Algebra.	
(Sommer)		(Determinanten, Matrizen, lineare	
		Transformationen,	
		lineare Gleichungen, quadratische und bilineare	
		Formen)	
5.	a.)	Gewöhnliche Differentialgleichungen.	S
(Winter)	b.)	Differentialgeometrie.	e
		Mengenlehre und reelle Funktionen.	m
		Partielle Differentialgleichungen der Physik.	i
6.		Nichteuklidische Geometrie.	n
7.		(Synthetische Geometrie.)	a
8.		Darstellende Geometrie (incl. Axonometrie	r
		und Perspektive).	
		Analytische Mechanik.	.
		Schulmathematik.	

8.9 12.03.1941, Heisig an A. Scholz

B. G. Teubner • Leipzig • Berlin

Leipzig C 1, 12. März 1941

Math. Dr. H. Fi./56

Sehr geehrter Herr Dr. Scholz!

Ich möchte heute Ihr Schreiben vom 21. v. M. beantworten, aus dem ich ersehen habe, daß Sie zurzeit an der Marineschule in Flensburg-Mürwik tätig sind und dabei wenigstens langsam zur Arbeit an Ihrem Enzyklopädieartikel zu kommen hoffen.

Die Umfangsschätzung der beiden übersandten Manuskriptblätter, die ich Ihnen in der Anlage wunschgemäß zurückreiche, hat $2\frac{1}{6}$ Seiten für den Text und $\frac{2}{5}$ Seite für die Anmerkungen ergeben. Sie werden daran einen wenigstens ungefähren Anhalt für den Umfang Ihrer weiteren Ausarbeitungen haben.

Die Bezifferung der Anmerkungen jeder Nummer jedes Artikels mit 1 beginnen zu lassen, würde natürlich von der bisherigen Handhabung abweichen. Ich möchte diese Frage später einmal mit den Herausgebern erörtern, wenn die Herausgabe Ihres Artikels akut wird. Eine evtl. Durchnumerierung durch das Ganze ist ja auch nachträglich leicht herbeizuführen.

Auch die Frage der Verwendung von Abkürzungen kann später entschieden werden. Im Schreibmaschinenmanuskript können diese ja jedenfalls angewendet werden, und es würde, wenn beim Satz doch davon abgesehen werden soll, genügen, wenn dann für den Setzer eine Erklärung dieser Abkürzungen auf besonderem Blatt beigegeben würde. Im allgemeinen erscheint *mir* in dem gedruckten Artikel die Verwendung abgekürzter Worte im Text nicht recht angebracht, und die dadurch bewirkte Raumersparnis dürfte ja auch nicht sehr wesentlich sein.

Mit den besten Grüßen und

H E I L H I T L E R !

Ihr sehr ergebener

Heisig

2 Ms-Blätter anbei

8.10 1942, Sonett auf den toten Bruder

Sonett auf den toten Bruder.

Nun ist die Erde ärmer, will mir scheinen,
Die er verließ, wenn auch an Tränen reicher;
Die Sterne blühn um einen Schatten bleicher
Wie meine Augen auch vom nächtgen Weinen.

Früh rufen zu sich, wen die Götter meinen –
Kein menschlich Flehn, kein Jammer stimmt sie weicher;
Sie lösen, ihn noch lichter, göttergleicher
Gestaltend, sanft aus unsern Reih'n den Reinen.

Ihr ird'schen Wanderer, des Wegs nur selten
Begegnet ihr den Glücklich-Auserwählten,
Und kurz bemessen nur ist ihre Zeit.

Der strahlend auf- und unterging, ich werde
Ihn missen sehr! Ach, ärmer ward die Erde,
Und näher rückt durch ihn die Ewigkeit.

Brüssel, 1942.

8.11 03.04.1943, Bericht “Die letzten Tage meines Bruders.”

Die letzten Tage meines Bruders.

Kopie.

eines Briefberichtes von seinem Kollegen
Prof. O.H. K e l l e r

Glücksburg, den 3. April 1943.

Hochverehrte gnädige Frau,

Verzeihen Sie mir bitte, daß ich erst heute Ihren Brief beantworte. Ich hatte jetzt viel und vielerlei zu tun, und wollte mir für diesen Brief etwas Ruhe und Zeit nehmen.

Gleichzeitig mit Ihrem Brief kamen die Korrekturen von Arnolds letzter Arbeit. Ich hatte wieder sehr meine Freude an dem klaren Gedankenaufbau und der reifen Fragestellung. Da ich aus Gesprächen wußte, auf was alles Arnold auch bei der Anordnung des Druckes und Wahl der Buchstabentypen aus dem Gesichtspunkt des Schönen und Geschmackvollen heraus Wert legte, konnte ich bei der Korrektur besonders darauf achten. Gewisse Eigenwilligkeiten seines Stiles hatte ihm ja Hasse verbessert, was ich eigentlich schade fand. So schrieb er gern und bewußt: “stehn“ oder “in Ruh lassen“ für “stehen“ oder “in Ruhe lassen“, wo es der Rhythmus des Satzes oder des Gedankens erforderte. Freilich, im Duden steht es anders. – Besonders nachdenklich stimmt es, wenn unter dem Titel der Arbeit steht: “Arthur Hammerstein zum Gedächtnis“. Hammerstein war etwa ein Jahr vor ihm gestorben.

Abgeschickt hatte er die Arbeit am Sonnabend, den 24. Januar. Wir saßen nachher noch im Kaminzimmer zusammen. Der Oberstabsarzt kam dazu und war recht erstaunt, ihn noch hier zu sehen, und noch nicht im Lazarett, und sagte ihm noch, so etwas sei nicht so leicht aufzulösen wie 5 Gleichungen mit 5 Unbekannten. Er versprach denn auch, Montag ins Lazarett zu gehen. Sonntag vormittag war er dann noch einmal zur Messe und Kommunion und kurz bei Hänerts. In ein Konzert, für das wir abonniert hatten, ging er am Nachmittag nicht mit. Montag fuhr er also mit dem Omnibus nach Glücksburg, und erhielt dort den Bescheid, er solle nach Mürwik. Nun war der Omnibus schon wieder weg, und er mußte zum Zug und etwa 1 Stunde auf dem Bahnhof warten. Es war ziemlich der kälteste Tag des Jahres, so etwa

-21°, und vermutlich hat er sich dort erkältet. Nachdem er im Gnomenkeller noch etwas gegessen hatte, kam er gegen 4 Uhr ins Lazarett. Zunächst mehr zur Beobachtung. Er war auf, und wir spielten noch Zankpatiencen zusammen. Donnerstag hatte er dann das hohe Fieber und mußte liegen bleiben, glaubte aber noch, am Montag oder Dienstag nach Mergentheim fahren zu können. Ich fragte ihn, ob seine Mutter ihn nicht hier besuchen solle, aber das wies er sehr von sich, daß sie bei der Kälte eine so weite und unbequeme Reise machen solle. Sie käme dann nach Mergentheim zu ihm.

Am Freitag brachte ich ihm das Grammophon. Er wollte wohl den 2. Satz des Es-Dur-Quartetts op. 74 von Beethoven hören, von dem er wußte, daß ich ihn auf den Platten habe. Aber wir hörten dann eine Bagatelle von Beethoven. Ich glaube aber nicht, daß er das Es-Dur-Quartett besonders hoch schätzte. Er sagte mir einmal, Beethoven habe von op. 70 – 80 eine öde Zeit gehabt. Ich hatte nur kein anderes Quartett da.

Am Sonnabend besuchten Ahrends und ich ihn zum letztenmal. Wir waren sehr erschrocken, wie tief seine Augen in den Höhlen lagen, und wie schlecht er aussah. Sprechen konnte er kaum mehr vor Halsschmerzen, war aber guter Dinge. Ich hatte es doch etwas mit der Angst und ging zum Arzt, um zu fragen, was los sei, aber er vertröstete mich, bei einer solchen Mandelentzündung sehe jeder schlecht aus. Nachträglich fiel mir ein, daß auf der Fiebertabelle das Fieber angestiegen, der Puls aber abgefallen war, was doch, so viel ich weiß, als sehr bedenklich gilt. – Als ich wieder zu ihm kam, wollte er zum Waschtisch gehen, um sich die Hände zu waschen. Er war aber schon sehr matt, und ich brachte ihn wieder ins Bett und brachte ihm die Waschschüssel hin.

Am Nachmittag war ich in unbestimmter und uneingestandener Angst, konnte nichts arbeiten und lief über die Felder. Als ich dann abends gegen 6 noch einmal kam, wurde ich schon nicht mehr vorgelassen, da war schon die tiefe Bewußtlosigkeit eingetreten.

Ich habe sehr viel an ihm verloren, trotzdem wir uns eigentlich nur ein Jahr lang kannten. Denn bevor wir in Mürwik[1)] zusammenkamen, hatten wir uns nur bei Mathematiker-Kongressen mit hundert anderen gesehen. Aber dieses eine Jahr mit ihm war für mich sehr glücklich und ich kann dem Schicksal dafür nur dankbar sein.

Dann Schlußformel und gez. Ott-Heinrich Keller.

Anmerkungen zum 03.04.1943

[1]Ott-Heinrich Keller wurde am 22. Juni 1906 in Frankfurt (Main) geboren. Nach seinem Studium in Wien, Berlin und Göttingen promovierte er 1931 bei Max Dehn in Frankfurt und habilitierte sich 1933 bei Hamel in Berlin. Dort erhielt er 1941 eine Professur, wurde aber an die Marineschule in Flensburg–Mürwik geschickt, wo er auf Arnold Scholz traf. Nach dem Krieg hatte er Professuren in Kiel, Münster und Dresden inne, bevor er 1952 als Nachfolger von Heinrich Jung an die Universität Halle kam. Keller starb am 5.12.1990 in Halle.

Literaturverzeichnis

1. N.C. Ankeny, *An improvement of an inequality of Minkowski*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37** (1951), 711–716; sh. S. 37, 299

2. N.C. Ankeny, S. Chowla, *On the divisibility of the class number of quadratic fields*, Pacific J. Math. **5** (1955), 321–324; sh. S. 107

3. H. Aral, *Simultane diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern*, Diss. Mnchen, 1939; sh. S. 19

4. M. Arrigoni, *On Schur σ-Groups*, Tokyo Metropolitan University Mathematics Preprint Series, 1995; Math. Nachr. **192** (1998), 71–89; sh. S. 64

5. E. Artin, *Über eine neue Art von L-Reihen*, Abh. Math. Sem. Hamburg **3** (1923), 89–108; sh. S. 502

6. E. Artin, *Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes*, Abh. Hamburg **5** (1927), 353–363; sh. S. 99

7. E. Artin, *Idealklassen in Oberkörpern und allgemeines Reziprozitätsgesetz*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **7** (1929), 46–51; sh. S. 51

8. E. Artin, *Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. 164 (1931), 1–11; sh. S. 194

9. E. Artin, *Über Einheiten relativ galoisscher Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. **167** (1932), 153–156; sh. S. 194

10. E. Artin, *Kennzeichnung des Körpers der reellen algebraischen Zahlen*, Abh. Math. Sem. Hamburg **3** (1924), 319–323; sh. S. 208

11. E. Artin, *Die Bedeutung Hilberts für die moderne Mathematik*, Coll. Papers, 547–551; sh. S. 49

12. E. Artin, O. Schreier, *Algebraische Konstruktion reeller Körper*, Abh. Math. Sem. Hamburg **5** (1926), 85–99; sh. S. 208

13. E. Artin, J. Tate, *Class Field Theory*, Benjamin 1968; reprint 2009, AMS; sh. S. 78

14. A. Azizi, *Capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$*, Thesis Univ. Laval 1993; sh. S. 16

15. P. Barrucand, *Quelques aspects de la théorie des corps cubiques*, Semin. Delange-Pisot-Poitou, Expose 18, 10 pp. (1975); sh. S. 96

16. L. Bartholdi, M.R. Bush, *Maximal unramified 3-extensions of imaginary quadratic fields and $SL_2(\mathbb{Z}_3)$*, J. Number Theory **124** (2007), 159–166; sh. S. 16

17. M. Bauer, *Über einen Satz von Kronecker*, Arch. Math. Phys. (3) **6** (1903), 218–219; sh. S. 78

18. M. Bauer, *Ganzzahlige Gleichungen ohne Affekt*, Math. Ann. **64** (1907), 325–327; sh. S. 513, 515

19. M. Bauer, *Über Gleichungen ohne Affekt*, J. Reine Angew. Math. 132 (1907), 33–35; sh. S. 513

20. E. Benjamin, F. Lemmermeyer, C. Snyder, *Imaginary quadratic Fields with cyclic* $Cl_2(k^1)$, J. Number Theory **67** (1997), 229–245; sh. S. 16

21. E. Benjamin, F. Lemmermeyer, C. Snyder, *Real quadratic number fields with Abelian Gal(*k^2/k*)*, J. Number Theory **73** (1998), 182–194; sh. S. 16

22. E. Benjamin, F. Lemmermeyer, C. Snyder, *Imaginary quadratic fields k with* $\mathrm{Cl}_2(k) \simeq (2, 2^n)$ *and rank* $\mathrm{Cl}_2(k^1) = 2$, Pac. J. Math. **198** (2001), 15–32; sh. S. 16

23. E. Benjamin, F. Lemmermeyer, C. Snyder, *Imaginary quadratic fields k with* $\mathrm{Cl}_2(k)$ *of type* $(2, 2, 2)$, J. Number Theory **103** (2003), 38–70; sh. S. 16

24. M.C. Berg, *The Fourier-analytic proof of quadratic reciprocity*, Wiley 2000; sh. S. 266

25. H. Bergström, *Zur Theorie der biquadratischen Zahlkörper. Die Arithmetik auf klassenkörpertheoretischer Grundlage*, Nova Acta R. Soc. Sci. Upsaliensis (4) **10** (1937), Nr. 8, 56 S; sh. S. 180

26. D. Bernardi, *Résidus de puissances*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou (1977/78), Fasc. 2, Exp. No. 28, 12 pp.; sh. S. 95

27. W. E. H. Berwick, *On cubic fields with a given discriminant*, Proc. London Math. Soc., Ser. 2, **23** (1925), 359–378; sh. S. 96, 104, 180

28. H.-G. Bigalke, *Heinrich Heesch. Kristallgeometrie, Parkettierungen, Vierfarbenforschung*, Vita Mathematika Band 3 (E. Fellmann, Hrsg.), Birkhäuser 1988; sh. S. 43

29. Ch. Binder, *Olga Taussky-Todd – Der Beginn einer Karriere als Mathematikerin*, Int. Math. Nachr. **182** (1999), 11–16; sh. S. 47, 465

30. H.F. Blichfeldt, *Note on the minimum value of the discriminant of an algebraic number field*, Monatsh. Math. Phys. **48** (1939), 531–533; sh. S. 500, 503

31. E. Borel, *Contribution à l'analyse arithmétique du continu*, J. Math. Pures Appl. (5) **9** (1903), 329–375; sh. S. 18

32. S. Bosca, *Capitulations abéliennes*, Ph.D. thesis Bordeaux 2003; sh. S. 175

33. J. Brandler, *Residuacity properties of real quadratic units*, thesis, Univ. of Arizona, Tucson, 1970; sh. S. 107

34. J. Brandler, *Residuacity properties of real quadratic units*, J. Number Theory **5** (1973), 271–287; sh. S. 107

35. A.T. Brauer, *On addition chains*, Bull. Amer. Math. Soc. **45** (1939), 736–739; sh. S. 38

36. R. Brauer, *On the zeta-functions of algebraic number fields*, Amer. J. Math. **69** (1947), 243–250; sh. S. 316

37. Wanda Braun, *Bestimmung der Körperdiskriminante in einem kubischen Körper*, Diss. Straßburg, 1909; sh. S. 96

38. Hel Braun, *Hel Braun. Eine Frau und die Mathematik 1933-1940. Der Beginn einer wissenschaftlichen Laufbahn* (M. Koecher, Hrsg.), Springer-Verlag 1990; sh. S. 305, 307

39. J. R. Brink, *The class field tower of imaginary quadratic number fields of type* $(3,3)$ Ph. D. Diss. Ohio State Univ (1984), 121pp; sh. S. 26, 64

40. J. R. Brink, R. Gold, *Class field towers of imaginary quadratic fields*, Manuscripta Math. **57** (1987), 425–450; sh. S. 64

41. J. Brinkhuis, *Normal integral bases and the Spiegelungssatz of Scholz*, Acta Arith. **69** (1995), 1–9; sh. S. 22

42. J. Browkin, *On the generalized class field tower*, Bull. Acad. Pol. Sci. ser. sci. math. astr. phys. **27** (1963), 143–145; sh. S. 64

43. J. Browkin, *Examples of maximal* 3*-extensions with two ramified places*, Izv. Akad. Nauk. **27** (1963), 613–620; sh. S. 64

44. G. Bruckner, *Charakterisierung der galoisschen Zahlkörper, deren zerlegte Primzahlen durch binäre quadratische Formeln gegeben sind*, Math. Nachr. **32** (1966), 317–326 ; sh. S. 96

45. G. Bruckner, *Eine Charakterisierung der in algebraischen Zahlkörpern voll zerlegten Primzahlen*, Math. Nachr. **36** (1968), 153–169; sh. S. 96

46. G. Bucht, *Über einige algebraische Körper achten Grades*, Ark. f. Mat. **6**, Nr. 30 (1911), 1–36; sh. S. 113, 513, 516

47. M.R. Bush, *Computation of the Calois groups associated to the* 2*-class towers of some quadratic fields*, J. Number Theory **100** (2003), 313–325; sh. S. 16

48. M.R. Bush, *p-class towers of imaginary quadratic fields*, thesis Univ. Illionois 2004; sh. S. 16

49. M.R. Bush, D.C. Mayer, 3-*class field towers of exact length* 3, J. Number Theory **147** (2015), 766–777; sh. S. 16, 64

50. L. Carlitz, *On Galois fields of certain types*, Trans. Amer. Math. Soc. **32** (1930), 451–472; sh. S. 89, 521

51. S. M. Chang, *Capitulation problems in algebraic number fields*, Thesis Toronto (1977); sh. S. 64

52. S. M. Chang, R. Foote, *Capitulation in class field extensions of type* (p,p), Canad. J. Math. **32** (1980), 1229–1243; sh. S. 64

53. C. Chevalley, *Sur un théorème de M. Hasse*, C. R. Acad. Sci. Paris **191** (1930), 369–370; sh. S. 175

54. C. Chevalley, *Sur la théorie des restes normiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **191** (1930), 426–428; sh. S. 175

55. C. Chevalley, H. Nehrkorn, *Sur les démonstrations arithmétique dans la théorie du corps de classes*, Math. Ann. **111** (1935), 364–371; sh. S. 421

56. H. Cohen, H.W. Lenstra, *Heuristics on class groups of number fields*, Number theory, Noordwijkerhout 1983, 33–62, LNM 1068, Springer, Berlin, 1984; sh. S. 116

57. H. Cohn, *A classical invitation to algebraic numbers and class fields*, Springer-Verlag 1978; sh. S. 194, 361, 366, 472

58. H. Cohn, J. Lagarias, *On the existence of fields governing the* 2-*invariants of the classgroup of* $Q(\sqrt{dp})$ *as* p *varies*, Math. Comput. **41** (1983), 711–730; sh. S. 198

59. R. Couture, A. Derhem, *Un problème de capitulation*, C. R. Acad. Sci. Paris **314** (1992), 785–788; sh. S. 62

60. P. Damey, J. Martinet, *Plongement d'une extension quadratique dans une extension quaternionienne*, J. Reine Angew. Math. **262/263** (1973), 323–338; sh. S. 113

61. H. Davenport, H. Hasse, *Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen*, J. Reine Angew. Math. **172** (1934), 151–182; sh. S. 506

62. R. Dedekind, *Zur Theorie der Ideale*, Gött. Nachr. 1894, 272–277; Ges. Werke II, art. XXIV, 43–49; sh. S. 78, 503, 504

63. R. Dedekind, *Ueber Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind*, Math. Ann. **48** (1897), 548–561; Ges. Werke II, art. XXVII, 87–101; sh. S. 76, 86, 113

64. R. Dedekind, *Konstruktion von Quaternionenkörpern*, Ges. Werke II, art. XXXIX, 376–383; sh. S. 113

65. R. Dedekind, *Über die Permutationen des Körpers aller algebraischen Zahlen*, Festschrift Kön. Ges. Göttingen, Abh. (1901), 1–17; Ges. Werke II, art. XXXI, 272–291; sh. S. 208

66. R. Dedekind, *Ueber die Anzahl der Idealklassen in rein kubischen Zahlkörpern*, J. Reine Angew. Math. **121** (1899), 40–123; Ges. Werke II, art. XXIX, 148–235; sh. S. 93, 95, 96, 521

67. B. Delaunay, J. Sominski, K. Billevitch, *Table des corps algébriques totalement réels du quatrième degré* (Russian; with French summary), Bull. Acad. Sci. URSS **7** (1935), 1267–1297; sh. S. 315

68. H. Dellac, *Question 49*, Interméd. Math. **1** (1894), 20; ibid. 162–164; sh. S. 38

69. B. Delone, Faddeev, *The theory of irrationalities of the third degree*, Transl. AMS 1964; sh. S. 96

70. M. Deuring, *Über den Tschebotareffschen Dichtigkeitsssatz*, Math. Ann. **110** (1934), 414–415; sh. S. 238

71. M. Deuring, *Neuer Beweis des Bauerschen Satzes*, J. Reine Angew. Math. **173** (1935), 1–4; sh. S. 504, 505

72. D. Ebbinghaus (mit V. Peckhaus), *Ernst Zermelo. An Approach to his Life and Work*, Springer-Verlag 2007; sh. S. 16, 181

73. V. Ennola, S. Mäki, R. Turunen, *On real cyclic sextic fields*, Math. Comp. **45** (1985), 591–611; sh. S. 175

74. P. Epstein, *Zur Auflösbarkeit der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$*, J. Reine Angew. Math. **171** (1934), 243–252; sh. S. 238

75. G. Frei, P. Roquette (Hrsg.), *Emil Artin und Helmut Hasse. Die Korrespondenz 1923–1934*, Univ.-Verlag Göttingen, 2008; sh. S. vii, 97, 99, 266, 521

76. G. Frei, F. Lemmermeyer, P. Roquette (Hrsg.), *Emil Artin and Helmut Hasse. The correspondence 1923–1958*, Contributions in Mathematical and Computational Sciences 5; Springer 2014; sh. S. vii, 38, 125, 157, 163, 521

77. G. Frobenius, *Ueber Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe*, Berl. Ber. (1896), 689–703; sh. S. 77, 504

78. A. Fröhlich, *On non-ramified extensions with prescribed Galois group*, Mathematica **9** (1962), 133–134; sh. S. 38

79. A. Fröhlich, *Central Extensions, Galois groups, and ideal class groups of number fields*, AMS 1983; sh. S. 4, 126

80. T. Fujita, *Metabelian extensions of algebraic fields that have a given number knot* (Japanese), Algebraic number theory and Fermat's problem (Japanese) (Kyoto, 1995). Surikaisekikenkyusho Kokyuroku No. 971 (1996), 40–49; sh. S. 175

81. G. Fujisaki, *An elementary construction of Galois quaternionic extensions*, Proc. Japan Acad. **66** (1990), 80–83; sh. S. 113

82. Ph. Furtwängler, *Zur Theorie der in Linearfaktoren zerlegbaren ganzzahlingen ternären kubischen Formen*, Dissertation Göttingen, 1896; sh. S. 19, 503

83. Ph. Furtwängler, *Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern. I*, Math. Ann. **67** (1909); sh. S. 50

84. Ph. Furtwängler, *Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern. II*, Math. Ann. **72** (1912); sh. S. 50

85. Ph. Furtwängler, *Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern. III*, Math. Ann. **74** (1913); sh. S. 50

86. Ph. Furtwängler, *Über das Verhalten der Ideale des Grundkörpers im Klassenkörper*, Monatsh. f. Math. **27** (1916), 1–15; sh. S. 16, 49, 62, 66, 125, 346, 364

87. P. Furtwängler, *Über Kriterien für irreduzible und für primitive Gleichungen und über die Aufstellung affektfreier Gleichungen*, Math. Ann. **85** (1922), 34–40; sh. S. 513, 515

88. Ph. Furtwängler, *Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen*, Math. Ann. **96** (1927), 169–175; sh. S. 17, 19, 299

89. P. Furtwängler, *Über affektfreie Gleichungen*, Monatsh. Math. **36** (1929), 89–96; sh. S. 315, 514, 515

90. Ph. Furtwängler, *Beweis des Hauptidealsatzes für Klassenkörper algebraischer Zahlkörper*, Abh. Math. Sem. Hamburg **7** (1930), 14–36; sh. S. 54, 346, 351, 353, 356

91. Ph. Furtwängler, *Über die Verschärfung des Hauptidealsatzes für algebraische Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. **167** (1932), 379–387; sh. S. 60, 251

92. D.A. Garbanati, *The Hasse norm theorem for non-cyclic extensions of the rationals*, Proc. Lond. Math. Soc. **37** (1978), 143–164; sh. S. 32

93. D.A. Garbanati, *The Hasse norm theorem for ℓ-extensions of the rationals*, Number Theory and Algebra, 1977, 77–90; sh. S. 32

94. F. Gaßmann, *Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppen*, Math. Z. **25** (1926), 661–675; sh. S. 78, 504

95. F. Gerth, *On* 3*-class groups of pure cubic fields*, J. Reine Angew. Math. **278/279** (1975), 52–62; sh. S. 22

96. F. Gerth, *On* 3*-class groups of certain pure cubic fields*, Bull. Austral. Math. Soc. **72** (2005), 471–476; sh. S. 22, 255

97. F. Glage, *Anwendung der Gruppentheorie auf die irreducibeln Gleichungen vom sechsten Grade*, Diss Knigsberg 1899; Monatsh. f. Math. **11** (1900), 155–169; sh. S. 113

98. H.J. Godwin, *Real quartic fields with small discriminants*, J. London Math. Soc. **31** (1956), 478–485; sh. S. 315

99. C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer, *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Springer-Verlag 2007; sh. S. 383

100. E. Gottschalk, *Zum Fermatschen Problem*, Math. Ann. **115** (1938), 157–158; sh. S. 319

101. K. Grant, J. Leitzel, *Norm limitation theorem of class field theory*, J. Reine Angew. Math. **238** (1969), 105–111; sh. S. 21

102. A. Granville, K. Soundararajan, *The distribution of values of $L(1,\chi_d)$*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), 992–1028; sh. S. 300

103. G. Gras, *Principalisation d'idéaux par extensions absolument abéliennes*, J. Number Theory **62** (1997), no. 2, 403–421; sh. S. 175

104. W. Grunwald, *Charakterisierung des Normenrestsymbols durch die $\mathfrak{p}$-Stetigkeit, den vorderen Zerlegungssatz und die Produktformel*, Math. Ann. **107** (1932), 145–164; sh. S. 240

105. M. Gut, *Kubische Klassenkörper über quadratischimaginären Grundkörpern*, Nieuw Arch. Wiskunde (2) **23** (1951), 185–189; sh. S. 107

106. R.K. Guy, *Unsolved problems in number theory*, Springer-Verlag 1981; 3rd ed. 2004; sh. S. 38

107. F. Hajir, *On the growth of p-class groups in p-class field towers*, J. Algebra **188** (1997), 256–271; sh. S. 16

108. F. Hajir, *On the class numbers of Hilbert class fields*, Pac. J. Math. **181** (1997), 177–187; sh. S. 16

109. Ph. Hall, *The classification of prime-power groups*, J. Reine Angew. Math. **182** (1940), 130–141; Coll. Works, 265–276; sh. S. 325

110. M. Hall, *The Theory of Groups*, New York 1959; sh. S. 86

111. G. Hannink, *Verlagerung und Nichteinfachheit von Gruppen*, Monatsh. Math. Phys. **50** (1941), 207–233; sh. S. 270

112. Th. Hawkins, *The mathematics of Frobenius in context. A journey through 18th to 20th century mathematics*; Springer 2013; sh. S. 77

113. H. Hasse, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Teil I: Klassenkörpertheorie*, Jahreber. DMV **35** (1926), 1–55; sh. S. 76, 77, 82, 86

114. H. Hasse, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Teil Ia: Beweise zu Teil I*, Jahreber. DMV **36** (1927), 233–311; sh. S. 107

115. H. Hasse, *Das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz der n-ten Potenzreste*, Math. Ann. **97** (1927), 599–623; sh. S. 93

116. H. Hasse, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Teil II: Reziprozitätsgesetz*, Ergänzungsband **6** (1930), 1 – 201; Berichtigungen: Jahresbericht DMV **42** (1932), 85–86; sh. S. 161, 467

117. H. Hasse, *Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage*, Math. Z. **31** (1930), 565–582. Berichtigung: ibid. S. 799; sh. S. 96, 99, 180, 521

118. H. Hasse, *Die moderne algebraische Methode*, Jahresbericht D. M. V. **39** (1930), 22–34; sh. S. 154

119. H. Hasse, *Beweis eines Satzes und Widerlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestsymbol*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. 1931, 64–69; sh. S. 21, 170

120. H. Hasse, *Theory of cyclic algebras over an algebraic number field*, Transactions of the AMS **34** (1932), 171–214; sh. S. 472

121. H. Hasse, *Théorie des restes normiques dans les extensions galoisiennes*, C. R. Acad. Sci. Paris **197** (1933), 469–471; sh. S. 212

122. H. Hasse, *Applications au cas abélien de la théorie des restes normiques dans les extensions galoisiennes*, C. R. Acad. Sci. Paris **197** (1933), 511–512; sh. S. 212

123. H. Hasse, *Über die Klassenzahl Abelscher Zahlkörper*, Akademie-Verlag Berlin 1952; sh. S. 279

124. H. Hasse, *Über das Problem der Primzerlegung in Galoisschen Zahlkörpern*, Sitz.ber. Berlin. Math. Ges. (1951/52), 8–27; sh. S. 78

125. D.R. Heath-Brown, S. J. Patterson, *The distribution of Kummer sums at prime arguments*, J. Reine Angew. Math. **310** (1979),111–130; sh. S. 266

126. L. Heffter, *Beglückte Rückschau auf neun Jahrzehnte*, Freiburg 1952; sh. S. 181, 221

127. F.-P. Heider, *Zur Theorie der zahlentheoretischen Knoten*, Diss. Köln 1978; sh. S. 5, 32, 40

128. F.-P. Heider, *Zahlentheoretische Knoten unendlicher Erweiterungen*, Arch. Math. (Basel) **37** (1981), no. 4, 341–352; sh. S. 175

129. F.-P. Heider, B. Schmithals, *Zur Kapitulation der Idealklassen in unverzweigten primzyklischen Erweiterungen*, J. Reine Angew. Math. **336** (1982), 1–25; sh. S. 5, 26, 44, 64

130. J. Herbrand, *Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini*, Math. Ann. **106** (1932), 473–501; ibid. **108** (1933), 699–717; sh. S. 44, 337

131. G. Herglotz, *Über einen Dirichletschen Satz*, Math. Z. **12** (1922), 255–261; sh. S. 89, 181, 500, 511

132. D. Hilbert, *Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten*, J. Reine Angew. Math. **110** (1892), 104–129; sh. S. 513, 515

133. D. Hilbert, *Die Theorie der algebraischen Zahlen* (Zahlbericht), Jahresber. DMV **4** (1897), 175–546; Frz. Übers.: Toulouse Ann. (3) **1** (1905), 257–328; Engl. Übers.: Springer Verlag 1998; Rumän. Übers.: Bukarest 1998; sh. S. 82, 89

134. D. Hilbert, *Über die Theorie der relativ-quadratischen Zahlkörper*, Jber. DMV **6** (1899), 88–94; sh. S. 16

135. D. Hilbert, *Über die Theorie des relativ-quadratischen Zahlkörpers*, Math. Ann. **51** (1899), 1–127; cf. p. 16, 50

136. D. Hilbert, *Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1898), 377–399; Acta Math. **26** (1900), 99–132; cf. p. 16, 50

137. E. Hlawka, *Nachruf auf Nikolaus Hofreiter*, Monatsh. Math. **116** (1993), 263–273; sh. S. 411

138. Ch. Hobby, *The derived series of a finite p-group*, Ill. J. Math. **5** (1961), 228–233; sh. S. 65, 486

139. N. Hofreiter, *Über einen Approximationssatz von Minkowski*, Monatsh. Math. Phys. **40** (1933), 351–392; sh. S. 411

140. K. Horie, M. Horie, *Relations among certain number knots*, Acta Arith. **108** (2003), no. 4, 303–313; sh. S. 175

141. P. Humbert, *Sur les nombres de classes de certains corps quadratiques*, Comment. Math. Helv. **12** (1940), 233–245; sh. S. 107

142. J. Hunter, *The minimum discriminant of quintic fields*, Proc. Glasgow Math. Ass. **3** (1957), 57–67; sh. S. 315

143. N. Ito, *A note on p-groups*, Nagoya Math. J. **1** (1950), 115–116; sh. S. 65

144. S. Iyanaga, *Über den allgemeinen Hauptidealsatz*, Japanese J. Math. **7** (1931), 315–333; sh. S. 186, 226, 356

145. S. Iyanaga, *Zum Beweis des Hauptidealsatzes*, Abh. Math. Sem. Hamburg **10** (1934), 349–357; sh. S. 356

146. J. F. Jaulent, *L'état actuel du problème de la capitulation*, Sém. Théor. Nombres Bordeaux, (1987/88), **17** 26

147. W. Jehne, *On knots in algebraic number theory. In memoriam Arnold Scholz*, J. Reine Angew. Math. **311/312** (1979), 215–254; sh. S. 4, 5, 32, 33, 44, 175

148. W. Jehne, *Der Hassesche Normensatz und seine Entwicklung*, Mitt. Math. Ges. Hamburg **11** (1982), no. 1, 143–153; sh. S. 170

149. Ch. U. Jensen, *Remark on a characterization of certain ring class fields by their absolute Galois group*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 738–741; sh. S. 96

150. Ch. U. Jensen, N. Yui, *Quaternion Extensions*, Algebraic Geometry and Commutative Algebra (1987), 155–182; sh. S. 113

151. O.-H. Keller, *Zur Theorie der ebenen Berührungstransformationen. I*, Math. Ann. **120** (1949), 650–675; sh. S. 44

152. H. Kisilevsky, *Number fields with class number congruent to* 4 *modulo* 8 *and Hilbert's Theorem 94*, J. Number Theory **8** (1976), 271–279; sh. S. 62

153. N. Klingen, *Arithmetical similarities. Prime decomposition and finite group theory*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press 1998; sh. S. 78

154. H. Koch, *Nachruf auf Hans Reichardt*, Jber. DMV **95** (1993), 135–140; sh. S. 167

155. L. Kronecker, *Über die Auflösung der Pellschen Gleichung mittels elliptischer Functionen*, Monatsber. Kön.-Preuss. Akad, Wiss. Berlin (1863), S. 44–50; Werke IV, 219–226; sh. S. 95

156. L. Kronecker, *Über die Irreductibilität von Gleichungen*, Monatsber. Kön. Akad. Wiss. Berlin (1880), 155–162; Werke II, 83–93; sh. S. 77, 78

157. L. Kronecker, *Die Periodensysteme von Funktionen reeller Variablen*, Sitz.ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1884), 1071–1080; Werke III.1, p. 33–46; sh. S. 18

158. W. Krull, *Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern. I,* Math. Z. **29** (1928), 42–54; sh. S. 44, 337

159. W. Krull, *Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern. II,* Math. Z. **31** (1930), 527–557; sh. S. 44, 337

160. Th. Kuhnt, *Generalizations of Golod-Shafarevich and applications*, thesis Univ. Illinois 2000; sh. S. 16

161. F. Langmayr, *Zur simultanen Diophantischen Approximation. I*, Monatsh. Math. **86** (1978), 285–300; sh. S. 19

162. F. Langmayr, *Zur simultanen Diophantischen Approximation. II*, Monatsh. Math. **87** (1979), 133–144; sh. S. 19

163. E. Lehmer, *Rational reciprocity laws*, Amer. Math. Month. **85** (1978), 467–472; sh. S. 5

164. F. Lemmermeyer, *Kuroda's class number formula*, Acta Arith. **66** (1994), 245–260; sh. S. 186

165. F. Lemmermeyer, *Explizite Konstruktion von Klassenkörpern*, Doktorarbeit Univ. Heidelber 1994; sh. S. 113

166. F. Lemmermeyer, *Unramified quaternion extensions of quadratic number fields*, J. Théor. Nombres Bordeaux **9** (1997), 51–68; sh. S. 113

167. F. Lemmermeyer, *Reciprocity Laws. From Euler to Eisenstein*, Springer-Verlag 2000; sh. S. 92

168. F. Lemmermeyer, *Class groups of cyclotomic fields. III*, Acta Arith. 2008; sh. S. 37, 299

169. F. Lemmermeyer, *Grün's Theorems and Class Groups*, Arch. Math. **96** (2011), 135–138 377, 486, 489

170. F. Lemmermeyer, *Parametrization of algebraic curves from a number theorist's point of view*, Am. Math. Mon. **119** (2012), 573-583; sh. S. 194

171. F. Lemmermeyer, P. Roquette (Hrsg.), *Briefwechsel Hasse–Noether*, Univ.-Verlag Göttingen, 2006; sh. S. vii, 208

172. F. Lemmermeyer, P. Roquette (Hrsg.), *Die mathematischen Tagebücher von Helmut Hasse 1923–1935*, Universitätsverlag Göttingen, 2013; sh. S. 38, 96

173. H.W. Lenstra, P. Stevenhagen, *Primes of degree one and algebraic cases of Cebotarev's theorem*, Enseign. Math. (2) **37** (1991), no. 1-2, 17–30; sh. S. 89

174. H.W. Lenstra, P. Stevenhagen, *Chebotarëv and his density theorem*, Math. Intelligencer **18** (1996), no. 2, 26–37; sh. S. 99

175. H.W. Leopoldt, *Zur Struktur der l-Klassengruppe galoisscher Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. **199** (1958), 165–174; sh. S. 22, 181

176. J.E. Littlewood, *On the class number of the corpus $P(\sqrt{-k},)$*, Proc. London Math. Soc. **27** (1928), 358–372; sh. S. 300

177. D. Liu, *Dihedral polynomial congruences and binary quadratic forms*, Ph.D. thesis Carleton 1992; sh. S. 95

178. F. Lorenz, *Zur Theorie der Normenreste*, J. Reine Angew. Math. **334** (1982), 157–170; sh. S. 32, 175

179. S. MacLane, *Note on equations without affect*, Bull. Amer. Math. Soc. 1936, 731–736; sh. S. 513

180. W. Magnus, *Beziehung zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring*, Math. Ann. **11** (1935), 259–280; sh. S. 16, 65, 380, 418, 486

181. C. Maire, *Un raffinement du théorème de Golod-Safarevic*, Nagoya Math. J. **150** (1998), 1–11; sh. S. 16

182. C. Maire, C. McLeman, *On p^2-ranks in the class field tower problem*, Ann. Math-. Blaise Pascal **21** (2014), 57–68; sh. S. 16

183. J. Martinet, *Petits discriminants des corps de nombres*, Journ. Arithm. 1980, LMS Lecture Notes **56** (1982), 151–193; sh. S. 315

184. J. Martinet, *Méthodes géométriques dans la recherche de petits discriminants*, Sém. Théor. Nombres Paris 1983-84, 147–179; sh. S. 315

185. J. Martinet, *Discriminants and permutation groups*, Number theory, Proc. 1st Conf. Can. Number Theory Assoc., Banff/Alberta (Can.) 1988, 359–385 (1990); sh. S. 315, 316

186. R. Massy, *Construction de p-extensions galoisiennes d'un corps de caractéristique différente de p*, J. Algebra **109** (1987), 508–535; sh. S. 113

187. D.C. Mayer, *Principalization in complex S_3-fields*, Numerical Mathematics and Computing, Proc. 20th Manitoba Conf. Winnipeg 1990, Congr. Numer. **80** (1991), 73–87; sh. S. 64

188. D.C. Mayer, *The second p-class group of a number field*, Int. J. Number Theory **8** (2012), 471–505; sh. S. 16, 64

189. D.C. Mayer, *Transfers of metabelian p-groups*, Monatsh. Math. **166** (2012), 467–495; sh. S. 16, 64

190. D.C. Mayer, *The distribution of second p-class groups on coclass graphs*, J. Théor. Nombres Bordx. **25** (2013), 401–456; sh. S. 16, 64

191. D.C. Mayer, *Principalization algorithm via class group structure*, J. Théor. Nombres Bordx. **26** (2014), 415–464; sh. S. 16, 64

192. J. Mayer, *Die absolut kleinsten Diskriminanten der biquadratischen Zahlkörper*, Sitz.ber. Akad. Wiss. Wien IIa, **138** (1929), 733–724; sh. S. 19, 299, 315, 503

193. C.W. McLeman, *A Golod-Shafarevich equality and p-tower groups*, thesis Univ. Arizona 2008; sh. S. 16

194. E. Menzler-Trott, *Gentzens Problem. Mathematische Logik im nationalsozialistischen Deutschland*, Birkhäuser 2001; sh. S. 23, 384

195. F. Mertens, *Über die Äquivalenz der reducirten binären quadratischen Formen von positiver Determinante*, Wien. Ber. **103** (1894), 995–1004; sh. S. 315

196. F. Mertens, *Gleichungen 8-ten Grades mit Quaternionengruppe*, Wien. Ber. **125**, (1916), 735–740; sh. S. 113, 114, 513, 516

197. F. Mertens, *Die Gestalt der Wurzeln einer irreduktibeln zyklischen Gleichung eines gegebenen Rationalitätsbereichs, deren Grad eine Primzahlpotenz ist*, Wien. Ber. **127** (1918), 999–1018; sh. S. 114

198. F. Mertens, *Gleichungen, deren Gruppe eine Quaternionengruppe ist*, Wien. Ber. **130** (1921), 69–90; sh. S. 113

199. U. Merzbach, *Robert Remak and the estimation of units and regulators*, in Amphora: Festschrift fr Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag, (S.S. Demidov, M. Folkerts, D. Rowe, C.J. Scriba, (Hrsg.)), Birkhäuser 1992, 481–522; sh. S. 140, 411

200. T. Metsänkylä, *On the history of the study of ideal class groups*, Expos. Math. **25** (2007), 325–340; sh. S. 486, 489

201. J. Minac, *Quaternion fields inside the Pythagorean closure*, J. Pure Appl. Algebra **57** (1989), 79–82; sh. S. 113

202. H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Leipzig 1896; sh. S. 18

203. K. Miyake, *Some p-groups with two generators which satisfy certain conditions arising from arithmetic in imaginary quadratic number fields*, Tôhoku Math. J. **44** (1992), 443–469; sh. S. 64

204. T. Morishima, *Über die Einheiten und Idealklassen des Galoisschen Zahlkörpers und die Theorie der Kreiskörper der l^ν-ten Einheitswurzeln*, Japanese J. Math. **10** (1933), 83–126; sh. S. 223

205. T. Morishima, *Über die Fermatsche Vermutung. X*, Proceedings Acad. Tokyo **9** (1933), 577–579; sh. S. 300

206. T. Morishima, *Über die Fermatsche Vermutung. XII*, Proceedings Acad. Tokyo **11** (1935), 307–309; sh. S. 300

207. M. Moriya, *Über die Klassenzahl eines relativzyklischen Zahlkörpers von Primzahlgrad*, Japanese J. Math. **10** (1933), 1-18; sh. S. 223

208. M. Moriya, *Klassenkörpertheorie im Kleinen für die unendlichen algebraischen Zahlkörper*, Journ. Science Hokkaido Univ. **5** (1936), 9–66; sh. S. 42

209. M. Moriya, *Klassenkörpertheorie im Großen für unendliche algebraische Zahlkörper*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **12** (1936), 322–324; sh. S. 42

210. P. Morton, *Density results for the 2-classgroups of imaginary quadratic fields*, J. Reine Angew. Math. **332** (1982), 156–187; sh. S. 198

211. P. Morton, *Density results for the 2-classgroups and fundamental units of real quadratic fields*, Stud. Sci. Math. Hung. **17** (1982), 21–43; sh. S. 198

212. P. Morton, *The quadratic number fields with cyclic 2-classgroups*, Pac. J. Math. **108** (1983), 165–175; sh. S. 198

213. P. Morton, *On the non-existence of abelian conditions governing solvability of the* -1 *Pell equation*, J. Reine Angew. Math. **405** (1990), 147–155; sh. S. 198

214. P. Morton, *Governing fields for the* 2*-class group of* $\mathbb{Q}(\sqrt{-q_1q_2p})$ *and a related reciprocity law*, Acta Arith. **55** (1990), 267–290; sh. S. 198

215. A. Mouhib, *Sur la tour des* 2*-corps de classes de Hilbert des corps quadratiques réels*, Ann. Sci. Math. Québec **28** (2004), 179–187; sh. S. 16

216. C. Müller, *Wie fand Archimedes die von ihm gegebenen Näherungswerte von* $\sqrt{3}$*?*, Quellen u. Studien **2** (1932), 281–285; sh. S. 411

217. M. Müller, *Berechnung von Kapitulationskernen in quadratischen Zahlkörpern*, Diplomarbeit Univ. Karlsruhe 1993; sh. S. 64

218. T. Nagell, *Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper*, Abh. Math. Sem. Hamburg **1** (1922), 140–150; sh. S. 107

219. H. Naito, *Some results on class numbers and unramified extensions of algebraic number fields*, Class numbers and fundamental units of algebraic number fields, Proc. Int. Conf., Katata/Jap. 1986, 171-188 (1986); sh. S. 148

220. H. Naito, *On* ℓ^3*-divisibility of class numbers of* ℓ*-cyclic extensions*, Algebraic number theory, Proc. Symp. RIMS, Kyoto/Jap. 1986, RIMS Kokyuroku 603, 87-92 (1987); sh. S. 148

221. B. Nebelung, *Zum Kapitulationsproblem in unverzweigten Erweiterungen*, Staatsarbeit Köln 1983; sh. S. 64

222. B. Nebelung, *Klassifikation metabelscher* 3*-Gruppen mit Faktorkommutatorgruppe vom Typ* $(3,3)$ *und Anwendung auf das Kapitulationsproblem*, Diss. Univ. Köln, (1989); sh. S. 16, 64

223. H. Nehrkorn, *Über absolute Idealklassengruppen und Einheiten in algebraischen Zahlkörpern*, Abhandlungen Hamburg **9** (1933), 318–334; sh. S. 133, 421

224. F. Neiß, *Relativ Abelsche Zahlkörper*, Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **19** (1921), 74–84; sh. S. 114, 246

225. F. Neiß, *Darstellung relativ Abelscher Zahlkörper durch Primkörper und Einheitskörper*, J. Reine Angew. Math. **166** (1931), 30–53; sh. S. 19, 150

226. E. Netto *Vorlesungen über Algebra*, Teubner, Leipzig 1900; sh. S. 277

227. E. Noether, *Gleichungen mit vorgegebener Gruppe*, Math. Ann. **78** (1918), 221–229; sh. S. 513, 515

228. E. Noether, *Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen*, Math. Ann. **77** (1916), 89–96; sh. S. 515

229. A. Nomura, *A note on unramified quaternion extensions over quadratic number fields*, Proc. Japan Acad. **78** (2002), 80–82; sh. S. 113

230. A. Nomura, *On the existence of unramified p-extensions with prescribed Galois group*, Osaka J. Math. **47** (2010), 1159–1165; sh. S. 38

231. H. Nover, *Computation of the Galois groups of* 2*-class towers*, thesis Univ. Wisconsin 2009; sh. S. 16

232. A. Odefey, *Otto Schreier (1901–1929). Briefe an Karl Menger und Helmut Hasse*, Rauner Verlag 2014; sh. S. 142

233. A. M. Odlyzko, *Bounds for discriminants and related estimates for class numbers, regulators and zeros of zeta functions: A survey of recent results*, Semin. Théor. Nombres Bordeaux **1** (1977), 119–141; sh. S. 300

234. H. Opolka, *Zur Auflösung zahlentheoretischer Knoten*, Math. Z. **173** (1980), 95–103; sh. S. 32

235. H. Opolka, *Zur Auflösung zahlentheoretischer Knoten in Galoiserweiterungen von* $\mathbb{Q}$, Arch. Math. **34** (1980), 416–420; sh. S. 32

236. H. Opolka, *Geschlechter von zentralen Erweiterungen*, Arch. Math. **37** (1981), 418–424; sh. S. 41

237. H. Opolka, *Der Schur-Multiplikator in der algebraischen Zahlentheorie*, Abh. Braunschw. Wiss. Ges. **33** (1982), 189–195; sh. S. 32

238. H. Opolka, *Normenreste in relativ abelschen Zahlkörpererweiterungen und symplektische Paarungen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **54** (1984), 1–4; sh. S. 32, 175

239. B. Oriat, *Spiegelungssatz*, Publ. Math. Fac. Sci. Besançon 1975/76; sh. S. 22

240. B. Oriat, *Generalisation du 'Spiegelungssatz'*, Astérisque **61** (1979), 169–175; sh. S. 22

241. B. Oriat, P. Satgé, *Un essai de generalisation du 'Spiegelungssatz'*, J. Reine Angew. Math. **307/308** (1979), 134–159; sh. S. 22

242. M. Ozaki, *Construction of maximal unramified p-extensions with prescribed Galois groups*, Invent. Math. **183** (2011), 649–680; sh. S. 38, 44

243. G. Pall, *Note on irregular determinants*, J. London Math. Soc. **11** (1936), 34–35; sh. S. 101

244. V. Peckhaus, *Becker und Zermelo*, in: *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik* (V. Peckhaus, ed.), München 2005, 279–297; sh. S. 181

245. R. Perlis, *On the class numbers of arithmetically equivalent fields*, J. Number Theory **10** (1978), 489–509; sh. S. 78

246. O. Perron, *Über Gleichungen ohne Affekt*, Heidelb. Ak. Sitzber. 1923, 3. Abh. 13 S.; sh. S. 513, 514, 515

247. O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Teubner 1913; 2. Aufl. 1929; 3. Aufl. 1954 (Band I), 1957 (Band II); sh. S. 334

248. O. Perron, *Über diophantische Approximationen*, Math. Ann. **83** (192?), 77–84; sh. S. 18

249. G. Poitou, *Sur les petits discriminants*, Sém. Delange-Pisot-Poitou (1977), no. 6; sh. S. 315

250. F. Pollaczek, *Über die Einheiten relativ-abelscher Zahlkörper*, Math. Z. **30** (1929), 520–551; sh. S. 133, 181, 500, 511

251. T.P. Pollio, A.S. Rapinchuk, *The multinorm principle for linearly disjoint Galois extensions*, J. Number Theory **133** (2013), 802–821; sh. S. 32

252. J. Porusch, *Die Arithmetik in Zahlkörpern, deren zugehörige Galoissche Körper spezielle metabelsche Gruppen besitzen, auf klassenkörpertheoretischer Grundlage*, Math. Z. **37** (1933), 134–160; sh. S. 180

253. L. Rédei, *Arithmetischer Beweis des Satzes über die Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. **171** (1934), 55–60; sh. S. 205, 509

254. L. Rédei, *Eine obere Schranke der Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. **171** (1934), 61–64; sh. S. 205

255. L. Rédei, *Über einige Mittelwertfragen im quadratischen Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. **174** (1935), 15–55; sh. S. 238, 255

256. L. Rédei, *Über die Pellsche Gleichung* $t^2 - du^2 = -1$, Journ. f. Math. **173** (1935), 193–221; sh. S. 198

257. L. Rédei, *Die 2-Ringklassengruppe des quadratischen Zahlkörpers und die Theorie der Pellschen Gleichung*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **4** (1953), 31–87; sh. S. 198

258. L. Rédei, H. Reichardt, *Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers*, J. Reine Angew. Math. **170** (1933), 69–74; sh. S. 107, 500, 509

259. H. Reichardt, *Arithmetische Theorie der kubischen Körper als Radikalkörper*, Monatshefte Math. **40** (1933), 323–350; sh. S. 180, 184, 500

260. H. Reichardt, *Über Normalkörper mit Quaternionengruppe*, Math. Z. **174** (1936), 218–221; sh. S. 113

261. H. Reichardt, *Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe von Primzahlpotenzordnung*, J. reine angew. Math. **177** (1937), 1–5; sh. S. 6

262. H. Reichardt, *Über die Idealklassengruppe des Dirichletschen biquadratischen Zahlkörpers*, Acta Arith. **21** (1972), 323–327; sh. S. 133

263. H. Reichardt, U. Wegner, *Arithmetische Charakterisierung von algebraisch auflösbaren Körpern und Gleichungen von Primzahlgrad*, J. Reine Angew. Math. *178* (1937), 1–10; sh. S. 277

264. L.W. Reid, *Tafel der Klassenanzahlen für kubische Zahlkörper*, Diss. Göttingen 1899; engl. Übers. American J. Math. **23** (1901), 68–84; sh. S. 95, 500

265. R. Remak, *Elementare Abschätzung von Fundamentaleinheiten und des Regulators eines algebraischen Zahlkörpers*, J. Reine Angew. Math. **165** (1931), 159–171; sh. S. 500

266. R. Remak, *Über die Abschätzung des absoluten Betrags des Regulators eines algebraischen Zahlkörpers nach unten*, J. Reine Angew. Math. **167** (1932), 360–378; sh. S. 500

267. R. Remak, *Über Größenbeziehungen zwischen Diskriminante und Regulator eines algebraischen Zahlkörpers*, Compositio Math. **10** (1952), 245–285; sh. S. 309

268. V. Remmert, *Vom Umgang mit der Macht: das Freiburger mathematische Institut im "Dritten Reich"*, Zeit. f. Sozialgeschichte 20. u. 21. Jhdts. **14** (1999), 56–85; sh. S. 15, 39, 181, 221, 259, 270

269. H. Richter, *Über die Lösbarkeit einiger nicht-Abelscher Einbettungsprobleme*, Math. Ann. **112** (1935), 69–84; sh. S. 6

270. H. Richter, *Über die Lösbarkeit des Einbettungsproblems für Abelsche Zahlkörper*, Math. Ann. **112** (1936), 700–726; sh. S. 6, 240

271. P. Roquette, *From FLT to finite groups – the remarkable career of Otto Grün*, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **107** (2005), 117–154; sh. S. 377, 486, 489

272. M. Rosen, *Polynomials modulo p and the theory of Galois sets*, Theory and applications of finite fields, vol. 10, AMS 2012; sh. S. 77

273. E. Rosenblüth, *Die arithmetische Theorie und die Konstruktion der Quaternionenkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage*, Monatsh. Math. **41** (1934), 85–125; sh. S. 113, 180

274. L. Sapolsky, *Über die Theorie der Relativ-Abel'schen-cubischen Zahlkörper*, Diss. Göttingen 1902; sh. S. 96, 184

275. P. Satgé, *Inégalités de miroir*, Sem. Delange-Pisot-Poitou (1967/77), **18** 4pp; sh. S. 22

276. K. Schaffstein, *Tafel der Klassenzahlen der reellen quadratischen Zahlkörper mit Primzahldiskriminante unter* 12000 *und zwischen* $100000 - -101000$ *und* $1000000 - -1001000$, Math. Ann. **98** (1928), 745–748; sh. S. 116, 258

277. K. Scheel, *Der Briefwechsel Richard Dedekind – Heinrich Weber*, Abh. Akad. Wiss. Hamburg **5**, herausgegeben von Th. Sonar unter Mitarbeit von K. Reich, De Gruyter 2014; sh. S. 95

278. A. Schmidt, K. Wingberg, *Safarevic's Theorem on Solvable Groups as Galois Groups*, `http://www.math.uiuc.edu/Algebraic-Number-Theory/0136/`; sh. S. 284, 294

279. B. Schmithals, *Kapitulation der Idealklassen in zyklischen Erweiterungen und Einheiten in Diederkörpern vom Grad* 2ℓ, Tagungsber. Oberwolfach **35/81** (1981); sh. S. 64

280. B. Schmithals, *Zur Kapitulation der Idealklassen in zyklischen Zahlkörpererweiterungen und Einheitenstruktur in Diederkörpern vom Grad* 2ℓ, Diss. Univ. Dortmund (1981); sh. S. 64

281. Th. Schönemann, *Theorie der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung. Allgemeine Sätze über Congruenzen nebst einigen Anwendungen derselben*, J. Reine Angew. Math. **19** (1839), 289–308; sh. S. 17, 121

282. O. Schreier, *Über die Erweiterung von Gruppen I*, Monatshefte f. Math. **34** (1926), 165–180; sh. S. 116, 518

283. O. Schreier, *Über die Erweiterung von Gruppen II*, Abhandlungen Sem. Hamburg **4** (1926), 321–346; sh. S. 116, 518

284. O. Schreier, *Über eine Arbeit von Herrn Tschebotareff*, Abh. Math. Sem. Hamburg **5** (1927), 1–6; sh. S. 504

285. I. Schur, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. Reine Angew. Math. **127** (1904), 20–50; sh. S. 517

286. I. Schur, *Untersuchungen über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. Reine Angew. Math. **132** (1907), 85–137; sh. S. 36

287. I. Schur, *Über die Existenz unendlich vieler Primzahlen in einigen speziellen arithmetischen Progressionen*, Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **11** (1912), 40–50; sh. S. 505

288. I. Schur, *Elementarer Beweis eines Satzes von L. Stickelberger*, Math. Z. **29** (1928), 464–465; sh. S. 502

289. I. Schur, *Beispiele für Gleichungen ohne Affekt*, Jahresber. DMV **29** (1920), 145–150; sh. S. 513, 514, 515

290. I. Schur, *Gleichungen ohne Affekt*, Sitzungsberichte Akad. Berlin 1930, 443–449; sh. S.

291. I. Schur, *Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguerreschen und Hermiteschen Polynome*, J. Reine Angew. Math. **165** (1931), 52–58; sh. S.

292. S.L. Segal, *Mathematicians under the Nazis*, Princeton Univ. Press 2003; sh. S. 38, 259

293. J.P. Serre, *Sur une question d'Olga Taussky*, J. Number Theory **2** (1970), 235–236; sh. S. 16, 66, 486

294. J.P. Serre, *Topics in Galois theory*, lecture notes by Henri Darmon, 1991; sh. S. 526

295. I.R. Shafarevich, *Construction of fields of algebraic numbers with given solvable Galois group*, Izv. Akad. Nauk. SSSR **18** (1954), 525–578; Transl. Amer. Math. Soc. **4** (1956), 185–237; Collected Math. Papers 139–237; sh. S. 6

296. D. Shanks, P. Weinberger, *A quadratic field of prime discriminant requiring three generators for its class group, and related theory*, Acta Arith. **21** (1972), 71–87; sh. S. 101, 157

297. C.L. Siegel, *Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper*, Acta Arith. **1** (1935), 83–86; sh. S. 316, 502

298. B. de Smit, *On arithmetically equivalent fields with distinct p-class numbers*, J. Algebra **272** (2004), 417–424; sh. S. 78

299. B. de Smit, R. Perlis, *Zeta functions do not determine class numbers*, Bull. Am. Math. Soc. **31** (1994), 213–215; sh. S. 78

300. Skolem, *Geschlechter und Reziprozitätsgesetze*, Norsk Mat. Forenings Skrifter (1) No. 18, (1928); sh. S. 353

301. J. Sommer, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Teubner 1907; sh. S. 310

302. B.K. Spearman, K.S. Williams, *The cubic congruence $x^3 + Ax^2 + Bx + C \equiv 0 \pmod p$ and binary quadratic forms*, J. London Math. Soc. (2) **46** (1992), no. 3, 397–410; sh. S. 95

303. B.K. Spearman, K.S. Williams, *The cubic congruence $x^3 + Ax^2 + Bx + C \equiv 0 \pmod p$ and binary quadratic forms. II*, J. London Math. Soc. (2) **64** (2001), no. 2, 273–274; sh. S. 95

304. H.-D. Steckel, *Abelsche Erweiterungen mit vorgegebenem Zahlknoten* J. Reine Angew. Math. **330** (1982), 93–99; sh. S. 175

305. H.-D. Steckel, *Arithmetik in Frobeniuserweiterungen*, Manuscr. Math. **39** (1982), 359–385; sh. S. 180

306. G. Steinke, *Über Auflösungen zahlentheoretischer Knoten*, Schriftenreihe Münster, 1983. 116 pp; sh. S. 5, 40, 175

307. A. Steurer, *On the Galois groups of the 2-class field towers of some imaginary quadratic number fields*, thesis Maryland 2006; sh. S. 16

308. P. Stevenhagen, *Ray class groups and governing fields*, Publ. Math. Fac. Sci. Besançon, Théor. Nombres 1988/89, No.1, 93 p. (1989); sh. S. 198

309. L. Stickelberger, *Über eine neue Eigenschaft der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper*, Verhandl. 1. Math. Kongr. Zürich 1897, 182–193 502

310. Z.-H. Sun, *Cubic residues and binary quadratic forms*, J. Number Theory **124** (2007), 62–104; sh. S. 95

311. H. Suzuki, *A generalization of Hilbert's theorem 94*, Nagoya Math. J. **121** (1991), 161–169; sh. S. 28, 125

312. T. Takagi, *Sur les corps résolubles algébriquement*, C. R. Acad. Sci. Paris 171 (1920), 1202–1205; sh. S. 96, 521

313. E. T. Tan, *A note on abundant central extensions of number fields and Scholz's solutions of number knots*, Arch. Math. (Basel) **54** (1990), no. 2, 157–161; sh. S. 175

314. T. Tannaka, *Über die Konstruktion der Galoisschen Köprer mit vorgegebener p-Gruppe*, Tôhoku math. J. **43** (1937), 252–260; sh. S. 6, 442

315. J. Tate, *Global class field theory*, in : Algebraic Number Theory, J.W.S. Cassels, A. Fröhlich (Hrsg.), Academic Press London 1967; sh. S. 175

316. N. Tschebotareff, *Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen*, Math. Ann. **95** (1926), 191–228; sh. S. 99, 504

317. N. Tschebotareff, *Zur Gruppentheorie des Klassenkörpers*, J. Reine Angew. Math. **161** (1929), 179–193; sh. S. 175, 519

318. N. Tschebotareff, *Untersuchungen über relativ Abelsche Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. **167** (1932), 98–121; sh. S. 516

319. N. Tschebotareff, *Die Probleme der modernen Galoisschen Theorie*, Comm. math. Helvetici **6** (1934), 235–283; sh. S. 96

320. N. Tschebotareff, *Grundlagen der Galois-Theorie I* (Russ.), Leningrad-Moskau, Staatsverlag 1934; sh. S. 251

321. K. Uchida, *Unramified extensions of quadratic number fields. II*, Tôhoku Math. J. **22** (1970), 220–224; sh. S. 38

322. J. Värmon, *Über Abelsche Körper, deren alle Gruppeninvarianten aus einer Primzahl bestehen, und über Abelsche Körper als Kreiskörper*, Diss. Lund 1925; sh. S. 186

323. J. Värmon, *Über die Klassenzahlen Abelscher Körper*, Arkiv f. Mat. **22** A., No. 13 (1930), 47 pp.; sh. S. 186, 500

324. T. P. Vaughan, *Constructing quaternionic fields*, Glasgow Math. J. **34** (1992), 43–54; sh. S. 113

325. G. Voronoi, *Über ganze algebraische Zahlen, die von einer Wurzel einer Gleichung dritten Grades abhängen* (Russ.), Diss. St. Petersburg 1894; sh. S. 96

326. B. van der Waerden, *Die Seltenheit der Gleichungen mit Affekt*, Math. Ann. **109** (1934), 13–16; sh. S. 315, 514, 515

327. B. van der Waerden, *Die Zerlegungs- und Trägheitsgruppe als Permutationsgruppen*, Math. Ann. **111**, 731–737; sh. S. 515

328. S. Wang, *A counter-example to Grunwald's Theorem*, Ann. Math. (2) **49** (1948), 1008–1009; sh. S. 240

329. S. Wang, *On Grunwald's Theorem*, Ann. Math. (2) **51** (1950), 471–484; sh. S. 240

330. R. Ware, *A note on the quaternion group as Galois group*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 621–625; sh. S. 113

331. L. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, GTM 83, Springer 1982; sh. S. 89

332. G. Whaples, *Non-analytic class field theory and Grünwald's theorem*, Duke Math. J. **9** (1942), 455–473; sh. S. 240

333. U. Wegner, *Charakterisierung der binomischen Körper vom Primzahlgrad*, Math. Ann. **105** (1931), 262–266; sh. S.

334. U. Wegner, *Zur Theorie der auflösbaren Gleichungen von Primzahlgrad. I*, J. Reine Angew. Math. **168** (1932), 176–192; sh. S. 277, 288

335. U. Wegner, *Bestimmung eines auflösbaren Körpers von Primzahlgrad aus der Form seiner Diskriminante*, J. Reine Angew. Math. **176** (1936), 1–11; sh. S. 277, 279, 288

336. A. Weil, *L'avenir des mathématiques. Les grands courants de la pensée mathématique*, Marseille 1948; sh. S. 32

337. P. Weinberger, *The cubic character of quadratic units*, Proc. 1972 Number Theory Conf., Univ. Colorado, Boulder 1972, 241–242; sh. S. 95

338. H. Wielandt, *Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von p-Gruppen*, Math. Z. **41** (1936), 281–282; sh. S. 275

339. A. Wiman, *Über die durch Radikale auflösbaren Gleichungen, deren Grad eine Potenz von* 2 *ist*, Stockh, Öfv. **58** (1901), 543–548; sh. S. 113

340. A. Wiman, *Über die metacyklischen Gleichungen von Primzahlgrad*, Acta Math. **27** (1903), 163–176; sh. S. 113

341. A. Wiman, *Über die metazyklischen Gleichungen vom Grade p^2*, Arkiv f. Mat. och Fys. **3**, Nr. 27 (1907), 39 S.; sh. S. 113

342. E. Witt, *Über die Kommutativität endlicher Schiefkörper*, Abh. Math. Sem. Hamburg **8** (1931), 413; sh. S. 188

343. E. Witt, *Konstruktion von galoisschen Körpern der Charakteristik p zu vorgegebener Gruppe der Ordnung p^f*, J. Reine Angew. Math. **174** (1936), 237–245; sh. S. 113

344. D. Wünsch, *Der Erfinder der 5. Dimension. Theodor Kaluza: Leben und Werk*, Termessos Verlag, 2007; sh. S. 243

Namenverzeichnis

Stichwortverzeichnis

Kurzbiographienverzeichnis

Arnold Scholz (1906–1941) war einer der vielversprechendsten jungen Zahlentheoretiker in den 1930er Jahren, einer der besten Kenner der Klassenkörpertheorie. Als Doktorand von Issai Schur war er auch mit gruppentheoretischen Methoden vertraut. Da er während des Dritten Reichs als politisch nicht zuverlässig galt (er war ein enger Freund des ebenfalls „suspekten" Ernst Zermelo), konnte er keine sichere Stelle finden. Trotzdem gelang es ihm, eine Reihe wichtiger Resultate zu erhalten, u.a. bei der Realisierung von Galoisgruppen und in der Theorie der Normenreste. Der zu einem klaren Verständnis dieser Ergebnisse notwendige kohomologische Apparat war damals noch nicht entwickelt, und daher konnten zunächst nur Wenige mit den Scholzschen Ideen etwas anfangen. Eine Reihe seiner Resultate wurden später wiederentdeckt. Schafarewitsch konnte mit Hilfe der Scholzschen Methoden zeigen, dass jede endliche auflösbare Gruppe als Galoisgruppe einer Erweiterung der rationalen Zahlen vorkommt.

Das vorliegende Buch, das als erster Schritt zu einem besseren Verständnis des Werks von Arnold Scholz anzusehen ist, enthält die Korrespondenz zwischen Arnold Scholz und Helmut Hasse einerseits und Olga Taussky andererseits, soweit sie in den Archiven der Universität Göttingen und des California Institute of Technology in Pasadena erhalten sind. Auch die Korrespondenz zwischen Hasse und Taussky bis zum frühen Tod von Arnold Scholz wurde aufgenommen.

ISBN: 978-3-86395-253-2

Universitätsverlag Göttingen